

## 2 段階 DEA を適用した効率性総合評価手法の提案

A Study on the Comprehensive Evaluation Model Developed by Applying Two-step DEA

北海道大学大学院工学研究科 ○正 員 内田 賢悦 (Kenetsu UCHIDA)

北海道大学大学院工学研究科 フェロー 加賀屋 誠一 (Seiichi KAGAYA)

函館工業高等専門学校 正 員 佐々木恵一 (Keiichi SASAKI)

### 1. 背景

包絡分析法 (DEA: Data Envelopment Analysis) は、計算の容易性、理解の容易性からさまざまな分野において、効率性評価手法として利用されてきた<sup>1),2)</sup>。DEA の基本的な考えは、複数の入力と複数の出力を前提とし、入力値と出力値の比率によって何らかの効率性を表現できる場合、その比率によって最も優れた事業体 (DMU) を基準とした事業体の相対比較を行うことである。したがって、手法の性質から相対評価には適用できるが、総合評価には適用してはならない。本質的には、DEA は DMU が得意とする入力項目と出力項目を相対的に評価する手法である。また、相対的に効率となるための目標値 (入力項目/出力項目の改善案) を与えることもできる。

DEA を用いた分析例を概観すると、その限界性にも関わらず、総合評価手法として適用したものと解釈される場合が見受けられる。ほとんどの場合、意図したものは考えられないが、分析結果としての効率値をそのまま昇順に並べて提示することによって、あたかも総合評価が行われたかのような印象を読者に与えることがその原因と考えられる。具体的には、効率値が 1.0 未満となる DMU は効率値が 1.0 となる特定の (優位集合となる) DMU と比較すると、非効率的ではあるが、効率値がより高いが 1.0 未満の DMU より非効率的であるとは決して言えない。本研究は、DEA の総合評価手法としての限界を改めて示す。次に、DEA の特性を活かした総合評価手法を提案する。ここでは、DEA を 2 段階にわたり適用する 2 段階最適化問題として定式化を行う。さらに、DEA による計算結果をより分かりやすく、誤解を招かないような表現法も提案する。最後に総務省の統計データを用いた 2 段階 DEA 法による都道府県を対象とした評価例を示す。

### 2. モデル

#### (1) DEA を用いた総合評価の問題点

ここでは、 $L$  人の DMU がそれぞれ、 $M$  個の入力項目、 $N$  個の出力項目により DEA を用いた評価を行う場合を考える。DMU  $l \in \{1, \dots, L\}$  の入力ベクトル、出力ベクトルをそれぞれ以下で与える。

$$\mathbf{I}_l \equiv (i_l^1, \dots, i_l^M)^T, \forall l \in \{1, \dots, L\}$$

$$\mathbf{O}_l \equiv (o_l^1, \dots, o_l^N)^T, \forall l \in \{1, \dots, L\}$$

ここで  $T$  は、ベクトルの転置操作である。このとき、CCR モデルによると、DMUI の解くべき問題は以下の通りである。

$$\max \theta_l^l = \frac{(\mathbf{U}_l)^T \mathbf{O}_l}{(\mathbf{V}_l)^T \mathbf{I}_l} \quad \forall l \in \{1, \dots, L\} \quad (1)$$

w.r.t.

$$\mathbf{U}_l \equiv (u_l^1, \dots, u_l^N)^T \text{ and } \mathbf{V}_l \equiv (v_l^1, \dots, v_l^M)^T \quad (2)$$

s.t.

$$\theta_k^l \equiv \frac{(\mathbf{U}_k)^T \mathbf{O}_l}{(\mathbf{V}_k)^T \mathbf{I}_l} \leq 1.0 \quad \forall k \in \{1, \dots, L\},$$

$$\mathbf{U}_l \geq \mathbf{0} \text{ and } \mathbf{O}_l \geq \mathbf{0}. \quad (3)$$

その入力項目、出力項目に関する解  $v_l^{m*} \quad \forall m \in \{1, \dots, M\}$ ,  $u_l^{n*} \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$  それぞれを要素とするベクトルを以下で表すことにする。

$$\mathbf{V}_l^* \equiv (v_l^{1*}, \dots, v_l^{M*})^T$$

$$\mathbf{U}_l^* \equiv (u_l^{1*}, \dots, u_l^{N*})^T$$

また、DMUI に関する解ベクトルを以下で定義し、これをルール  $l$  と呼ぶことにしよう。

$$\mathbf{R}_l^* \equiv (v_l^{1*}, \dots, v_l^{M*}, u_l^{1*}, \dots, u_l^{N*})^T$$

