Ｉ－４９　　平成17年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第62号

移動要素法の薄板振動問題への適用

Application of moving element method to vibration problems of thin plate

北海道大学大学院工学研究科　学生員　○三倉寛明　（Hiroaki Mikura）
北海道大学大学院工学研究科　正員　　蟹江俊仁　（Shunji Kanie）
北海道大学大学院工学研究科　フェロー　三上　隆　（Takashi Mikami）

1.　はじめに

有限長の梁および板の走行荷重問題は FEM など多々取り扱われており, 無限に長い梁の走行荷重問題についても移動座標系を導入して特性方程式から厳密に解くものや Fourier Transform Method(FTM)を適用した解法がいくつか報告されている [1]．しかし FTM には荷重速度が一定の場合にしか適用できないという制約があり, また従来の時系列 FEM では荷重項の更新や荷重が解析領域を通過するなどの諸問題が残されていた．これを改善する手法として C.G.Koh[2]らは移動座標系の導入と FEM による定式化を組み合わせた Moving Element Method(MEM：移動要素法)を提案し，無限長を模擬した Euler 梁の周波数領域及び時系列解析への適用を示している．本研究は MEM の二次元問題への拡張を目的とし, 無限長を模擬した薄板の支配方程式を移動座標系と有限帯板法を組み合わせて一次元問題に置き換え，薄板振動問題(二次元問題)への MEM の適用と定式化の妥当性について検証するものである．

2.　有限帯板 MEM の定式化

MEM の一次元問題への適用が示されていることから，まず二次元薄板の支配方程式に対して短辺方向を級数展開し, 一次元問題に置き換えた支配方程式に MEM を適用する．解析モデルは Fig.1 に示す短辺単純支持無限長板とし，一定速度 V , 振動数 ω の周期変動荷重を走行させる．

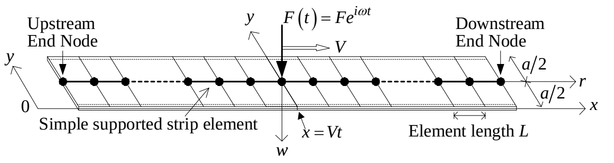


Fig. 1　Analytical model

x-y 平面上を移動する周期変動荷重 $q(x,y,t)$ による非減衰薄板振動方程式はたわみ w , 時間 t を用いて次式となる．

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]+\bar{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x,y,t) \tag{1}$$

ここに, D ：板の曲げ剛性, $\bar{m}$ ：単位面積あたりの質量

短辺方向は単純支持を仮定することから, 短辺方向には正弦級数でモード展開を行い一次元化する. 変位関数及び荷重項は $\lambda=\pi/a$ 及び Dirac delta δ を用いて次式で仮定する．

$$w_m(x,y,t)=X_m(x)\{\sin m\lambda y\}e^{i\omega t} \tag{2}$$

$$q_m(x,y,t)=q_m\delta(x-Vt)\{\sin m\lambda y\}e^{i\omega t} \tag{3}$$

ここに，Fourier 係数 q_m は載荷位置を $y=a/2$ とすると

$$q_m=\frac{2F}{a}\sin\frac{m\pi}{a} \tag{4}$$

次に，走行荷重位置を原点とする移動座標系 $r=x-Vt$ を導入すると，式(2),(3)は次のように書き換えられる．

$$w_m(r,y,t)=X_m(r)\{\sin m\lambda y\}e^{i\omega t} \tag{4}$$

$$q_m(r,y,t)=q_m\delta(r)\{\sin m\lambda y\}e^{i\omega t} \tag{5}$$

これを用いて支配方程式(1)を移動座標系 r に変換し，$\{\sin m\lambda y\}e^{i\omega t}$ で除して整理すると，移動座標系の支配方程式は

$$D\left[\frac{d^4X_m}{dr^4}-2(m\lambda)^2\frac{d^2X_m}{dr^2}+(m\lambda)^4X_m(r)\right]+\bar{m}\left[V^2\frac{d^2X_m}{dr^2}-2i\omega V\frac{dX_m}{dr}-\omega^2X_m(r)\right]-q_m\delta(r)=0 \tag{6}$$

重み関数 $\delta X_m(r)$ を用いて式(6)を弱形式で表現すると

$$\int_0^r \delta X_m(r)\left[\begin{aligned}&D\left\{\frac{d^4X_m}{dr^4}-2(m\lambda)^2\frac{d^2X_m}{dr^2}+(m\lambda)^4X_m(r)\right\}\\&+\bar{m}\left\{V^2\frac{d^2X_m}{dr^2}-2i\omega V\frac{dX_m}{dr}-\omega^2X_m(r)\right\}+-q_m\delta(r)\end{aligned}\right]dr=0 \tag{7}$$

