修正 B-spline 関数を用いた Euler はりの自由振動解析

Application of the Ritz method with modified B-spline function to free vibration analysis of Euler beams

北海道大学大学院工学研究科　○学生員　名木野晴暢（Harunobu Nagino）
北海道大学大学院工学研究科　フェロー　三上　隆　（Takashi Mikami）
大同工業大学都市環境デザイン学科　正員　水澤　富作（Tomisaku Mizusawa）

1. まえがき

エネルギー変分原理に基づく Ritz 法は，定式化が容易である，計算負荷が小さい，という利点を有しており，偏微分方程式を近似的に解く一手法として古くから幅広い分野で用いられている．自由振動問題では，Ritz 法により得られる近似解は真の解に対して上界値であり，近似解の精度は採用する試行関数(許容関数)に大きく依存する．また，試行関数は基本境界条件(幾何学的境界条件)を満足していなければならない．したがって，Ritz 法では，試行関数の選定および一般的な境界条件の取り扱い方法が重要になってくる．

既往の研究では，Ritz 法の試行関数に全体関数で表される多項式を用いた報告が非常に多い．例えば，成田[1]はべき級数を，Liew ら[2]は直交多項式を，Zhou ら[3]は Chebyshev 多項式を試行関数に用いている．これらは基本境界条件を満たさない任意の関数であるが，boundary index とか boundary function などと呼ばれる関数を用いて，基本境界条件を満足した許容関数を導いている．全体関数を試行関数に採用した場合，システムマトリックスは対称のフルマトリックスになる．また，解の精度を高めるためには，高次項まで採用する必要があり，解析次元が大きくなると桁落ちやマトリックスの悪条件など，数値計算上の問題点が生じると思われる．

一方で，区分多項式を試行関数に採用した Ritz 法に関する報告は非常に少ない．Kao[4]は Legendre 多項式から導かれる Hill 関数を，水澤ら[5]は B-spline 関数を試行関数に採用した Ritz 法を定式化している．ここで，Hill 関数および B-spline 関数は，境界条件をなんら満たさない任意の関数であるので，処罰法(仮想バネ法)を用いて数値的に基本境界条件の処理を行なっている．しかしながら，仮想バネを導入する際には，基本境界条件に対応するバネの大きさの決定方法が必ずしも明確ではない，高次振動解析ではバネの干渉効果が現われる，などの問題点が見られる．

ところで，boundary index や boundary function のような基本境界条件を満足するような全体関数と区分的多項式を組み合わせれば，基本境界条件を満たした区分的な許容関数を定式することが可能であると考えられるが，これについて検討した例は，著者らが知る限りではなされていない．

本論文では，B-spline 関数に全体関数で表される基本境界多項式を組み込み，基本境界条件を満足した区分的な許容関数を試行関数に採用した Ritz 法の定式化を試みる．本手法を，基本境界条件が変位および変位の１階微分で規定される Euler はりの自由振動問題に適用し，解の収束性や精度について検討を行なう．さらに，既に提案されている仮想バネ法を用いた Ritz 法および Lagrange 乗数法を用いた修正 Ritz 法と解の収束状態や解析精度について比較検討し，それぞれの特徴を整理することを目的としている．

2. 基本境界多項式と修正 B-spline 関数

2.1 基本境界多項式

本論文の基本境界多項式とは，成田[1]や Zhou ら[3]が用いている boundary index とか boundary function と呼んでいるものと概念は同様である．ここでは基本境界多項式の定式化について述べる．

基本境界多項式の定式化における考え方は非常に単純なものであり，与えられた境界条件の下で，基本境界条件と最大振幅の条件を満たす関数を見出し，これを基本境界多項式として用いる．

多項式の定式化にあたり，次式で表される無次元座標系を導入する．

$$\xi = x / l \tag{1}$$

ここで，l ははりのスパン長である．

ここで，両端が単純支持された場合(S-S)と一端固定，他端自由の場合(C-F)を例にとる．この時の基本境界条件および最大振幅の条件は，式(2)で表される．

(S-S)　$W(0) = W(1) = 0 \quad \text{and} \quad W(0.5) = 1$　(2-a)