CCR モデルでは、以下で定義される効率値が 1.0 ならばその DMUI は効率的と判断され、1.0 未満であれば非効率的であると判断される。

$$\theta_l^{l*} \equiv \frac{(\mathbf{U}_l^*)^T \mathbf{O}_l}{(\mathbf{V}_l^*)^T \mathbf{I}_l} \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}$$

DMU  $l \in \{1, \dots, L\}$  に対して、効率性に対する順位付けを行う場合、一般的に  $\theta_l^{l*} \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}$  の値が大きいほど、高い順位が与えられることになる。この評価法は、ある意味合理的ではある。すなわち、他の DMU の評価値が 1.0 を超えないことを制約に、自己の評価値を最大化した結果を用いており、DMUI にとっては極めて公平・公正に決定された値を用いているからである。しかし問題は、他の DMU が DMUI の評価値として  $\theta_l^{l*}$  を採用することに合意するかという点にある。すなわち  $\theta_l^{l*}$  は、DMUI が勝手に (DMUI にとっては合理的に) 決めたルール  $l$  に基づいて計算された値であり、他の DMU が

DMUI に対して抱いている ( $l$  以外のルールに基づく) 評価値が全く考慮されていない. そのため,  $\theta_l^{l*}$  を総合評価としての順位付けに利用することに合意できない状況が容易に想定できる. こうした状況は, 相撲, プロレス, K1, Pride 等のルールが異なる格闘技それぞれが最強であると主張して譲らない状況に似ている. こうした状況に対して, ルールを統一することが考えられるが, こうした解決法はそれぞれの格闘技の醍醐味/特徴をなくす可能性があり, できればそれぞれの格闘技の特徴を残した上で, 総合評価を行いたいと思うのは当然の結果である.

## (2) 2 段階 DEA 法による総合評価

$DMU_k \forall k \in \{1, \dots, L\}$  のルールによって評価された DMUI の最適値 (評価値)  $\theta_k^{l*}$  を要素とする DMUI に関する評価値ベクトルを以下で定義する.

$$\Theta^{l*} \equiv (\theta_1^{l*}, \dots, \theta_L^{l*})^T \forall l \in \{1, \dots, L\}$$

ここで  $\theta_k^{l*}$  は,  $DMU_k$  ( $\forall k \in \{1, \dots, L\}$ ) のルール  $R_k^* \equiv (v_k^{1*}, \dots, v_k^{M*}, u_k^{1*}, \dots, u_k^{N*})^T$  を用いて計算される DMUI に対する評価値であり, DMUI の評価値ベクトルには他の DMU のルールを用いた評価値全てが含まれていることに注意されたい. 自己を含む他の DMU からの DMUI に対する評価値を上式は表しているため, その総合評価値としてはその平均値を用いることが考えられる.

$$CE_E = ((e^L)^T \Theta^{l*}) / L \quad (4)$$

ここで,  $e^L$  は  $L$  個の全ての要素が 1 となるベクトルである ( $e^L \equiv (1, \dots, 1)^T$ ). この総合評価値は, 他の DMU の自己に対する評価値を同等に扱ったものであり, 不公平感の少ない値と解釈される. ただ, このような平均をとる演算は, DEA の特徴をなくす可能性があるため, 以下では DEA の特徴を活かした評価法を考えていくことにする.

自己の評価値と他の DMU による評価値を同一的に扱う場合の DMUI の総合評価値を求めるため, 以下の問題を考える.

$$\max z^l = (\Phi^l)^T \Theta^{l*} \forall l \in \{1, \dots, L\} \quad (5)$$

w.r.t.

$$\Phi^l \equiv (\phi_1^l, \dots, \phi_L^l)^T \quad (6)$$

s.t.

$$(\Phi^l)^T \Theta^{k*} \leq 1.0 \quad k \in \{1, \dots, L\} \text{ and } \Phi^l \geq 0 \quad (7)$$

where

$$\theta_k^{l*} \equiv \frac{(U_k^*)^T O_l}{(V_k^*)^T I_l} \quad \forall k \in \{1, \dots, L\}. \quad (8)$$