帯板要素の各節線には二自由度を与え，形状関数は Hermite 三次多項式 $\boldsymbol{\varphi}$ を用いて r 方向の変位を次式で仮定する．

$$X_m(r)=\{\phi(r)\}^{\mathrm{T}}\{X_m\} \tag{8}$$

$$\phi_1=\left(2r^3-3r^2L+L^3\right)/L^3 \qquad \phi_2=\left(r^3L-2r^2L^2+rL^3\right)/L^3$$
$$\phi_3=\left(-2r^3+3r^2L\right)/L^3 \qquad \phi_4=\left(r^3L-r^2L^2\right)/L^3 \tag{9}$$

式(7)に Galerkin 法を適用すると，周波数領域解析における剛性マトリクスが次式で誘導される．

$$[K_m]=[K_m]_{\mathrm{FEM}}+[K_m]_{\mathrm{MEM}} \tag{10}$$

$$[K_m]_{\mathrm{FEM}}=D\left\{\int_0^r\boldsymbol{\varphi}_{rr}\boldsymbol{\varphi}_{rr}^{\mathrm{T}}dr+2(m\lambda)^2\int_0^r\boldsymbol{\varphi}_r\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{T}}dr+(m\lambda)^4\int_0^r\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}dr\right\}-\omega^2\bar{m}\int_0^r\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}dr \tag{10.a}$$

$$[K_m]_{\mathrm{MEM}}=-V^2\bar{m}\int_0^r\boldsymbol{\varphi}_r\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{T}}dr-\{2i\omega V\bar{m}\}\int_0^r\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{T}}dr \tag{10.b}$$

ここに，$\boldsymbol{\varphi}_r,\boldsymbol{\varphi}_{rr}$ はそれぞれ r の一階・二階微分を表す．

荷重載荷点より十分遠方では変形が収束することから，荷重の影響範囲を事前に検討した上で有限長の解析領域を設定し，端点を近似的に $w=0,\ \partial w/\partial r=0$ として解析を行うものとする．また，荷重ベクトルは載荷点のみに次式で与える．

$$\{F_m\}=q_m\delta(r)\int_0^r\{\phi\}dr \tag{11}$$

ここで，式(10.a)は FEM による剛性マトリクスであり，MEM ではそれに式(10.b)の振動数･速度成分を含む項を加えた形で表現されていることがわかる．従って，静的な解析では FEM と MEM は同一の解を与えることになる．

MEM の最大の利点は，走行荷重を原点とする移動座標

系を導入することで速度の影響を剛性マトリクスの中に取り入れた剛性方程式に帰着させて解析が行える点にある．本報では周波数領域での定式化を紹介するが，時系列解析に適用 [2]すれば FEM の時系列解析で問題となるような載荷位置の更新や荷重が解析領域を通過するといった諸問題は解決され，速度や振動数の時間的変化や剛性の空間的変化にも各時刻での剛性マトリクスを更新すること適用が可能となる．薄板振動問題の時系列解析についても今後の課題として進めていく．

3.　FTM による定式化

MEM の定式化の妥当性を比較検証するため，FTM による解を求める．変位及び荷重の仮定は MEM と同様に一方向を正弦級数展開し，移動座標系に置き換えた式(6)の支配方程式について解くものとする．

$X_m(r)$ の Fourier 変換形は次式で与えられる．

$$\hat{X}_m(s)=\int_{-\infty}^{\infty}X_m(r)e^{-irs}dr \tag{12}$$

式(6)に対して Fourier 変換を行い， $\hat{X}_m(s)$ について整理し次式を導く．

$$\hat{X}_m(s)=\frac{q_m}{Ds^4+\left\{2D(m\lambda)^2-\bar{m}V^2\right\}s^2+2\bar{m}\omega Vs+D(m\lambda)^4-\bar{m}\omega^2} \tag{13}$$

式(13)の分母の四次式の複素根を s_j とし，Heaviside 展開を適用すると， $\hat{X}_m(s)$ は次式で書き換えられる．

$$\hat{X}_m(s)=\frac{q_m}{D}\sum_{j=1}^{4}A^*{}_j\left(s-s_j\right)^{-1} \tag{14}$$

$$A^*{}_j=\prod_{k=1,k\neq j}^{4}\left(s_j-s_k\right)^{-1} \tag{15}$$

ここで， s_j が実根を持たない条件下で式(14)に Fourier 逆変換を行うと，次式を得る．

$$X_m(r)=\begin{cases}\dfrac{q_m}{D}\displaystyle\sum_{j=1}^{4}A_j^{*}ie^{is_j r}H(r) & \text{if } \mathrm{rimag}(s_j)>0\\ -\dfrac{q_m}{D}\displaystyle\sum_{j=1}^{4}A_j^{*}ie^{is_j r}H(-r) & \text{if } \mathrm{rimag}(s_j)<0\end{cases} \tag{16}$$

