Ⅱ－４３　　平成16年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第61号

デカルト座標系における自由水面力学的境界条件の強制アルゴリズムの開発

Algorithms of enforcing kinetic boundary conditions to free surfaces in Cartesian coordinate system

北海道大学工学部土木工学科　○学生員　猿渡亜由未　(Ayumi Saruwatari)
北海道大学工学研究科助手　正員　渡部靖憲　(Yasunori Watanabe)
北海道大学工学研究科教授　フェロー　佐伯浩　(Hiroshi Saeki)

1. はじめに

Navier-Stokes 式を基本式とする数値計算において、本来自由水面では、圧力・表面張力・せん断力が常にバランスするように境界条件を課す必要がある。適合座標系による自由水面を含む流れ場の計算では、水面において流速及び局所水面勾配を決定できるので、この力学的境界条件を容易に満足させられる一方複雑な水面形を含む流れ（例えば沿岸域に発生する砕波等）を再現することは困難となる。一方、近年固定グリッド上で VOF あるいは密度関数を用いた自由水面の計算が多く行われている。この方法は逆に、数値的に安定した複雑な自由水面変化を表現できる一方で、力学的境界条件を厳密に課すことが困難であり、多くの研究はこれを簡略化（例えば圧力のみ与えるなど）し、局所的な力学的作用が無視されている。

Longuet-Higgins(1992)は、自由水面で満足すべきゼロ接線方向せん断力条件（式 2）が曲率に比例した渦度の生成を強制することを証明している。これは、曲率を有する水面を扱う場合、正しい水面下の渦度場を再現するためには、この条件の適用が不可欠であることを示し、例えば急峻な水面形をもつ砕波過程と渦形成を再現する上で重要な条件となる。また水面直下に存在する渦は、そのせん断力により水面を下方に巻き込み、その近傍曲率の大きな水面形状（いわゆるscar）を形成することはよく知られている（Sarpkaya (1996),Brocchini & Peregrine(2001)）。この新たに形成された急峻な水面は再びその直下に曲率に応じた二次渦を生成するため、非常に複雑な流れ場が強制的に構成されることになる。さらに、曲率の変化に伴う表面張力の局所的な発生と圧力との不均衡は水面の不安定を誘発し、結果として気泡の形成の原因ともなる。これらは要するに、水面下に渦を伴う流れ場を正しく計算するためには、自由水面の力学的境界条件を簡略化なしに強制させる必要があることを意味する。

本研究は、自由水面を有する水塊の落下に伴う流れ場のデカルト座標系における再現計算に Level-Set 法を導入し、表面張力及びせん断力を水面において満足させる方法を提案するとともに、境界条件の簡略化に伴う流れ場の変化について議論するものである。

2. 数値計算法

当研究では乱流モデルとしてLES を採用した。全ての変数は重力加速度、水深、水の密度で無次元化され、グリッドスケール成分とサブグリッドスケール成分とに分解された変数に対するNavier-Stokes 式をフィルター操作することによって得られた次式を基本式として計算した。

$$\frac{\overline{D\mathbf{u}}}{Dt} = -\frac{1}{r}\nabla\overline{p} + u_T\nabla^2\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{g} \qquad \cdots(1)$$

ここで、$\mathbf{u}$ は流速、ρは密度、pは圧力、ν_Tは格子粘性、$\mathbf{g}$は重力加速度であり、上にバーが付いた変数はフィルタリングされたグリッドスケールの値を表す。

水表面の伝達と表面張力は Level-Set 法によって算出される。Level-Set 法では計算点から水面までの距離を表す Level-Set 関数を全計算領域において定義し（流体内を正、流体外を負とする）、計算領域内の全ての Level-Set 関数φは次式に従って移流される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla f = 0 \qquad \cdots(2)$$

Level-Set 関数を導入する利点の一つは、水面の曲率とそれに応じて生じる表面張力の大きさを容易に計算できることである。今回曲率の計算には次式を採用した。

$$k = \nabla\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\begin{Bmatrix}(f_{yy}+f_{zz})f_x^2+(f_{xx}+f_{zz})f_y^2+(f_{xx}+f_{yy})f_z^2 \\ -2f_xf_yf_{xy}-2f_xf_zf_{xz}-2f_yf_zf_{yz}\end{Bmatrix}}{(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{3/2}} \qquad \cdots(3)$$