(C-F)　$W(0) = 0\,,\ \mathrm{d}W(0)/\mathrm{d}\xi = 0 \quad \text{and} \quad W(1) = 1$　(2-a)

基本境界多項式 $E(\xi)$を次式のような単純多項式で仮定する．

$$E(\xi) = \sum_{i=0}^{2} a_i \xi^i \tag{3}$$

ここで，a_i (i = 0, 1, 2)は未定係数である．式(2)と式(3)を用いて連立方程式を解けば，基本境界多項式 $E(\xi)$が次式のように決定される．

(S-S)　$E(\xi) = 4(\xi - \xi^2) = 4\xi(1-\xi)$　(4-a)

(C-F)　$E(\xi) = \xi^2$　(4-b)

次に，基本振動モードをはりに等分布荷重が作用した時の静的たわみの形状(4 次多項式)で近似すれば，力学的境界条件も満たした基本境界多項式 $F(\xi)$を求めることができる．本論文では，力学的境界条件も考慮した場合は境界多項式 $F(\xi)$と呼び，基本境界多項式 $E(\xi)$と区別する．

さて，両端が単純支持(S-S)，一端固定-他端自由(C-F)

および両端固定(C-C)に対応する境界多項式 $F(\xi)$は，結果のみを示せば，次のようになる．

$$\text{(S-S)}\quad F(\xi)=(16/5)\xi(1-\xi)\ \underline{(\xi^2-\xi-1)} \tag{5-a}$$

$$\text{(C-F)}\quad F(\xi)=(1/3)\xi^2\ \underline{(\xi^2-4\xi+6)} \tag{5-b}$$

$$\text{(C-C)}\quad F(\xi)=16\xi^2(1-\xi)^2 \tag{5-c}$$

したがって，式(4)と式(5)を比較することによって，境界多項式 $F(\xi)$は，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \xi^p(1-\xi)^q\alpha(\xi) \\ &= E(\xi)\alpha(\xi) \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，p および q は，それぞれ$\xi = 0$ および$\xi = 1$ での基本境界条件を表すもので，自由端なら 0，単純支持なら 1，固定端なら 2 となる．また，$\alpha(\xi)$は，力学的境界条件を満たすために付加される項であり，式(5)の下線部に相当する．しかしながら，この付加項$\alpha(\xi)$には，基本境界条件のような規則性がなく，付加項の意味が明確でない．これについては，数値計算例で検討する．

今回提案した基本境界多項式 $E(\xi)$は，既に提案されている boundary index[1)]や boundary function[3)]を $0 \le \xi \le 1$ で表したものと一致する．既往の報告ではこれらの誘導に関することについては触れられていなかったが，基本境界条件および最大振幅の条件から決定する定式化およびはりの静的たわみ形状に基づく定式化で同様の結果が得られることを明らかにした．

2.2　修正 B-spline 関数

1. でも述べたように，局所基底関数の線形和で表される B-spline 関数は，境界条件を満足しない任意の関数である．ここでは，式(6)で表される基本境界多項式と B-spline 関数を組み合わせて得られる基本境界条件を満足した区分的な許容関数(修正 B-spline 関数と呼ぶ)について示す．

B-spline 関数は，次式で表される．

$$s(\xi)=\sum_{i=1}^{i_x} A_i N_{i,\,k}(\xi) \tag{7}$$

ここで，$N_{i,\,k}(\xi)$は正規化された B-spline，A_i は未定係数，$i_x = m_x + k - 2$ であり，m_x と k は，それぞれ節点(離散点)の数と spline 階数である．

したがって，修正 B-spline 関数は，次式で表される．

$$S(\xi)=E(\xi)\sum_{i=1}^{i_x} A_i N_{i,\,k}(\xi) \tag{8}$$

図-1 と**図-2** には，それぞれ，$k = 6$，$m_x = 11$ での B-spline 関数および両端単純支持の基本境界多項式を用いた修正 B-spline 関数が示してある．