ここに， H は Heaviside 関数である．

s_j が実根を持たないという条件は速度及び振動数に限界値が存在することを示している．実根を持つ場合は振動解の性状が変わるため別途検討が必要となるため，本報では s_j が複素根の場合を例に比較検討することとした．

4.　MEM と FTM による解の比較

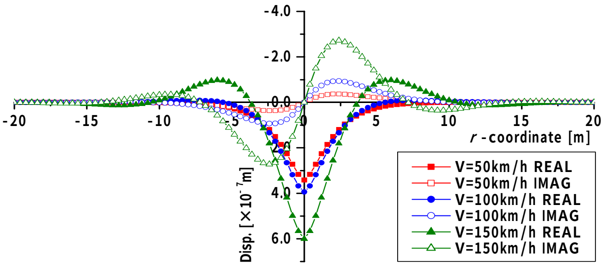
これまで，単純支持無限長板の周期変動走行荷重問題について MEM および FTM で定式化を行った．続いて Table1 に示すモデルを例に，両者の解の比較を行う．解析領域は荷重変形の影響を無視できる程度で荷重前後 20m に設定し，帯板要素を 100 要素，級数項は事前に解の収束性を検討して 3 項まで採用し，走行速度 50，100，150km/h を例に解析を行った．

Table1　Parameters for model plate

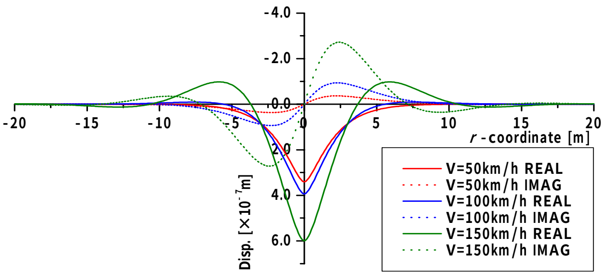
Young’s modulus E	200 GPa	Thickness h	0.03 m
Poisson’s ratio　ν	0.3	Width a	2.0 m
Density　ρ	7800 kg/m^3	Load F	1.0 N
ω	100 rad/s	Element L	0.4 m

Fig.1 は MEM 及び FTM による短辺単純支持無限長板の短辺方向中央部($y=a/2$)における変形を実部・虚部別に図示したものである．Fig.1 より， MEM の解は位相関係も含めて良好な解を得ていることが確認できる．

先にも示したように FTM には速度及び振動数の限界があり，これは MEM についても同様であることを確認しているが，限界速度・限界振動数以下の範囲内であれば有限帯板法を取り入れた MEM による薄板振動問題の定式化は妥当であると考えられる．



a)　MEM の解



b)　FTM の解

Fig.1　振動走行荷重による $y=a/2$ の変形図

5.　MEM の適用可能性と今後の展開

本報では二次元薄板の支配方程式に有限帯板法を適用して一次元化し，移動座標系を導入した MEM の定式化について示した．また，FTM との比較により二次元 MEM による解は位相関係も含め良好な結果を得られることが確認でき，本定式化の妥当性が確かめられた．

MEM の適用は，短辺に対して板長の長い構造物に対する走行荷重解析に有効であり，例えば二主桁橋の連続床版，鉄道の軌道スラブ，連続浮体橋といった従来の FEM では難しかった連続構造物等が挙げられる．またこれらの構造物の周波数領域における簡便な動的解析法としてだけではなく，時系列解析と組み合わせることで荷重が強度や走行速度を変化させながら移動する問題を効率的に解くなどの応用が期待できることから，今後は時系列解析への展開を進めていく予定である．

参考文献

1)L.Andersen et al., Finite element modeling of infinite Euler beams on Kelvin foundations exposed to moving loads in convected co-ordinates, *J. Sound and Vibration*, 2001, p.587-604

2)C.G.Koh et al., Moving element method for train-track dynamics, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 2003, p.549-567

2) 青木ら，軌道面状の不陸による走行荷重変動が鉄道軌道 RC 版に与える影響,土木学会北海道支部論文報告集,2005,Vol.61,I-38