ここで、κは曲率、添え字付きのφはその方向へのφの偏微分である。

Level-Set 関数が水面までの距離であり続けるためには、数 time step ごとに｜∇φ｜→1 となるように再初期化する必要がある。当研究では次式が収束するまで繰り返し計算することによって再初期化した。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + S(f)(|\nabla f|-1) = 0 \qquad \cdots(4)$$

$$S(f) = \frac{f}{\sqrt{f^2+|\nabla f|^2(\Delta\mathbf{x})^2}}$$

3. 力学的境界条件の強制アルゴリズム

3.1 力学的境界条件

自由水面における力学的境界条件をそれぞれ法線方向及び接線方向に分離すると、満足されるべき境界条件は次のよ

表 1

case	1	2	3	4
Re	1000	1000	1000	5×10^4
We	∞	100	100	1×10^4
v_0	0.1	0.1	0.1	1.0
表面張力の与え方		体積力	面積力	体積力

うに書ける。

$$p + 2m\frac{\partial u_n}{\partial n} = tk \quad \cdots(5)$$

$$m\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}+\frac{\partial u_t}{\partial n}\right) = 0 \quad \cdots(6)$$

(6)式のゼロ接線方向応力条件は、水面で満足される様に流体内グリッドから流体外の固定グリッドへ速度外挿されるべきである。(5)式の条件を達成するために以下の節で表す2つの方法により計算を行い、その差異を検討していく。

. 3.2 表面張力を体積力として与える方法

(1)式の右辺に表面張力項を加えた次式を基本式として計算する。

$$\frac{D\overline{\mathbf{u}}}{Dt} = -\frac{1}{r}\nabla\overline{p} + u_T\nabla^2\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{g} + \frac{d(f)tk\mathbf{n}}{r} \quad \cdots(7)$$

$$d(f) = \frac{(1+\cos(pf/e))}{2e} \quad \cdots(8)$$

ここでεは流体内外を連続相と仮定した場合の水面を判定する長さ尺度であり、本計算ではε=2Δxとした。定義したδ関数により、φ=0近傍のみで表面張力を評価可能となる。

3.3 表面張力を面積力として与える方法

(1)式を基本式として計算し、(5)式の法線方向粘性力を簡単のため無視し、以下の条件を水面で直接与える。

$$p = tk \quad \cdots(9).$$

4. 結果

自由水面を有する円柱状の水隗が着水した後の水面と、水面直下に発生する渦核分布LESにより再現し、前章で示した表面張力の数値的取り扱いの差異による結果の依存性を考察していく。それぞれのケースにおけるレイノルズ数Reとウェーバー数We、水柱の落下初速度v_0、表面張力の与え方等については表1に示す通りである。

4.1 case1. (図1参照)

表面張力が働かない場合の計算結果である。水隗の落下によって典型的な円状のスプラッシュが発生した(time=700～800)。静水面と柱状水隗が接する曲線状で渦輪が発生し、時間と共に外側に広がっていく様子が確認できる。水隗の上部水面が静水面に到達したときに初期渦輪の内側に新たな渦輪が発生している(time=700)。

