Ⅱ－１４　　　　平成17年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第62号

直交選点有限要素法によるナビエ・ストークス方程式の数値解析に関する基礎的研究

Basic Study on Numerical Analysis of Navier-Stokes Equation by Orthogonal Collocation Finite Element Method

函館工業高等専門学校環境都市工学科教授　　正　員　大久保孝樹　(Takaki Okubo)
函館工業高等専門学校環境システム工学専攻　○学生員　蛯子翼　(Tsubasa Ebiko)

１．はじめに

従来の数値計算には、差分法・有限要素法・選点法など、様々な手法がある。差分法では、境界条件の設定が複雑であること、高精度差分になれば計算が複雑になること、一般の選点法では、選点の位置で正解を得ることは困難などの不利な点がある。そこで、著者らは直交選点有限要素法を確立し、Stokes 方程式などに応用してきた。本研究では直交選点有限要素法による Navier-Stokes 方程式の数値解析の確立を目指す。そのために直交選点有限要素法による定式化を行い、2 次元水路モデルでの任意の境界形状における流速ベクトル分布を求めることにする。本研究では計算例として、定常の Navier-Stokes 方程式の解析を行う。

直交選点有限要素法とは、直交選点法を有限要素法に応用し、2 次元空間の離散化手法としたものである。直交選点有限要素法の利点としては、定式化・高精度である高次の計算が容易であること、直交選点において正解に近い値が得られることなどが挙げられる。直交選点有限要素法は差分法とは違い、厳密な直接解法である。このプログラムは境界条件を変えるだけで他の条件に応用でき、差分法のプログラムに比べ汎用性がある。

２．Navier-Stokes 方程式について

Navier-Stokes 方程式について一般的な式を以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon_f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial P}{\partial y}+\upsilon_f\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

要素連続の境界条件

境界に立てた法線の方向余弦をl、mとすると、境界上で与えられたx、y方向表面化の値S_x、S_yは以下のようになる。

$$S_x=\tau_n l+\tau_s m=\tau_{xx} l+\tau_{yx} m=\hat{S}_x \qquad (2)$$
$$S_y=\tau_s l+\tau_n m=\tau_{xy} l+\tau_{yy} m=\hat{S}_y$$

さらに、P_fで基準化した応力をτ_{xx}、τ_{xy}、τ_{yy}とすると、以下のように表される。

$$\tau_{xx}=-\frac{P}{\rho_f}+2\upsilon\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{xy}=\upsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \tau_{yy}=-\frac{P}{\rho_f}+2\upsilon\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

この境界条件では、流速の一階微分による表示によって連続性を保っているが、圧力に関しては、一階の微分による連続性は保たれていない。

圧力に関して、ある面に関する圧力勾配が連続するとし、次式の境界条件を考える。

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x}l+\frac{\partial P}{\partial y}m\right]^1=\left[\frac{\partial P}{\partial x}l+\frac{\partial P}{\partial y}m\right]^2 \qquad (4)$$

以上をまとめ、要素連続の境界条件を考えると、以下のようになる。

$$B_1=\left[\left(-\frac{P}{\rho}+2\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)l+\upsilon\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)m\right]^1-\left[\left(-\frac{P}{\rho}+2\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)l+\upsilon\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)m\right]^2=0$$
$$B_2=\left[\upsilon\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)l+\left(-\frac{P}{\rho}+2\upsilon\frac{\partial v}{\partial y}\right)m\right]^1-\left[\upsilon\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)l+\left(-\frac{P}{\rho}+2\upsilon\frac{\partial v}{\partial y}\right)m\right]^2=0$$
$$B_3=\left[\frac{\partial P}{\partial x}l+\frac{\partial P}{\partial y}m\right]^1-\left[\frac{\partial P}{\partial x}l+\frac{\partial P}{\partial y}m\right]^2=0 \qquad (5)$$

無次元化

無次元量 $R=\dfrac{U_0 H}{\upsilon}$ とおくと、無次元化され、以下のような式が求まる。

連続の式と運動方程式の無次元化

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (6)$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