図より，修正 B-spline 関数は，境界に近づくにつれ，基底関数の高さが小さくなるが，基本境界条件は完全に満たしている．

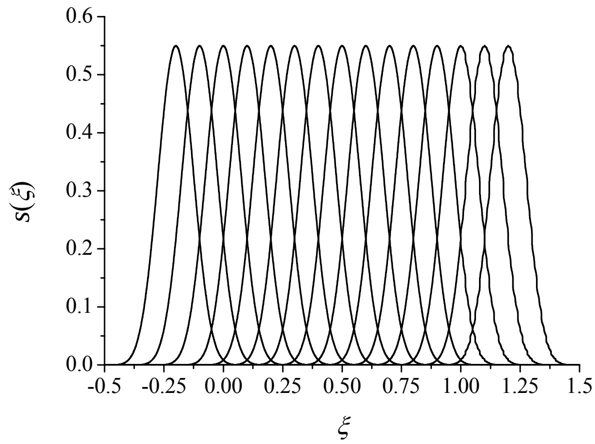

図-1　B-spline 関数：$k = 6$，$m_x = 11$

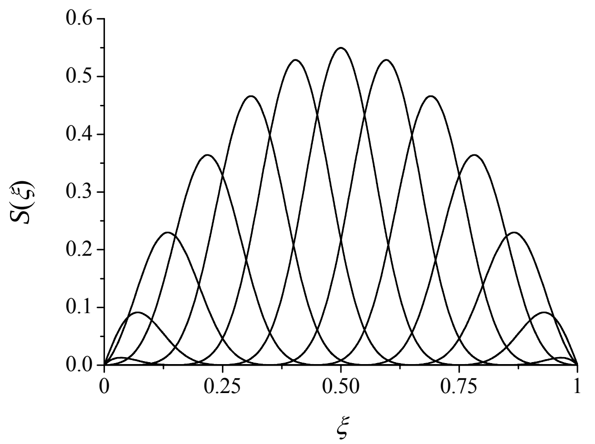

図-2　修正 B-spline 関数：$k = 6$，$m_x = 11$

3.　Ritz 法による固有方程式の定式化

修正 B-spline 関数を試行関数に採用した Ritz 法を用いて，Euler はりの固有方程式を定式化する．

Euler はりのひずみエネルギーU および運動エネルギーT は，次式で与えられる．

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^l\left\{\frac{\mathrm{d}^2 w(\xi,\,t)}{\mathrm{d}x^2}\right\}^2\mathrm{d}x \tag{9}$$

$$T=\frac{\rho A}{2}\int_0^l\left\{\frac{\mathrm{d}w(\xi,\,t)}{\mathrm{d}t}\right\}^2\mathrm{d}x \tag{10}$$

ここで，EI ははりの曲げ剛性，ρは密度であり，A は断面積である．

はりの変位成分 $w(\xi,\,t)$は，振幅変位関数 $W(\xi)$を用いて，次式のように表現することができる．

$$w(\xi,\,t)=W(\xi)e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{11}$$

ここで，ωは円振動数(rad/sec)であり，$\mathrm{i}^2 = -1$ は虚数単位である．

式(9)および式(10)に式(1)と式(11)を用いれば，最大ひずみエネルギーU_{max} と最大運動エネルギーT_{max} は，次式で表される．

$$U_{\max}=\frac{EI}{2l^3}\int_0^1\left\{\frac{\mathrm{d}^2W_m(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{\mathrm{d}^2W_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}\right\}\mathrm{d}\xi \tag{12}$$

$$T_{\max}=\frac{\rho A l\omega^2}{2}\int_0^1 W_m(\xi)W_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{13}$$

