自由水面をもつ局所流れの数値計算法

Algorithm of enforcing boundary conditions to free surfaces for numerical calculation

北海道大学工学研究科　○学生員　猿渡亜由未　(Ayumi Saruwatari)
北海道大学工学研究科　正員　渡部靖憲　(Yasunori Watanabe)

1.　はじめに

実験による再現または計測が困難な流体運動を数値計算により再現しようとする試みが近年盛んに行われている．自由水面を含む流れ場を数値的に求めようとする場合，水面において境界条件（式4,5）を厳密に設定すべきであるが，多くの場合計算コスト軽減の為に簡略化した境界条件が与えられている．

一方実現象において，水面直下に存在する渦は水面との相互作用によって渦自身の形状及び水面形を変化させると同時に流体の粘性の効果により二次渦を生成するが，それらの現象の発生は水面におけるゼロ接線方向せん断力条件と密接に関係しており[1)]，同条件を考慮しない事にはそれらを正確に再現する事はできない．また，水面形状のスケールはその直下の渦と同程度となるが，砕波等十分に発達した乱れによって曲率の増大した水面においてはそれに比例した大きな表面張力が働いており，それによって流れは複雑化している[3)]．加えて，水面において局所的に非常に強い表面張力がかかる事は水面の不安定化を招く為，気泡混入の原因ともなっている．つまり水面形の著しい変化を伴う複雑な乱流場(砕波等)において水面は乱れの発生源となっていると言える．その為，数値計算によってその様な流れ場を正確に求めようとする場合には，水面における境界条件を厳密に満足させる必要がある．

そこで本研究では，著者ら[6)]による水面における表面張力設定法の開発に引き続き，数値的に流れ場を解く際に自由水面における境界条件を完全に満足させる方法を提案する．また，自由水面を有する流体運動をEuler的に計算する場合，水面近傍の諸値を移流させる為には流体外に流速を外挿しておく必要がある．現在外挿流速として流体内流速の平均値が用いられる事が殆んどであるが，それらは物理的根拠があっての事ではない．本研究では自由水面境界条件の設定方法と同時に，合理的な外挿流速設定法についても論じる．

2.　数値計算法

基本式として用いたのは，全ての変数を水滴（図-1参照）の直径と落下初速度，水の密度で無次元化したNavier-Stokes式である．N-S式に分離解法を適用し，次の線形化された運動方程式及び圧力に関するPoisson方程式を導出する．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + n_T \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \qquad (1)$$

$$\nabla^2 p = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{\Delta t} + n_T \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \qquad (2)$$

ここで，$\mathbf{u}=(u\ v\ w)$は流速，pは圧力，ν_Tは格子粘性，$\mathbf{g}$は重力加速度である．上二式の計算にはMultigrid法及び予測子修正子法を用いる．乱流モデルとしてはLESを採用し，移流計算はCIP法，水面の捕捉及び曲率等の計算はLevel-Set法[4,5)]によって行う．L-S法は，計算領域内の各計算点から水面までの距離を表すLevel-Set関数ϕ（$\phi=0$の面が水面）を定義し，それを次式に従って移流させる．

$$\frac{Df}{Dt} = 0. \qquad (3)$$

上式は自由水面運動学的境界条件そのものであり，この関数を用いる事によって運動学的境界条件は必然的に満足される．

ここで，水面における力学的境界条件は次式で示される．

$$m\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial n}\right) = 0. \qquad (4)$$

$$-p + 2m\frac{\partial u_n}{\partial n} = 2tk, \qquad (5)$$

μは粘性係数，u_iはi方向の流速，τは表面張力係数，κは曲率，nとs，tはそれぞれ水面に対する法線方向(内向)と2つの接線方向である．

(4)式は水面に対する接線方向の力学的境界条件である．水面において流速の勾配が(4)式を満たすような流速を水面近傍の流体外数グリッドに外挿する事により，これを満足させる．これについては3章に詳述する．