境界条件の無次元化

$$\left(-P+\frac{2}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\right)l+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)m=\hat{S}_x$$
$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)l+\left(-P+\frac{2}{R}\frac{\partial v}{\partial y}\right)m=\hat{S}_y \qquad (7)$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}l+\frac{\partial P}{\partial y}m=S_p$$

３．直交選点法による定式化

選点法は重みつき残差法一種でのあり、多項式によって作られた微分方程式の残差を選点で０となるようにする。直交選点法は、その選点の位置を直交多項式の根と

している。

いま、Z の乗べき項で表される直交多項式を考え、補間関数(試行関数、形状関数)を次式のように表す。なお、Z が[０，１]区間で補間されるものとする。

$$y(z) = b + cz + z(z-1)\sum_{i=1}^{N} a_i P_{i-1}(z) \qquad (8)$$

ここで、多項式 Pi(Z)は、次式によって定義される。

$$\int_0^1 w(z)P_n(z)P_m(z)dz = 0 \quad n \neq m \quad n,m = 0,1,2,\cdots\cdots,N-1 \qquad (9)$$

直交選点法として，N個の選点の位置は$P_N(z)$の式によって求めるが，この式はW(Z)=１であるルジャンドルの直交多項式として次式によって表される。

$$P_N(z) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{n}{r}\binom{n+r}{r} z^r \qquad (10)$$

上式より、Z を求めるとよい。

(8)式は、次式で表される多項式と同等に表される。

$$y(z) = \sum_{i=1}^{N+2} d_i z^{i-1} \qquad (11)$$

以上のことを踏まえ、座標 x-y を用い、流速 u、v、圧力 P を直交関数で表現すると、2 次元の直交多項式は１次元の直交多項式の積として表される。以下、流速 u のみに関して表示するが、v、P に関しても同様の表示となる。

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n_1+2} a_i x^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n_2+2} b_j y^{j-1}\right) \qquad (12)$$

上式は、次式と同等である。

$$u = \sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2} d_{ij} x^{i-1} y^{j-1} \qquad (13)$$

上式の直交選点(ｌｍ点)での第１微分と第２微分を求める。

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_l y_m} &= \sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2}(i-1)x^{i-2}y^{j-1}d_{ij} \\
\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_l y_m} &= \sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2}(j-1)x^{i-1}y^{j-2}d_{ij} \\
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_l y_m} &= \sum_{i=2}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2}(i-1)(i-2)x^{i-3}y^{j-1}d_{ij} \qquad (14) \\
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x_l y_m} &= \sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=2}^{n_2+2}(j-1)(j-2)x^{i-1}y^{j-3}d_{ij} \\
\left.\frac{\partial u}{\partial x \partial y}\right|_{x_l y_m} &= \sum_{i=1}^{n_1+2}\sum_{j=1}^{n_2+2}(i-1)(j-1)x^{i-2}y^{j-2}d_{ij}
\end{aligned}$$

ベクトルと行列で表すと、次式のようになる。

$$\overline{u} = \overline{\overline{Q}}\,\overline{d} \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \overline{\overline{D_x}}\,\overline{d}, \qquad \overline{\frac{\partial u}{\partial y}} = \overline{\overline{D_y}}\,\overline{d} \\
&\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \overline{\overline{E_x}}\,\overline{d}, \qquad \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \overline{\overline{E_y}}\,\overline{d} \\
&\overline{\frac{\partial u}{\partial x \partial y}} = \overline{\overline{F_{xy}}}\,\overline{d}
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&Q_{lm} = x_l^{i-1} y_m^{j-1} && n = (n_1+2)(n_2+2) \\
&D_{x\,l\,m} = (i-1)x_l^{i-2} y_m^{j-1} && l = 1,2,\cdots\cdots,n \\
&D_{y\,l\,m} = (j-1)x_l^{i-1} y_m^{j-2} && m = 1,2,\cdots\cdots,n \\
&E_{x\,l\,m} = (i-1)(i-2)x_l^{i-3} y_m^{j-1} && i = 1,2,\cdots\cdots,(n_1+2) \\
&E_{y\,l\,m} = (j-1)(j-2)x_l^{i-1} y_m^{j-3} && j = 1,2,\cdots\cdots,(n_2+2) \\
&F_{xy\,l\,m} = (i-1)(j-1)x_l^{i-2} y_m^{j-2} && (17)
\end{aligned}$$