したがって，はりの全ポテンシャルエネルギーΠは，次式で定義される．

$$\Pi=U_{\max}-T_{\max} \tag{14}$$

ここで，振幅変位関数 $W(\xi)$には，式(8)で示した区分的な許容関数である修正 B-spline 関数を用いる．

$$W_m(\xi)=E_m(\xi)\sum_{m=1}^{i_x}A_m N_{m,\,k}(\xi)=[N]_m\{A_m\} \tag{15-a}$$

$$W_n(\xi)=E_n(\xi)\sum_{n=1}^{i_x}A_n N_{n,\,k}(\xi)=[N]_n\{A_n\} \tag{15-b}$$

したがって，式(15)を式(14)に代入し，未定係数ベクトルで極値化すれば，次式の線形代数方程式が得られる．

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\{A_n\}^{\mathrm{T}}}=0 \tag{16}$$

マトリックス表示すれば，

$$([\mathbf{K}]-\Omega^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{A}\}=\{\mathbf{0}\} \tag{17}$$

である．ここで，$\Omega=\omega l^2(\rho A/EI)^{1/2}$ は振動数パラメータ，剛性マトリックス[**K**]および質量マトリックス[**M**]の大きさは i_xであり，修正 B-spline 関数の局所性からバンドマトリックスになる．

4. 仮想バネ法を用いた Ritz 法

仮想バネ法を用いた Ritz 法について簡単に述べる．振幅変位 $W(\xi)$は，式(7)に示した B-spline 関数を用いる．

はりのはりの全ポテンシャルエネルギーΠは，次式で表される．

$$\Pi=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\frac{\mathrm{d}^2W_m(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{\mathrm{d}^2W_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}\right\}\mathrm{d}\xi\\ +\frac{k_1}{2}\sum_{i=1}^{N_c}W_m(\xi_i)W_n(\xi_i)\\ +\frac{k_2}{2}\sum_{i=1}^{N_c}\left\{\frac{\mathrm{d}W_m(\xi_i)}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}W_n(\xi_i)}{\mathrm{d}\xi}\right\}\end{bmatrix}-\frac{\Omega^2}{2}\left[\int_0^1 W_m(\xi)W_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] \tag{18}$$

ここで，$k_1=\alpha l^3/EI$，$k_2=\beta l/EI$ であり，それぞれ振幅変位 $W(\xi)$とたわみ角 $\mathrm{d}W(\xi)/\mathrm{d}\xi$に対応する無次元バネパラメータである．

全ポテンシャルエネルギーΠを極値操作すれば，線形代数方程式が得られる．なお，システムマトリックスの特徴は，修正 B-spline 関数を用いた場合と同様である．

5. Lagrange 乗数法を用いた修正 Ritz 法

振幅変位 $W(\xi)$は，式(7)に示す B-spline 関数を用いるとすれば，拡大汎関数Π_Lは，次式で表される．

$$\Pi_L=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\frac{\mathrm{d}^2W_m(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{\mathrm{d}^2W_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}\right\}\mathrm{d}\xi-\frac{\Omega^2}{2}\int_0^1 W_m(\xi)W_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\underline{+\sum_i^I\lambda_i W_m(\xi_i)+\sum_j^J\lambda_i\left\{\frac{\mathrm{d}W_m(\xi_i)}{\mathrm{d}\xi}\right\}} \tag{19}$$

ここで，下線部が Lagrange 乗数法による拘束項である．方法の比較を行なうためには，条件を同一にする必要があるため，力学的境界条件については省略した．

したがって，拡大汎関数Π_L を極値化すれば次式の代数方程式が得られる．

$$\frac{\partial\Pi_L}{\partial\{A_n\}^{\mathrm{T}}}=0\quad\text{and}\quad\frac{\partial\Pi_L}{\partial\{\lambda\}^{\mathrm{T}}}=0 \tag{20}$$

マトリックス表示すれば，

$$\left(\begin{bmatrix}[\mathbf{K}] & [\mathbf{\Gamma}]\\ [\mathbf{\Gamma}]^{\mathrm{T}} & [\mathbf{0}]\end{bmatrix}-\Omega^2\begin{bmatrix}[\mathbf{M}] & [\mathbf{0}]\\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}]\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\{\mathbf{A}\}\\ \{\boldsymbol{\lambda}\}\end{Bmatrix}=\{\mathbf{0}\} \tag{21}$$