(5)式は水面に対する法線方向の力学的境界条件であり，次式の様に圧力の境界条件を設定する事により満足させる．

$$p_{surface} = 2m\frac{\partial u_n}{\partial n} + 2tk. \qquad (6)$$

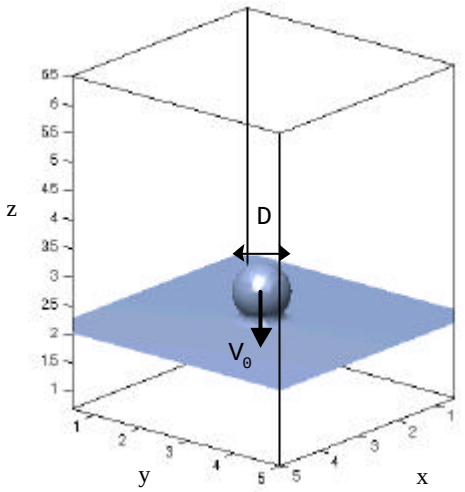

図-1：計算初期条件(直径1の水滴を速度1で静水面に落下させる.)及び計算領域

ここで上式右辺第1項は水面における流体の粘性力の法線方向成分であり，3章に述べる方法で外挿済みである流体外流速を用いて計算する．右辺第2項は表面張力である．表面張力を求める際に必要となる曲率の算定法には様々な方法が提案されているが，ここではL-S関数を用いて次式により計算する．

$$k=\frac{\left\{\begin{array}{l}(f_{yy}+f_{zz})f_x^{\,2}+(f_{xx}+f_{zz})f_y^{\,2}+(f_{xx}+f_{yy})f_z^{\,2}\\ \qquad -2f_xf_yf_{xy}-2f_xf_zf_{xz}-2f_yf_zf_{yz}\end{array}\right\}}{\left(f_x^{\,2}+f_y^{\,2}+f_z^{\,2}\right)^{3/2}} \qquad (7)$$

今回設定した初期条件のように，水面の曲率が特異点となる場合，離散化された(7)式を用いるとその近傍で非現実的な曲率が計算され，水面において正しい圧力の境界条件が与えられない．本研究ではそれを回避する為，水面を含む1セル内のL-S関数を三次スプライン補間することにより水面における曲率を求めた．

3.　水面でゼロ接線応力条件を満足する流速の外挿

水面上のある点近傍の流速が次式で表せると仮定する．

$$\mathbf{u}_n=\mathbf{u}_s+\mathbf{A}\mathbf{X}_n, \qquad (8)$$

$$\mathbf{X}_n=\left[x'\ \ y'\ \ z'\ \ x'^2\ \ y'^2\ \ z'^2\ \ x'y'\ \ x'z'\ \ y'z'\right]$$

ここで$\mathbf{u}_n=(u_n\ v_n\ w_n)$は流体内の既知流速，$\mathbf{u}_s=(u_s\ v_s\ w_s)$は水面流速，$A=a_{ij}$ (i=1~3, j=1~9)は係数行列，x' y' z'はそれぞれ$\mathbf{u}_s$を求めたい点を原点とした時の$\mathbf{u}_n$定義点の座標であり(図-2参照)，それらを用いて$\mathbf{X}_n$($\mathbf{u}_n$，$\mathbf{u}_s$定義点の位置関係を表すベクトル)を求める．また，(4)式をnts座標系からxyz座標系に変換すると次式が得られる．

$$2\left(\frac{\partial u_s}{\partial x}n_x^{\,2}+\frac{\partial v_s}{\partial y}n_y^{\,2}+\frac{\partial w_s}{\partial z}n_z^{\,2}\right)+\left(\frac{\partial u_s}{\partial y}+\frac{\partial v_s}{\partial x}\right)(n_yt_x+n_xt_y)$$

$$+\left(\frac{\partial u_s}{\partial z}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)(n_zt_x+n_xt_z)+\left(\frac{\partial v_s}{\partial z}+\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)(n_zt_y+n_yt_z)=0. \qquad (4)'$$

ここでn_i, t_i, s_iはそれぞれ単位法線/接線ベクトルのi方向成分である．(8)式の$\mathbf{u}_s$をx～z方向に偏微分したものを(4)'式に代入する事によって得られる条件式に対して最適なAを，その近傍27点(Aの要素数=9×3点)以上の既知流速のx～z方向偏微分値から最小二乗法により求める．求めたAを(8)式に代入し水面近傍の既知流速から$\mathbf{u}_s$を計算し，更に同式を用いて流体外に流速を外挿する事によって水面におけるゼロ接線応力条件を満足させた．