上記の問題を解いて得られる評価値を  $z_*^l \forall l \in \{1, \dots, L\}$  とし, これを DEA 的総合評価値と定義する.

$$\begin{aligned} CE_D &= z_*^l \\ &\equiv (\Phi_*^l)^T \Theta^{l*} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで  $\Phi_*^l$  は,  $\Phi^l$  の最適値ベクトルである. 式(5)~式(7) (以下, 上位問題とする) は, 他の DMU による自己に対する評価値を出力値とし, 入力値を 1 に固定した場合

の CCR モデルである. また, 式(8)は式(1)-式(3)によって示される標準的な CCR モデル (以下, 下位問題とする) を解いた結果を用いている. すなわち, CCR モデルによる 2 段階問題を解いた結果を用いて総合評価を行う構造となっている. 上記の定式化によって得られる効率値  $z_*^l \forall l \in \{1, \dots, L\}$  は, その評価値ベクトル  $\Theta^{l*} \equiv (\theta_1^{l*}, \dots, \theta_L^{l*})^T \forall l \in \{1, \dots, L\}$  の要素に 1.0 が含まれる場合には必ず 1.0 となり, 式(1)~式(3)で定式化される下位問題と同じ評価値となる. ただし, 下位問題で 1.0 と評価されない DMU の場合, そこでの評価値よりも高い評価値を上位問題で得る可能性があり, 1.0 (効率的) と評価されることもある. 下位問題で 1.0 と評価される DMU は一芸に秀でた (特定の項目に着目すると誰にも負けない) DMU と捉えることができるが, ここで提案する評価法では, そうした DEA 独自の特徴も活かしながら, 項目間のバランスの良さも同時に評価する手法と位置づけられる.

上記の問題設定に対して, 他の DMU による評価と自己の評価を区別する場合を以下では考えていく.  $DMU_k \forall k (\neq l) \in \{1, \dots, L\}$  のルールによって評価された DMUI の最適値 (評価値)  $\theta_k^{l*} \forall k (\neq l) \in \{1, \dots, L\}$  を要素とする評価値ベクトルを以下で定義する.

$$\Theta_c^{l*} \equiv (\theta_1^{l*}, \dots, \theta_{l-1}^{l*}, 0, \theta_{l+1}^{l*}, \dots, \theta_L^{l*})^T \forall l \in \{1, \dots, L\}$$

ここで,  $l$  番目の要素が 0 となっていることに注意が必要である. DMUI に対する総合評価を考えるに当たり, 以下に示される問題を考えよう.

$$\max y^l = (\Psi^l)^T \Theta_c^{l*} \quad \forall l \in \{1, \dots, L\} \quad (10)$$

w.r.t.

$$\Psi^l \equiv (\psi_1^l, \dots, \psi_L^l)^T \quad (11)$$

s.t.

$$(\Psi^l)^T \Theta_c^{k*} \leq 1.0 \quad k (\neq l) \in \{1, \dots, L\} \text{ and } \Psi^l \geq 0 \quad (12)$$

where

$$\theta_k^{l*} \equiv \frac{(U_k^*)^T O_l}{(V_k^*)^T I_l} \quad \forall k (\neq l) \in \{1, \dots, L\}. \quad (13)$$

上記の問題を解いて得られる解ベクトルを  $\Psi_*^l$ , 評価値を  $y_*^l \equiv (\Psi_*^l)^T \Theta_c^{l*} \forall l \in \{1, \dots, L\}$  とし, 総合評価上限値を式(14)で定義する.

$$CE_U \equiv \max(\theta_l^{l*}, y_*^l) \quad (14)$$

以下では,  $CE_U$  を上限評価値と呼ぶことにする. 一方, 総合評価下限値を式(15)で定義する.

$$CE_L \equiv \min(\theta_l^{l*}, y_*^l) \quad (15)$$

以下では,  $CE_L$  を下限評価値と呼ぶことにする. 式(10)-式(13)に示す問題は, 自分以外の DMU による自己に対する評価値を出力値とし, 入力値を 1 に固定した場合の CCR モデルである. この問題を解いて得られる評価値  $y_*^l$  は, 他者が与えた自分への評価値に対して, 自分に有利な評価値になるように重み付けを行った結果であり, DEA 的な発想に基づき他者の自己への評価を総合化したものと捉えることができる. 評価値  $y_*^l$  と下位問題を解いて得られる自己の評価値  $\theta_l^{l*}$  の最大値を総合評価と考