(15)式より $\overline{\overline{Q}}$ の逆行列を用いると直交多項式の係数 $\overline{d}$ は次式によって表される。

$$\overline{d} = \overline{\overline{Q}}^{-1}\,\overline{u} \qquad (18)$$

(16)式に(18)式を代入すると

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} &= \overline{\overline{D_x Q}}^{-1}\,\overline{u} = \overline{\overline{A_x}}\,\overline{u} \\
\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} &= \overline{\overline{D_y Q}}^{-1}\,\overline{u} = \overline{\overline{A_y}}\,\overline{u} \\
\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} &= \overline{\overline{E_x Q}}^{-1}\,\overline{u} = \overline{\overline{B_x}}\,\overline{u} \qquad (19) \\
\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} &= \overline{\overline{E_y Q}}^{-1}\,\overline{u} = \overline{\overline{B_y}}\,\overline{u} \\
\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}} &= \overline{\overline{F_{xy} Q}}^{-1}\,\overline{u} = \overline{\overline{C_{xy}}}\,\overline{u}
\end{aligned}$$

と表示される。A、B、C は微分作用素行列として表示される。

N を内部選点数として、微分作用素行列 A、B の次元 ian は次式で表される。

$$ian = (N+2)*(N+2)$$

直交選点法によって Navier-Stokes 方程式を定式化すると、それぞれ連続の式・運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{ian} A_{xij}u_j + \sum_{j=1}^{ian} A_{yij}v_j = 0 \\
&u_i\sum_{j=1}^{ian} A_{xij} + v_i\sum_{j=1}^{ian} A_{yij}u_j = -\sum_{j=1}^{ian} A_{xij}P_j + \frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian} B_{xij}u_j + \sum_{j=1}^{ian} B_{yij}u_j\right) \qquad (20) \\
&u_i\sum_{j=1}^{ian} A_{xij}v_j + v_i\sum_{j=1}^{ian} A_{yij}v_j = -\sum_{j=1}^{ian} A_{yij}P_j + \frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian} B_{xij}v_j + \sum_{j=1}^{ian} B_{yij}v_j\right)
\end{aligned}$$

要素間の境界条件を定式化すると以下の式になる。

$$\begin{aligned}
&\left[\left(-P_i + \frac{2}{R}\sum_{j=1}^{ian} A_{xij}u_j\right)l + \frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian} A_{yij}u_j + \sum_{j=1}^{ian} A_{xij}v_j\right)m\right] \\
&= \left[\left(-P_i + \frac{2}{R}\sum_{j=1}^{ian} A_{xij}u_j\right)l + \frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian} A_{yij}u_j + \sum_{j=1}^{ian} A_{xij}v_j\right)m\right]^2 \\
&\left[\frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian} A_{yij}u_j + \sum_{j=1}^{ian} A_{xij}v_j\right)l + \left(-P_i + \frac{2}{R}\sum_{j=1}^{ian} A_{yij}v_j\right)m\right]^1 \qquad (21) \\
&= \left[\frac{1}{R}\left(\sum_{j=1}^{ian} A_{yij}u_j + \sum_{j=1}^{ian} A_{xij}v_j\right)l + \left(-P_i + \frac{2}{R}\sum_{j=1}^{ian} A_{yij}V_j\right)m\right]^2 \\
&\left[\sum_{j=1}^{ian} A_{xij}P_j l + \sum_{j=1}^{ian} A_{yij}P_j m\right]^1 = \left[\sum_{j=1}^{ian} A_{xij}P_j l + \sum_{j=1}^{ian} A_{yij}P_j m\right]^2
\end{aligned}$$