上述の方法は，水面における境界条件を満足させると同時に，移流計算時に必要となる外挿流速を合理的に設定するものである．

4.　計算条件

計算条件については表-1にまとめる．初期条件として図-1に示すような直径Dの水滴を水深h_w(=2D)の静水面上に設定し，鉛直下向き落下速度V_0を与え着水させる．底面ではnon-slip条件を設定し，側壁には周期境界条件を与えた．水面は自由水面とし，そこでの境界条件はそれぞれ，case1では最も単純化されたゼロゲージ圧条件のみを与え，case2では式(4)，(5)を厳密に満足さた．Reynolds数及びFroude数の異なるケースでこれらの差異を比較した．動粘性係数，表面張力係数，流体密度は水の値を用いた．

表-1：計算条件

	水滴直径 D	落下初速度 V_0	自由水面境界条件	Re数 (×10⁴)	Fr数
Case1	1.0 0.1[m]	1.0 1.0[m/s]	$P_{surface}=0$	7.63	1.01
Case2	1.0 0.1[m]	1.0 1.0[m/s]	厳密に満足	7.63	1.01

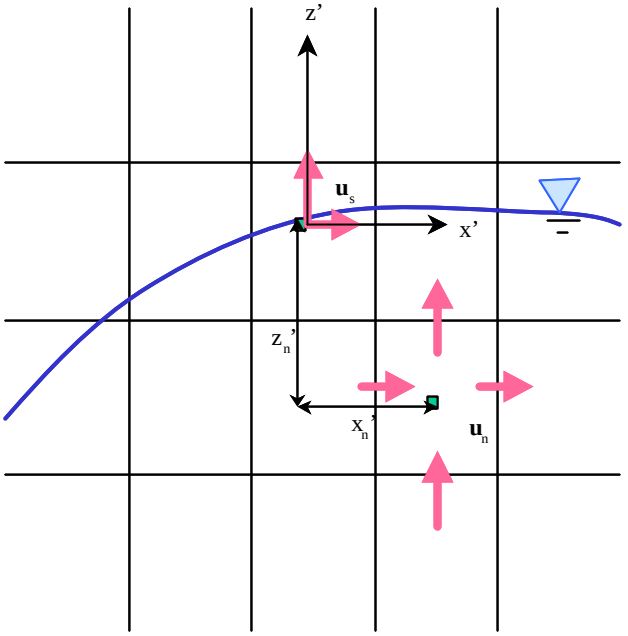

図-2：水面流速$\mathbf{u}_s$と流体内の既知流速$\mathbf{u}_n$

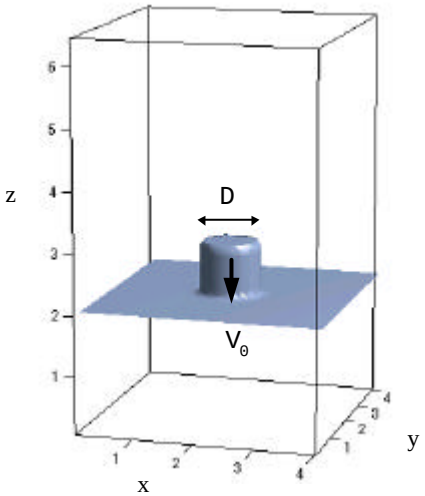

図-3：本研究で提案したゼロ接線応力条件を満足させる流速外挿法を検証する為に行った計算の初期条件．

また，上記の計算ケースとは別に，円柱ジェット(図-3参照)落下時の自由水面における接線方向境界条件(4式)を本研究で提案する方法を用い厳密に与える事によって，水面における(4)式の誤差にどれ程の違いが表れるかについて，現在多くの研究で採用されている水面近傍流体内流速の平均値を外挿する方法と比較する事によって検討を行う．