になる．この時のシステムマトリックスの大きさは，$i_x+(I+J)$になりうる．さらに，一般固有値問題としては取り扱えないため，非対称マトリックスの標準固有値問題に帰着させて解く必要がある．

6. 数値計算例および考察

ここでは，本手法の解の収束性および精度比較について検討する．また，仮想バネ法を用いた Ritz 法および Lagrange 乗数法を用いた修正 Ritz 法と解の収束状態および解析精度について比較検討し，それぞれの特徴を整理する．なお，比較に用いる振動数パラメータΩは，はりの支配方程式から得られる固有方程式を解いた厳密解である．また，spline 次数 $k-1=5$ を用いる．

6.1 $E(\xi)$と $F(\xi)$による解の相違

2. でも述べたように，$F(\xi)$に現れる付加項$\alpha(\xi)$は，その意味が明確でない．ここでは，$E(\xi)$と $F(\xi)$を用いて得られる解を厳密解と比較し，数値的に検討する．

表-1 には，片持ちばりの基本振動数パラメータΩ_{1st}の収束性に与える離散点 m_xの影響が示してある．

これより，$E(\xi)$と $F(\xi)$共に振動数パラメータΩ_{1st} は，一定値への一様な収束状態を示している．

$E(\xi)$を用いた収束値は，厳密解と有効数字 9 桁でよく一致している．しかしながら，式 $F(\xi)$を用いた解は，

表-1　基本振動数パラメータΩ_{1st}の収束性に与える離散点 m_xの影響：$k-1=5$, C-F

m_x	$E(\xi)$	$F(\xi)$
	Ω_{1st}	
5	3.51601527	3.51601535
9	3.51601527	3.51601535
13	3.51601527	3.51601535
17	3.51601527	3.51601535
21	3.51601527	3.51601535
25	3.51601527	3.51601535
Exact	3.51601527	

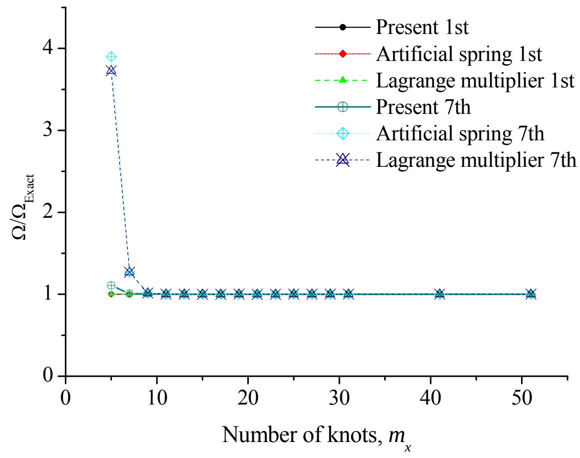

図-3　片持ちばりの振動数パラメータ比$\Omega_{1st}/\Omega_{1st,\ Exact}$と$\Omega_{7th}/\Omega_{7th,\ Exact}$の収束性に与える離散点$m_x$の影響