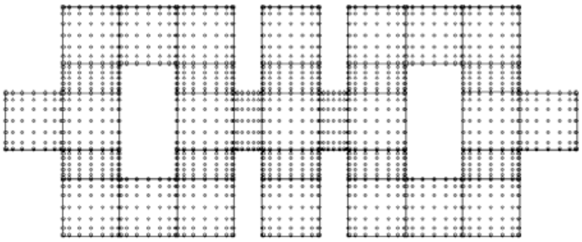

図１　ケース１　(要素数 33、内部選点数７×7)

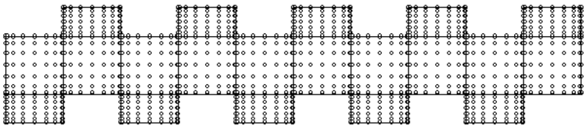

図２　ケース２　(要素数 20、内部選点数 7×7)

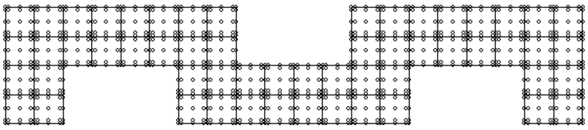

図３　ケース３　(要素数 56、内部選点数 3×3)

４．有限要素化

直交選点法を有限要素化するためには、要素境界上の外部選点を重ね合わせなければならない。この重ね合わせは、式(21)の要素境界条件の式を満足するように行われる。但し、偶角部の 4 点では未知数より条件数が多くなり不具合が生じるが、著者らの経験から重ね合わせはいずれか一の条件のみを満足すれば、全てを満足することがわかっている。しかし、このことは数学的に証明しなければならない。

５．非線形方程式を解くための手順

Navier-Stokes 方程式の定常状態の方程式を解くことは、非線形方程式を解くことに帰着する。直交選点有限要素法で定式化した方程式を Newton-Raphson 法で解くために、Navier-Stokes の連続の式、運動の式と境界要素条件式(20)(21)の Jacobian 行列を作成しなければならない。この Jacobian 行列を利用し、非線形方程式の収束計算を行った。但し、初期値として、Stokes 方程式の線形解を入力して行った結果、早い収束計算が行われたことを記しておく。

６．モデルの要素・選点配置について

要素-選点の配置関係は局所選点番号として要素左下を 1 として反時計回りに 1～4 までとし、次に境界線上の外部選点を反時計回りに番号付けし、最後に内部選点を x 方向順に番号付けをした。

この要素-選点番号配置は、自動的に配置するプログラムを開発し、任意の境界条件でも配置できるようにした。さらに選点(節点)を順番に番号付けできるように、再配置プログラムの開発を行った。このプログラムにより、図 1～図 3 に示す 3 ケース、それぞれ[要素数 33、内部選点数 7×7]、[要素数 20、内部選点数 7×7]、[要素数 56、内部選点数 3×3]の水路モデルを作成した。この 3 ケースのモデルにおいて、定常の Navier-Stokes の流体挙動解析を直交選点有限要素法を用いて検討を行った。

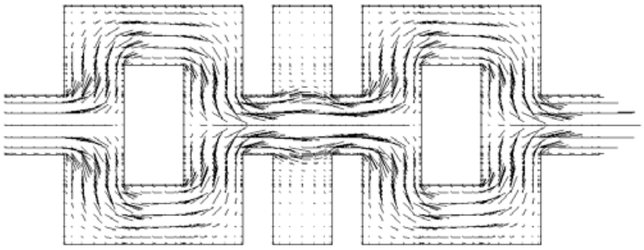

図４　ケース１の流速ベクトル図

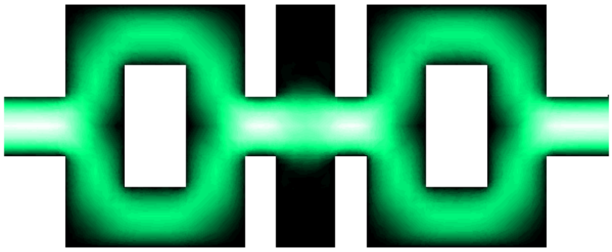

図５　ケース１の流速分布図

図６　ケース１の圧力分布図

図７　ケース１の渦度分布図

７．計算結果と考察

今回、レイノルズ数 R=1000 として以下のケースの場合の直交選点有限要素法による数値計算を行った。図 4 はケース１の場合の流速ベクトル図である。直交選点法は、内部選点では正解に近い値が得られることが知られており、また、内部選点を 7 と高次としているので外部境界上の外部選点付近に内部選点がごく近傍にあり外部