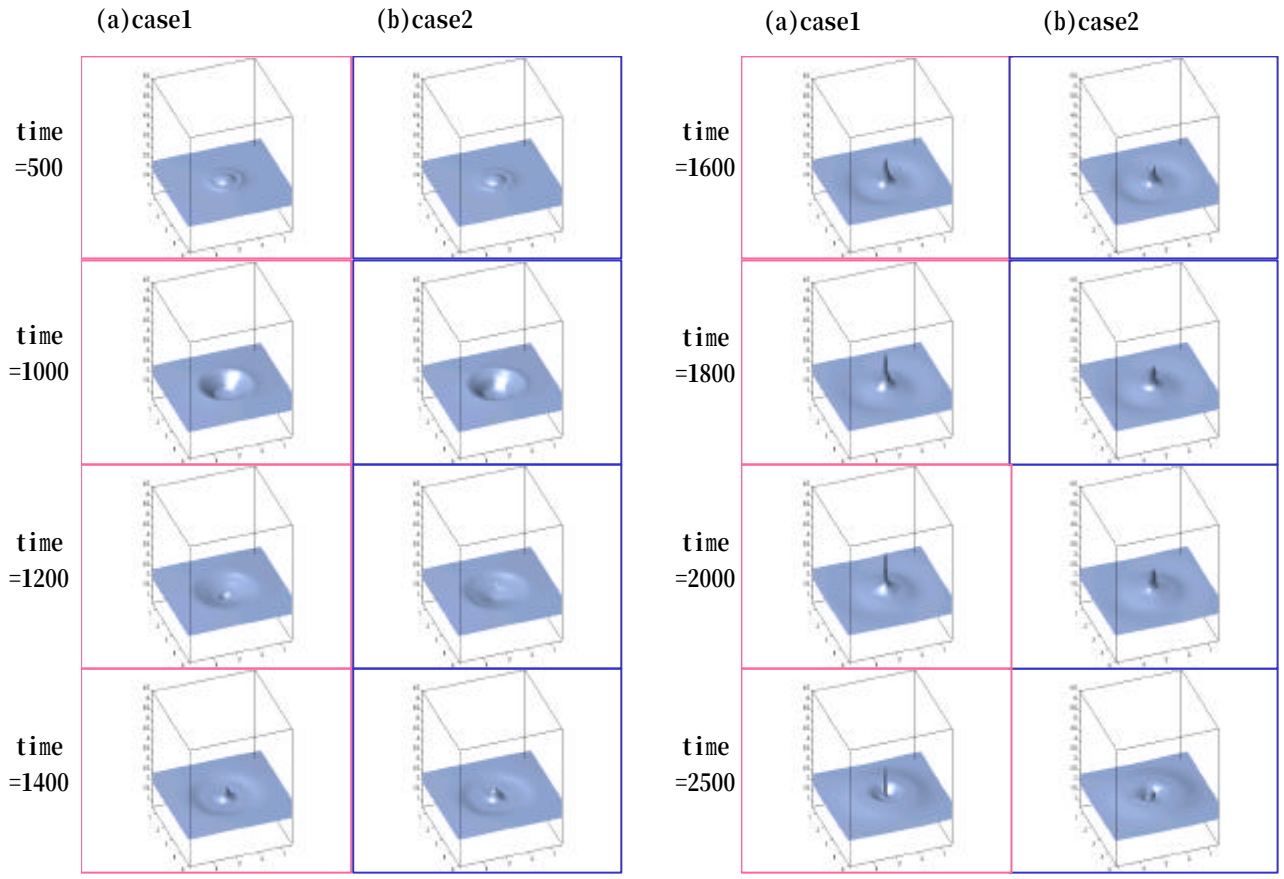

図-4(a)(b)：case1，case2に対する液滴着水後の水面形

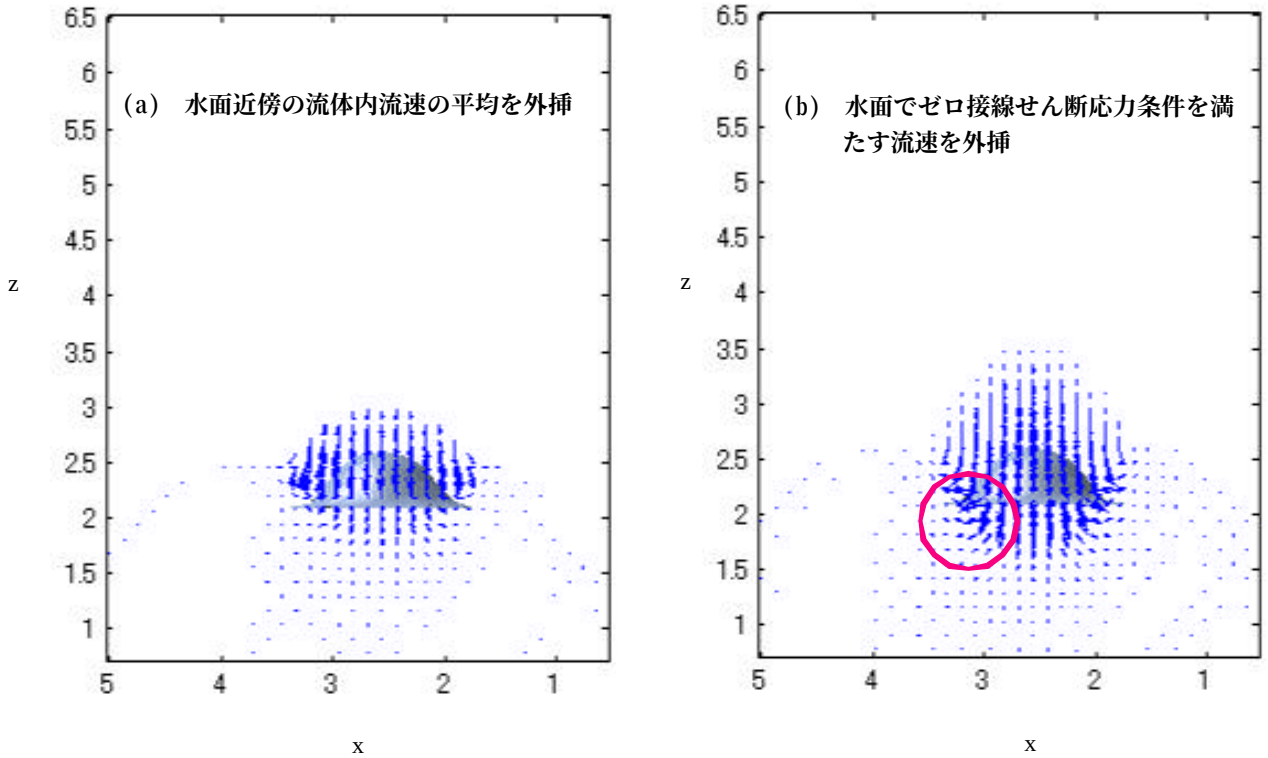

図-5：time=400×(D/V_0)での水面形と流体内外の流速分布

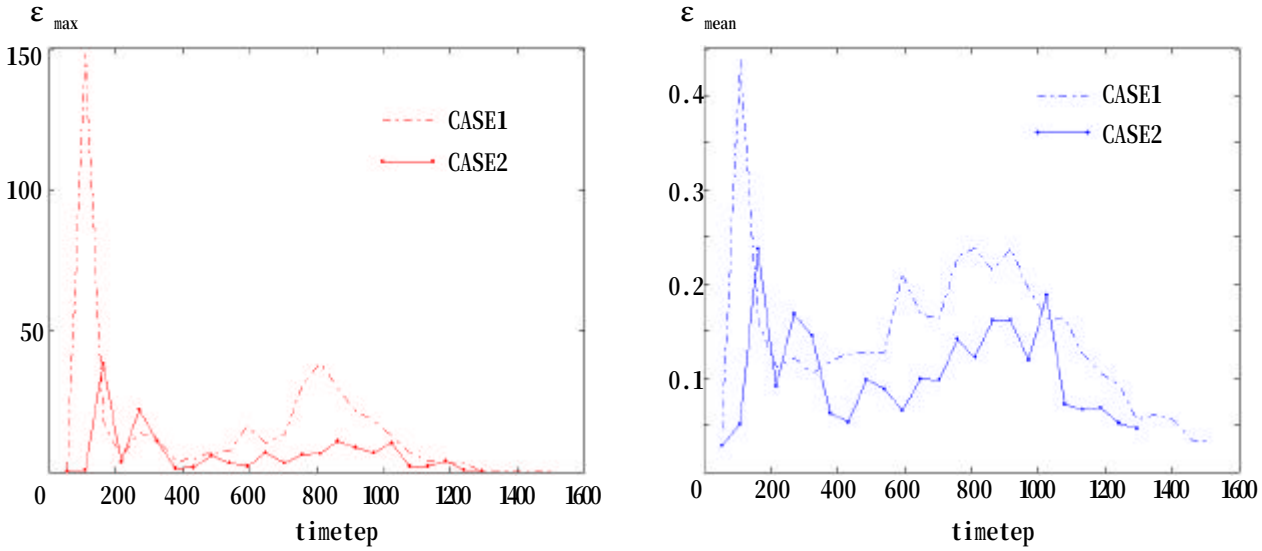

図-6：　(a)水面における(4)式の残差εの最大値ε_{max}(左）と
(b)自乗平均値ε_{mean}(右)の時系列

5.　計算結果と考察

図-4(a),(b)はそれぞれ，case1，2の計算結果で，各timestepにおけるL-S関数φ=0の等値面，つまり水面を表している．水面の境界条件を全て満足させたcase2の方が運動の進行が早く，同じtimestepの水面形であるにも関わらず，キャビティーの径がcase2の方が大きくなっている(time=1000～1200)．これは，水面において表面張力が復元力として加わった為であると考えられる．一方水滴落下後に発生するジェットの跳ね上がり方はcase2に若干の遅れとジェット先端部が丸みを帯びているのが確認できる．これは特にジェット先端の曲率が増大した水面において局所的に大きな表面張力が働いた為であると考えられる．

次に水面におけるゼロ接線応力条件適用の有無による流速場の変化について見る．図-5(a),(b)は共に(5)式の自由水面法線方向境界条件を満足しており，接線方向条件を(a)では考慮せずに，(b)では水面において(4)式を満足するように流速の外挿を行った場合の水面形状と流速場を表したものである．