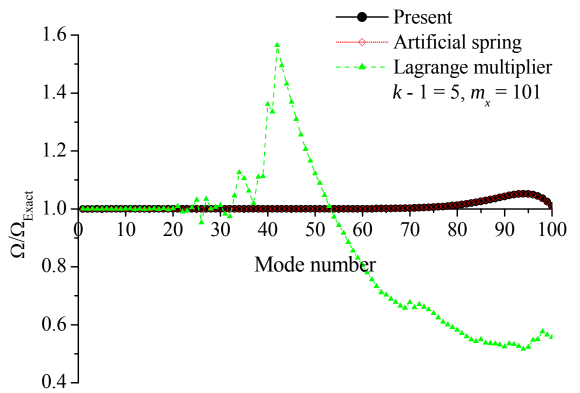

図-4　片持ちばりの振動数パラメータ比$\Omega_{15th}/\Omega_{15th,\ Exact}$と振動次数の関係

若干ではあるが厳密解および$E(\xi)$を用いた解よりも大きい値を示している．これは，付加項の影響により余計な拘束が入ったものと考えられる．

以後の計算例では，基本境界多項式$E(\xi)$を用いる．

6.2　3つ方法の解の収束性

次に，3つの方法における解の収束性について比較検討し，収束性に関する特徴を整理する．

図-3には，片持ちばりの振動数パラメータ比$\Omega_{1st}/\Omega_{1st,\ Exact}$と$\Omega_{7th}/\Omega_{7th,\ Exact}$の収束性に与える離散点$m_x$の影響が示してある．ここで，離散点$m_x$は，5から51まで変化させている．また，$k_1$と$k_2$は$10^{10}$を用いて計算した．

これより，基本振動数Ω_{1st}に対しては，全ての方法で離散点の数を増大させれば，一定値への安定した収束状態が示されている．近似振動数の値が，収束する時の離散点の数に相違は見られない．また，7次の振動数Ω_{7th}についても同様な収束状態が得られているが，修正B-spline関数を用いた場合，離散点の数が7程度で収束値が得られている．しかしながら，仮想バネ法やLagrange乗数法を用いたRitz法では，離散点が少ないと振動数の値はかなり大きく，離散点の数を13程度取れば収束値が得られている．

6.3　振動数パラメータ比と振動次数の関係

最後に，3手法の解析条件を統一し，振動次数と解析精度について検討を行なう．

図-4には，片持ちばりの振動数パラメータ比Ω/Ω_{Exact}と振動次数の関係が示してある．ここで，離散点m_xは，101に設定し，100次までの振動数に対して検討を行なった．

これより，修正B-spline関数を用いた場合と仮想バネ法によるRitz法は，離散点を十分に取れば，解析精度に大きな相違がないことがわかる．さらに，振動次数にして60から70次程度まで精度のよい結果が得られている．これに対して，Lagrange乗数法を用いたRitz法では，20次を超えると，厳密解に対する誤差が増大する．

7.　まとめ

本論文では，B-spline関数に全体関数で表される基本境界多項式を組み込み，基本境界条件を満足した区分的な許容関数(修正B-spline関数)について示した．また，この許容関数を試行関数に採用したRitz法を定式化し，本手法をEulerはりの自由振動解析に適用することで有用性についての検討を行なった．さらに，仮想バネ法およびLagrange乗数法を用いたRitz法と解の収束状態および解析精度について比較検討し，それぞれの特徴について整理した．

本論文で得られた結果をまとめると，以下のとおりである．

(1)　本手法により求められる振動数は，離散点の数の増大にともない，一定値への安定した収束状態が示されており，また，収束値は厳密解とよく一致している．

(2)　本手法は，仮想バネ法およびLagrange乗数法を用いたRitz法よりも少ない離散点数で収束値が得られる．

(3)　本手法と仮想バネ法を用いたRitz法は，離散点を十分取れば，得られる近似解に大きな相違はない．

参考文献

1)　成田吉弘：境界条件の自由な組み合わせを考慮したFRP積層長方形板の振動解析法，日本複合材料学会誌，第18巻，第3号，pp.113-120，1992.

2)　K. M. Liew, K. C. Hung and K. M. Lim: A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates, *International Journal Solids and Structures*, **30** pp.3357-3379, 1993.

3)　D. Zhou, Y. K. Cheung, F. T. K. Au and S. H. Lo: Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method, *International Journal Solids and Structures*, **39** pp.6339-6353, 2002.

4)　R. Kao: Application of hill functions to two-dimensional plate problems, *International Journal Solids and Structures*, **11** pp.21-31, 1975.

5)　T. Mizusawa, T. Kajita and M. Naruoka: Vibration of skew plates by using B-spline functions, *Journal of Sound and Vibration*, **62** pp.301-308, 1979.