time =100

time =200

time =300

time =400

time =500

time =600

time =700

time =800

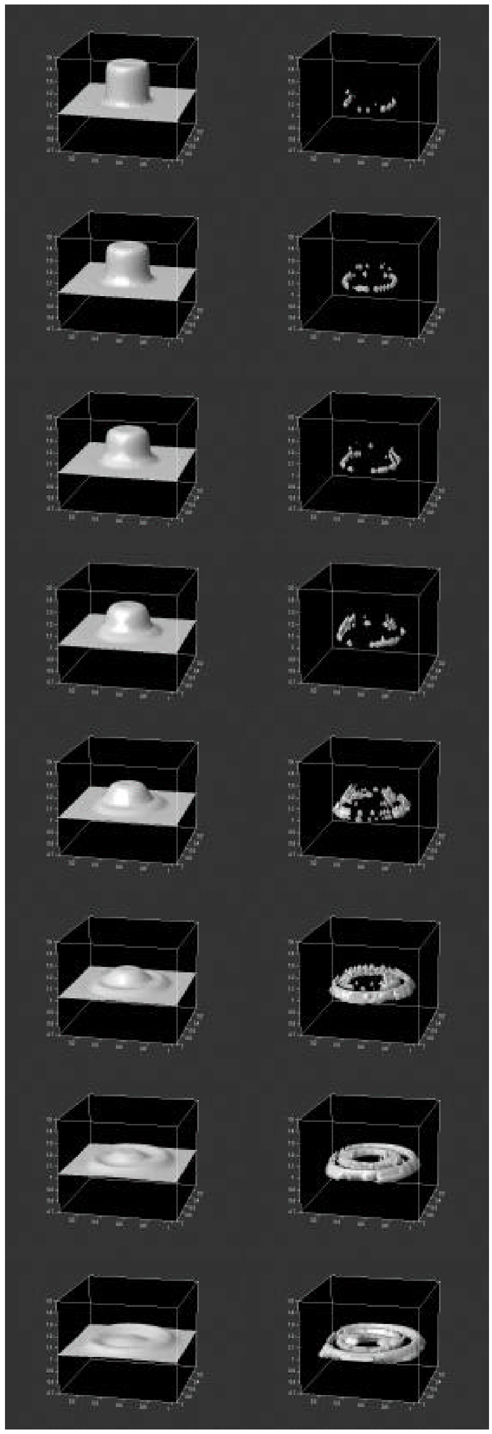

図1　case1:表面張力が働かない場合
Re=1000,We=∞,v_0=0.1

4.2 case2. (図参照)

表面張力を体積力として働かせたケースである。表面張力が働くことによって柱状水隗上部が球状化しているのが見て取れる。また、球状化した水面下に渦が発生しており、表面張力が加わったことによって流体内の圧力場が変化することが水面形や水面直下の渦の形成に影響を与えていることが原因だと考えられる。またcase1と比較すると、渦輪の発達状況が異なることがわかる。表面張力により特に水面近傍の圧力場が変化するため、渦強度ならびにそのスケールが影響を受けたものと考えられる。