それぞれの流体内流速に着目してみると，(a)ではほぼ一様に鉛直方向流速のみが分布している一方，(b)では水滴周囲部において外向きの水平流速，言い換えると回転流速の発生が見受けられる(丸印)．厳密なる境界条件の適用により水面直下の渦構造が変化する可能性が示された．

次に3章で提案した境界条件設定法の有効性について検討を行う．水面上の各点における(4)式の残差εを次式の様に定義する．

$$e = m\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial n}\right). \qquad (9)$$

ここでεは水面に対して接線方向にかかる本来ならゼロとなるべき粘性力の大きさを表す．図-6(a),(b)はあるtimestepにおけるεの最大値及び自乗平均値を時系列で示したものである．一部例外があるものの，概ねcase2(水面においてゼロ接線応力条件を満足するように流体外に流速を外挿したケース)のεがcase1(近傍の流体内流速の平均値を流体外に外挿したケース)の60～80%程度まで低下した．また，最も水面形の変動が大きい計算初期段階において見られたcase1のε極大値が，本研究で提案した流速外挿法を用いる事により大幅に改善されている．

6.　結論と課題

本研究では数値計算において自由水面境界条件を厳密に満足させる方法を提案すると共に，合理的な外挿流速計算法の開発を行った．各計算ケースで得られた結果の比較を行い，水面において設定する境界条件の違いにより水面形状及びその直下に形成される渦構造に変化が現れる事が示された．それはつまり水面の変動スケールが小規模で水面において表面張力が支配的となる流れ場の数値解析を行う場合，若しくは水面形や水面直下の渦構造が複雑に変化する流れ場において水面近傍で生成される乱れを正確に見積もりたい場合には，水面における境界条件を厳密に満足させる必要がある事を意味する．

参考文献

1)Longuet-Higgins,1992.Capillary rollers and bores.J.Fluid Mech.240,658-679
2)Sarpkaya,1996.Vorticity,free-surface,and surfactants.Ann.Rev.Fluid Mech.28,88-128
3)Brocchini & Peregrine,2001.The dynamics of strong turbulence at free surfaces.Part 1.Description.J.Fluid Mech.449,225-254
4)Sethian & Smereka,2003. Level set methods for fluid interfaces.Ann.Rev.Fluid Mech.35,341-372
5)J.A.Sethian,1996.Level set methods and fast marching methods.Cambridge university press
6)猿渡亜由未，渡部靖憲，佐伯浩:デカルト座標系における自由水面力学的境界条件の強制アルゴリズム，土木学会北海道支部論文集，No.61，Ⅱ-43，2004.