えるのが式(14)に示した上限評価値であり、他者の総合評価と自己の評価のうち、良い方を採用するという考えに基づいている。これに対して最小値を用いるのが式(15)で示した下限評価値であり、他者の総合評価と自己の評価のうち、悪い方を採用するという考えに基づいている。

### (3) 改善案

ここでは、2段階 DEA 法による改善案の計算法を考える。すなわち、上位問題と下位問題に整合的な改善案を提示する。上位問題では、目標とする効率的フロンティアを決定し、改善案を提示することにする。ここでは、通常の CCR モデルに基づく方法がとられることになる。具体的には、どの DMU による評価値をどれだけ上げればよいかを提示されることになる。その改善案に基づき、下位問題ではどの出力（または入力）項目をどれだけ改善すればよいかを考えればよい。式(10)-式(12)に示した方法では、自己の効率値を 0 とした評価を行っているが、CCR モデルではこうした出力値に対する改善案は定義されない。したがって、以下で示す改善案の設定法は、(2)で示した方法全てに適用可能である。入力項目の改善法は、以下に示す出力項目に関する改善法と同じ考え方を適用できるため、ここでは出力項目に関する改善法を考えていくことにする。

たとえば、DMUK による DUMI に関する出力評価値を改善することを考えよう。DMUK による DUMI に対する現在の出力評価値は式(16)で表される。

$$\omega_k^l = (\mathbf{O}_I)^T \mathbf{U}_k^* \quad \forall k \in \{1, \dots, L\} \quad (16)$$

また、その出力評価値に関する改善値が  $\omega_k^{l*} (> \omega_k^l)$  であったとしよう。このとき、改善値  $\omega_k^{l*}$  を実現する出力ベクトルを  $\mathbf{O}_I^*$  とすると、式(17)が成立する。

$$\omega_k^{l*} = (\mathbf{O}_I^*)^T \mathbf{U}_k^* \quad \forall k \in \{1, \dots, L\} \quad (17)$$

ここで、 $\mathbf{O}_I^* = \alpha \mathbf{O}_I$  ( $\alpha > 1$ ) を仮定すると、式(17)は式(18)に変形される。

$$\begin{aligned} \omega_k^{l*} &= \alpha (\mathbf{O}_I)^T \mathbf{U}_k^* \\ &= \alpha \omega_k^l \quad \forall k \in \{1, \dots, L\} \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)は、出力ベクトルの改善案は、 $\mathbf{U}_k^*$  の値に関係なく、 $\omega_k^l$  と  $\omega_k^{l*}$  のみで決定されることを意味している。以上の関係を用いると、DUMI に対する DMUK の評価値が改善されるべきと判断された場合、DMUK の集合を  $D_I$  と表現すると、出力ベクトルの改善案は式(19)で与えられる。

$$\mathbf{O}_I^* = \alpha \mathbf{O}_I \quad (\alpha > 1) \quad (19)$$

where,

$$\alpha \equiv \max_{k \in D_I} \left( \frac{\omega_k^{l*}}{\omega_k^l} \right) \quad (20)$$

式(14)および式(15)で表現される効率値に関しては、 $\theta_i^*$  または  $y_i^*$  が評価値として採用されるが、 $\theta_i^*$  が採用された場合、その改善値を 1 とした計算を行うことで改善案を求めることが可能である。

### (4) 結果の表示法

下位問題において、2 つの DMU のルールベクトルを

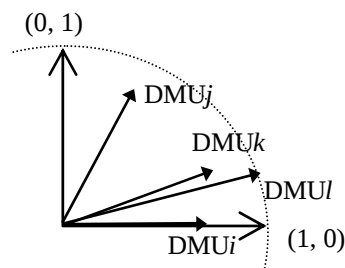


図-1 DMUi を基準とした比較

考え、それらのなす角度で DUM 同士の類似性を表現することを提案する (図-1)。また、ベクトルの長さは効率値を表すものとする。こうすることで、DMU 間の類似性だけではなく、効率性も視覚的に分かりやすく表現できる。2 つのルールベクトルが直交する場合、もしくはそれに近い場合、評価ルールが全く異なることを意味する。したがって、そうした DMU 間の効率性を比較することは無意味であり、こうした状況に対応する 1 つの方法が本研究で提案する 2 段階 DEA 法である。ただし、図-1 では、DMUi を基準とした場合の角度は意味を持つが、任意の 2 つの DMU 間の角度は意味を持たないことに注意が必要である。