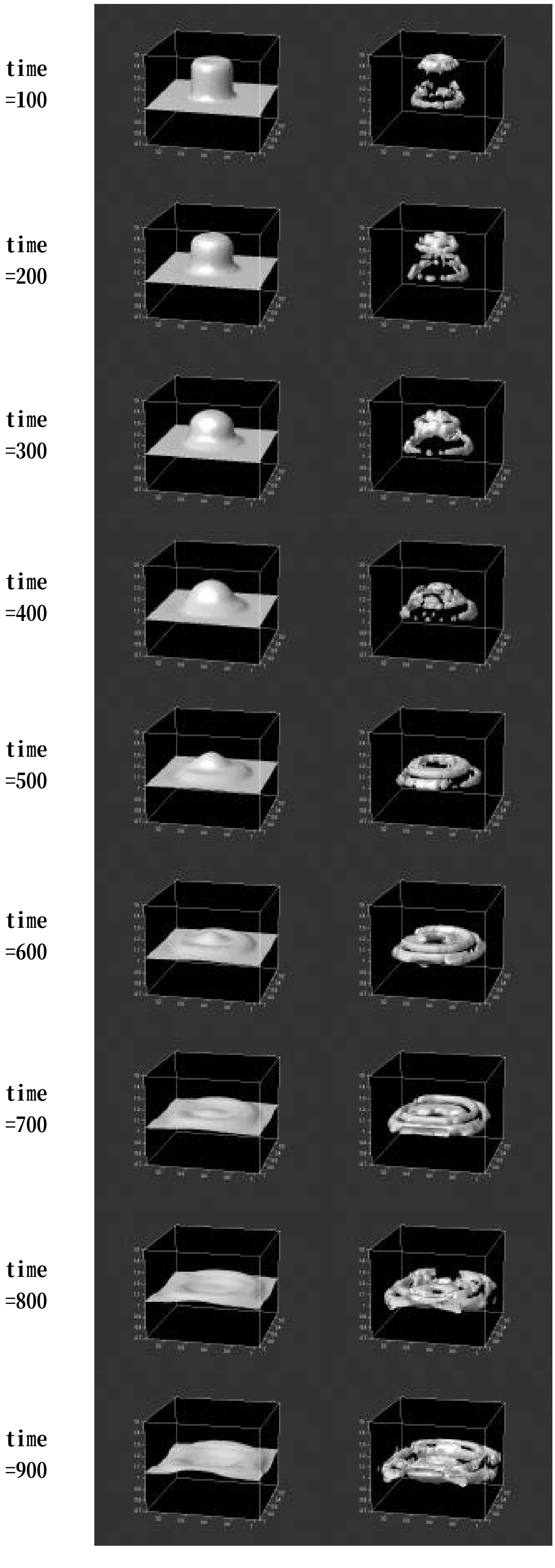

図2　case2:体積力として表面張力を与えた場合(3.1参照)
Re=1000,We=100,v_0=0.1

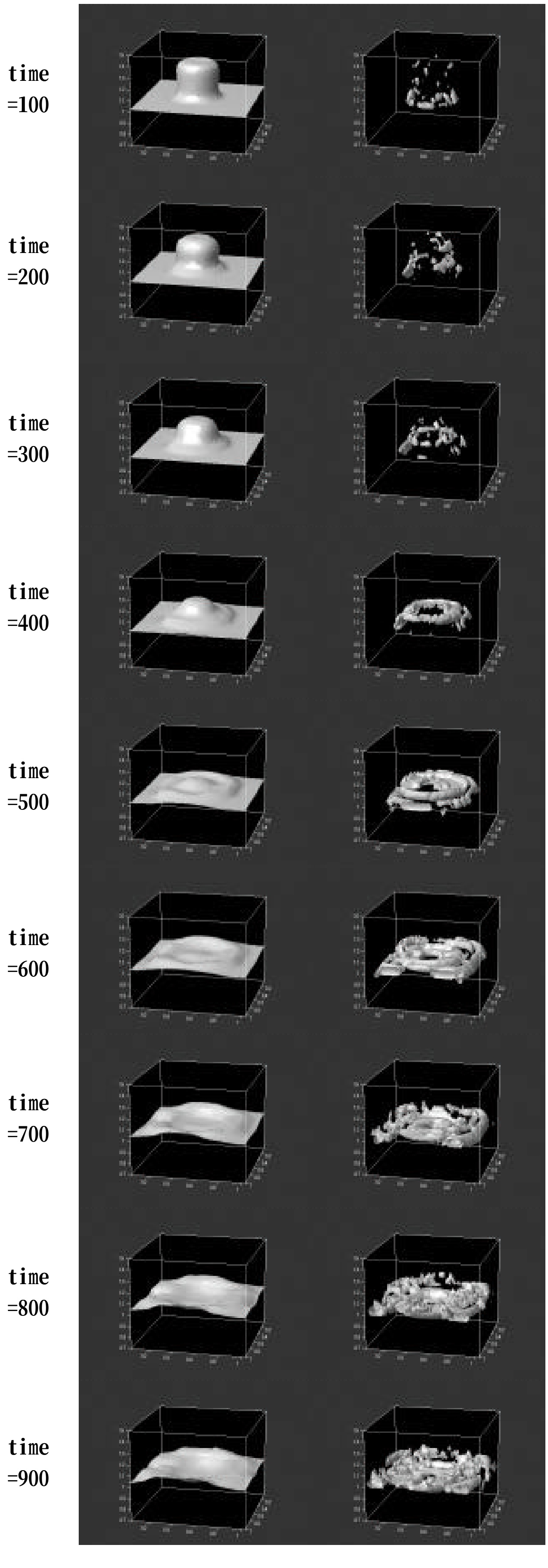

図3　case3:面積力として表面張力を与えた場合(3.2参照)
Re=1000,We=100,v_0=0.1

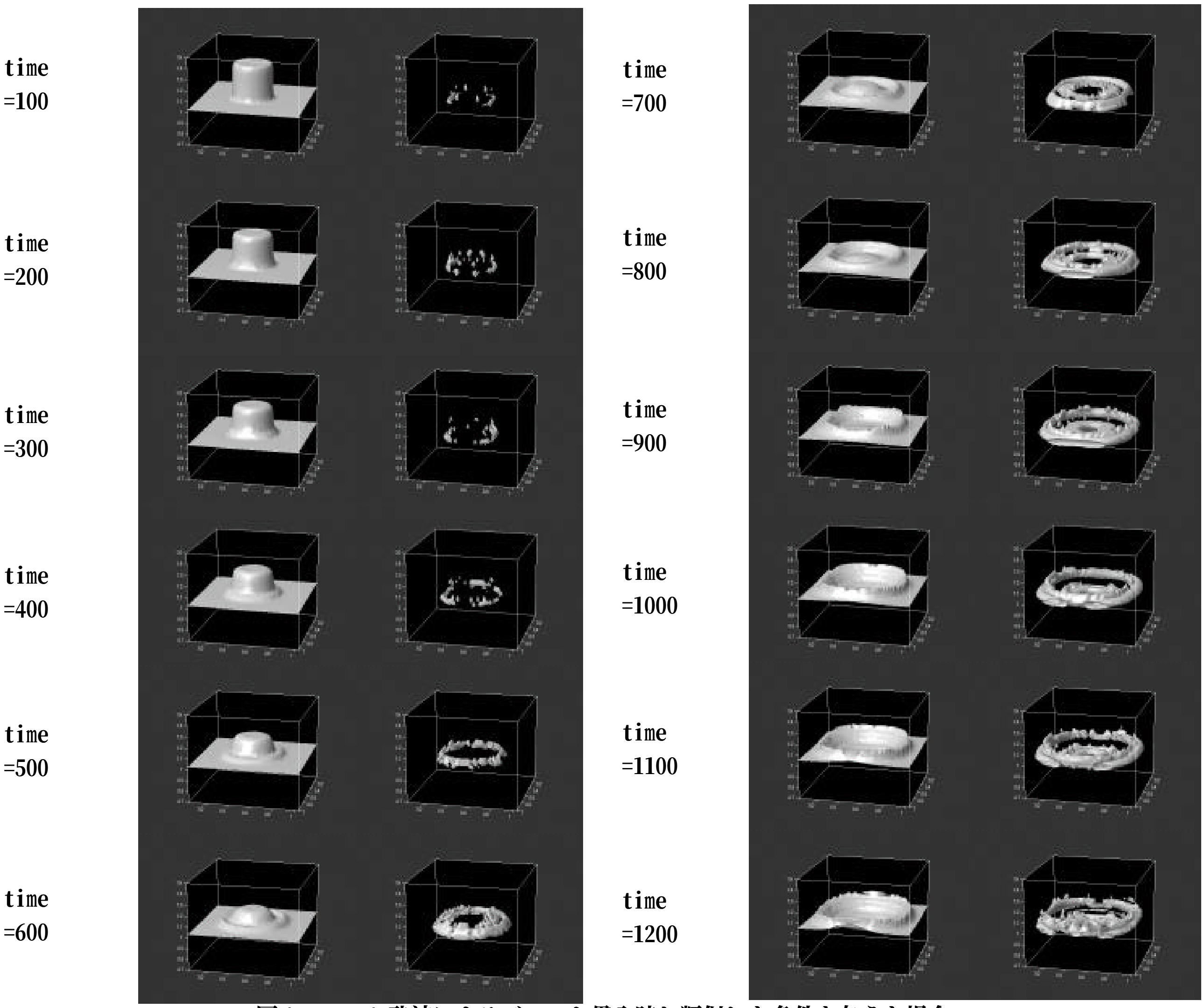

図4　case4:砕波によるジェット貫入時と類似した条件を与えた場合

4.3 case3.（図3参照）

表面張力を面積力として働かせたケースである。2.のケースと比べ水隗の球状化の度合いが小さい。その明確な理由は定かではないが、表面張力を体積力として扱う場合水面に厚みを持たせているため、表面張力のグリッド依存性があるということと関係しているのではないかと考えられる。

4.4 case4.（図4参照）

当研究は砕波のシミュレーションへと発展させることを目的としているため、砕波によりジェットが水面に貫入する時と同オーダーでの条件で計算を行った。水隗の落下に伴って大規模なスプラッシュが起こっていることがわかる。time step1000前後では、キャビティー円周上に王冠状の変動が見られる。これは、王冠状の水面を再現しようとしているものの、グリッドが荒くてそれを解像しきれていないものだと考えられる。

5.結論