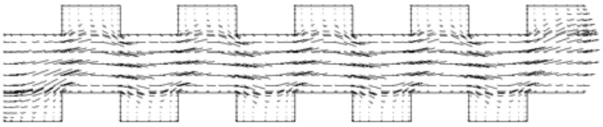

図 8　ケース 2 の流速ベクトル図

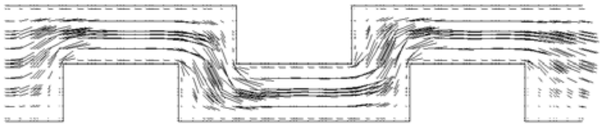

図 12　ケース 3 の流速ベクトル図

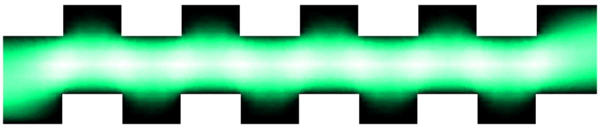

図 9　ケース 2 の流速分布図

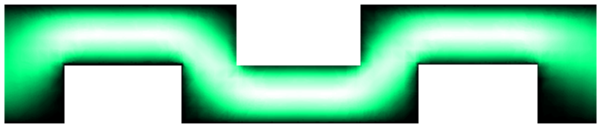

図 13　ケース 3 の流速分布図

図 10　ケース 2 の圧力分布図

図 14　ケース 3 の圧力分布図

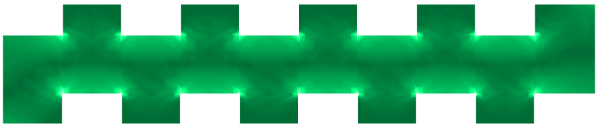

図 11　ケース 2 の渦度分布図

図 15　ケース 3 の渦度分布図

選点でも良好な値が得られるものと考えられる。

他の数値計算ソフトとの整合性を確認していないので、比較はできないが、妥当な値が得られているものと考えられる。

図 5 は、ケース 1 の流速分布図で、図 6 は圧力分布図である。図 7 は渦度の分布図であり、渦度は、u、v の偏微分で表され、直交選点法では正解に近い値が得られないことが知られているが、この渦度の分布図では妥当な結果が得られており、偶角部で渦度が大きくなっている様子が見られている。しかし、直交選点法に関しても、差分と同じように、7 次(差分ではこのような高次は無いが)の高次を用いると微分も正確な値になることが予想される。

図 8 はケース 2 の流速ベクトル図で、よどみと蛇行の様子がわかる。図 9 は流速分布図で、図 10 は圧力分布図であり、図 11 は渦度の分布図である。ケース 1 と同じ傾向の考察をすることができる。

図 12 は、ケース 3 の流速ベクトル図で、内部選点数 3×3 の場合で各要素にした場合の結果であるが、妥当な値が得られている。図 13 は流速分布図、図 14 は圧力分布図であり、図 15 は渦度の分布図であるが、妥当な値が得られている。このことから、少要素-高次選点、多要素-低次選点の場合も同程度の解析能力があることがわかる。

8．まとめ

定常の Navier-Stokes 方程式を厳密な直接解法である直交選点有限要素法で数値解析することによって、任意の矩形水路における流体挙動の妥当な結果を得ることができた。

9．今後の課題

今後は、非定常の Navier-Stokes 方程式を、時間においても直交選点有限要素法による離散化手法を用いて、数値解析する考えである。

参考文献

B.A.フィンレイソン著、鷲津久一郎・山本善之・川合忠彦共訳　The Method Weighted Residuals and Variational Principles　「重みつき残差法と変分原理および流体力学・伝染・物質移動への影響」　培風館