## 3. 主成分分析との関係

DEA の特徴を表現するために、重回帰分析との比較が行われることが多い。ここでは、効率的な DMU は（平均的な値からかけ離れているという意味で）乖離値として表現されるようである。これに対して、DEA ではこうした DMU が目標とされる（効率的フロンティアを構成することになり、重回帰分析は平均的な者、DEA は優秀な者を基準とした手法とされる。一方、前述の 2 段階 DEA 法は総合評価（ランキング）を行うものと考えられるため、以下ではそうした代表的な手法として主成分分析との比較・考察を行う。

主成分分析の基本的な概念は、多次元データをより少ない次元のデータで表現しようとするものである。そのために、多段階の最適化問題を構成し、その各段階で評価軸とそれに対応した寄与率が計算され、寄与率の総和がある閾値以上になった場合、計算が終了する。また、評価軸の数が少なく、寄与率の総和が大きいほど良いと判断される。第一軸を求める計算法に着目すると、総合評価との対応を観察できる。第一軸は、元の多次元データのある軸に直交射影した点の集合を考え、その軸上で計算される分散が最大になるように決定される。すなわち、これを評価軸と考えると、その軸はできるだけ評価値がバラバラになるように決められることになり、換言すると、できるだけ重複しないような順位を与えることが軸を決定する上での目標となる。また、評価値は評価対象全てが同一なウェイト（軸の傾き）を用い、その加重平均として与えられる。

一方 2 段階 DEA 法では、下位問題ではできるだけ他の DMU との差がつくように、自己に最も有利なウェイトが決定される。主成分分析とは異なり、ここでは DMU

によってウェイトが異なることが許される。二段階目では、下位問題によって得られる他の DMU からの評価値を対象に、自分に最も有利なようにウェイト付けを再度行うことになる。ここでも DMU 毎にウェイトは異なっても良い。このように考えた場合、2 段階 DEA 法は、主成分分析において前提となる、評価基準が同一でなければならない、という約束事を緩めた方法であると位置づけられる。

#### 4. 計算例とまとめ

ここでは、都道府県別の新国民生活指標を模し、各都道府県を対象とした 2 段階 DEA 法による評価を行った。使用したデータは、総務省統計局「社会・人口統計体系」から用意に入手可能なものを用いた。入力値としては、「刑法犯認知件数（人口千人当たり）」および「離婚件数（人口千人当たり）」とし、出力値としては、「持ち家住宅の畳数（1 人当たり）」および「県民 1 人当たり県民所得」とし、2 入力 2 出力のシステムとした<sup>3)</sup>。

図-2 は、2 段階 DEA 法を上記のデータに適用した結果を示しており、平均値、下限値、上限値が各都道府県に対して示されている。どの都道府県に着目しても、平均値、下限値、上限値の昇順に評価値が得られている。平均値に関しては、全ての都道府県からの自己への評価が同等に扱われた結果であり、当たり前ではあるが、DEA 的なウェイト付けは行われていない。その結果、他の評価値と比べ、最も低い値となっている。ここで示した例では、全ての DMU において、下位問題における自己への評価値 ( $\theta_l^* \forall l$ ) が上位問題における自己への評価値 ( $y_*^l \forall l$ ) よりも小さくなり、下限値が  $\theta_l^* \forall l$ 、上限

値が  $y_*^l \forall l$  となった。すなわち、下限値は自己の評価値、上限値は自分以外が与えた自己への評価値を DEA 的に集計したものと言える。したがって、この結果は分析データによっては下位問題での効率値が総合評価値となり得る可能性を示している。一方、下限値が上限値よりも高くなる DMU は、一芸には秀でてはいないが、他の DMU からの評価値もそれなりに高く、総合力のある DMU であると特徴付けられる。また、上限値と下限値による評価では福島県と茨城県、平均値と下限値による評価では広島と山口の例のように、順位に変化があることがわかり、総合評価の考え方の違いが反映された結果が得られた。