静水への柱状水隗の着水を例に、数値計算結果の境界条件依存性を調べた。水面の境界条件として圧力の他に表面張力を取り入れたことによって、水面の曲率が大きいところで水面形が変化していく様子を再現することができた。また、その水面形の変化に伴って水面直下に渦が発生する様子も再現されている。水面の境界条件の取り扱いによって水面下の渦構造が変化する。数値パラメータの依存性のない一意の解を得るための境界条件強制法を開発する必要がある。

今後は水面の境界条件としてせん断力の効果も取り入れていくことによってより現実的な計算結果が得られるようにしていくとともに、この方法を砕波の再現計算へと適用し砕波時に水面直下の渦が水面にどのような影響を与えているかを調べていく予定である。

参考文献

1)Longuet-Higgins,1992.Capillary rollers and bores.J.Fluid Mech.240,658-679
2)Sarpkaya,1996.Vorticity,free-surface,and surfactants.Ann.Rev.Fluid Mech.28,88-128
3)Brocchini & Peregrine,2001.The dynamics of strong turbulence at free surfaces.Part 1.Description.J.Fluid Mech.449,225-254
4)Sethian & Smereka,2003. Level set methods for fluid interfaces.Ann.Rev.Fluid Mech.35,341-372
5)J.A.Sethian,1996.Level set methods and fast marching methods.Cambridge university press