以上を踏まえると、2 段階 DEA を実問題に適用する場合、総合評価値はどういう基準で図られるべきかについて、事前に議論を重ねて決定し、適切な評価値を用いることが肝要である。この考えは、一般的な最適化問題においては、目的関数を設定し、それを最小または最大とすることが最適であると定義することなしに、問題を解くことが不可能であることに相当する。したがって、どのような基準で総合評価を行うかについては、別途合意形成が必要となることは言うまでもない。

#### 参考文献

- 1) 中島卓也，青山吉隆，松中亮治：地方自治体の行政活動の総合的評価手法に関する研究，土木計画学研究・論文集，Vol.17, pp.145-154.
- 2) 岸邦宏，山平秀典，佐藤馨一：ウィンドー分析法による地下鉄事業の経営および利用効率評価，土木計画学研究・論文集，Vol.18, pp.115-121.
- 3) <http://www.f.waseda.jp/ykondo/ja/edu/lectures/EconSpecial/2003/#MATLAB3>.

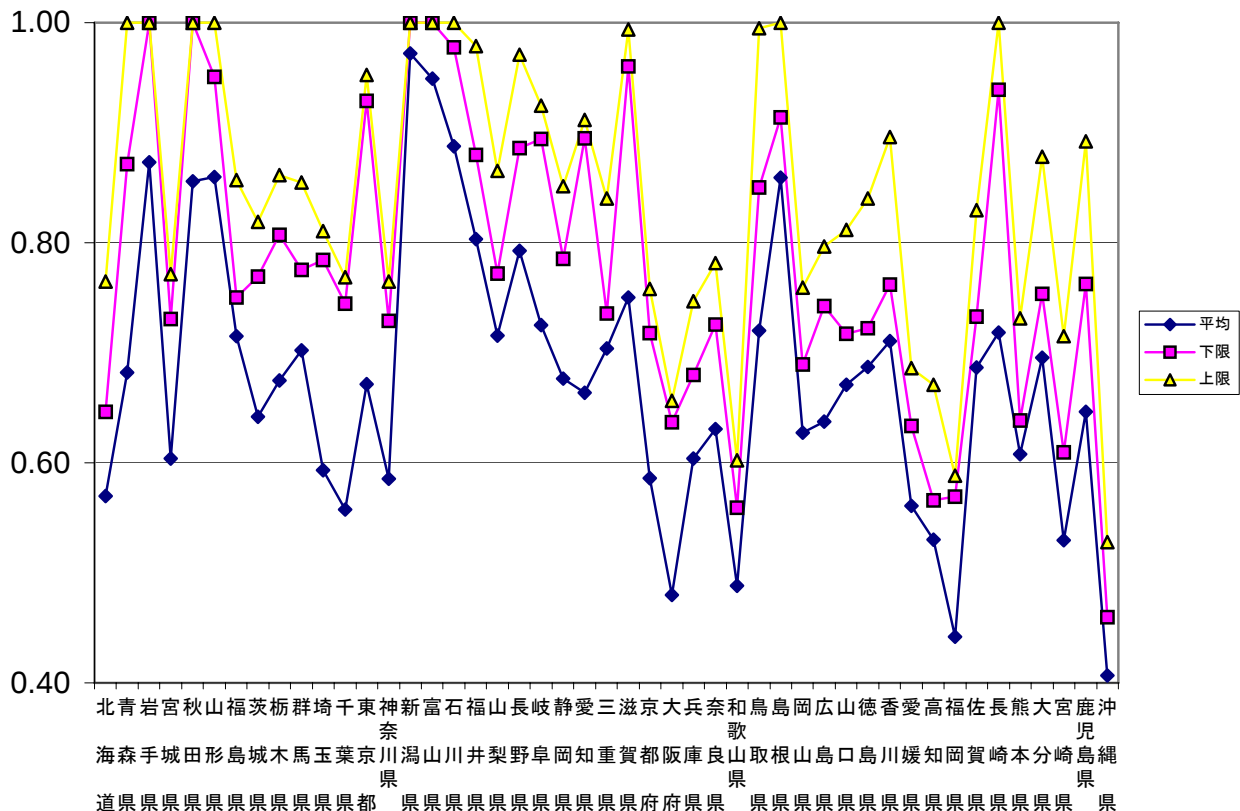


図-2 2 段階 DEA 法による評価結果