

実流域における降雨～流出系の周波数特性

The frequency characteristic of the rain - outflow system in a real valley

北海道大学工学部土木工学科 ○学生員 杉原卓治 (Takuji Sugihara)

北海道大学教授工学研究科環境資源工学専攻 フェロー 藤田睦博(Mutsuhiro Fujita)

1. はじめに

線形系において、系の特性や安定性を解析するために伝達関数や周波数伝達関数の手法が広く用いられている。しかしこの方法は対象となる系が線形系に限られているため、非線形系に対しては全く無力である。藤田らは、等価周波数伝達関数の概念を拡張して降雨～流出系を記述する各種の非線形分布定数系の微分方程式の等価周波数伝達関数を求める手法を提示している。これは非線形系においても線形系と同様の扱いができることを示している。さらに藤田らはこの等価周波数伝達関数が2～4次の遅れ系の周波数伝達関数で近似できることを示し、そのパラメータを同定する方法としてモーメント法を提案している^{1),2)}。

本論文では、先ずこの手法に基づいて北海道の網走川水系における実測資料を用いて流域の等価周波数伝達関数を求め、2～4次の遅れ系で近似することで流域の周波数特性を記述する。藤田らによれば、上記の方法で導かれた流域の周波数特性は、高周波数領域において降雨が流出に与える影響が小さくなるというものである。これを受けて、降雨の高周波数領域が流出に与える影響が十分小さいものとして無視する、つまり降雨データを数時間にわたり平均化し流出解析を行う方法を提案し、これにより流出解析の際に1時間毎の降雨データが必要か、または数時間毎のデータを用いても十分に有用な解析を行うことができるのかを検証する。

2. 実流域における周波数特性

実測資料を流出解析に用いる際、有効雨量と直接流出量を切り出す必要があるが、直接流出量については流出高データを対数プロットし、流量の立ち上がり点を流出

開始、減水部の第2折曲点を流出終わりとし、その間を直線で結び切り出した。有効雨量は流出の開始～終了間の主要降雨を切り出し、流出率(総流出量/総降雨量)を乗じたものを用いる。

有効雨量 $r(t)$ (mm/hr) とこれによる直接流出量 $q(t)$ (mm/hr) を用いて、 $r(t) \sim q(t)$ 関係が非線形であっても、その等価周波数伝達関数 $Z(j\omega, \bar{r})$ は、次式で定義できる。

$$Z(j\omega, \bar{r}) = \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (1)$$

$$Q(j\omega) = \int_0^{\infty} q(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

$$R(j\omega) = \int_0^{\infty} r(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

(j ; 虚数単位, t ; 時間(hr), ω ; 周波数(1/hr),
 $r(t)$; 有効雨量(mm/hr), $q(t)$; 直接流出量(mm/hr),
 e ; 自然対数の底)

式(1)は線形流出系の周波数伝達関数の概念を拡張した形式で記述されているが、非線形系の場合にはこれが入力である降雨量の平均値に依存しているので式(1)に示すように $Z(j\omega, \bar{r})$ と記述している。

ここで、実測資料を用いて実流域の周波数特性を調べ際にデータに含まれる誤差について考慮する必要があるが、網走川水系本郷地点(流域面積 1120.4 k m²)の実測データを取りあげて、等価周波数伝達関数を用いて誤差を評価し、データの選択を行う方法を以下に示す。

実測資料から直接流出量と有効降雨を切り出し、等価周波数伝達関数を求め、それによって得られる流域の周波数特性を図-1、図-2に示す。

図-1で示される周波数特性によると、降雨に含まれ

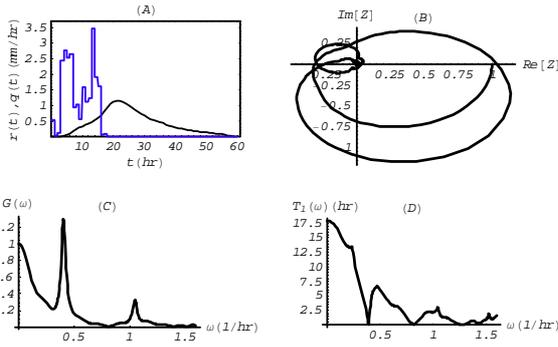


図-1 網走川水系本郷地点における周波数特性 (1998.8.29)

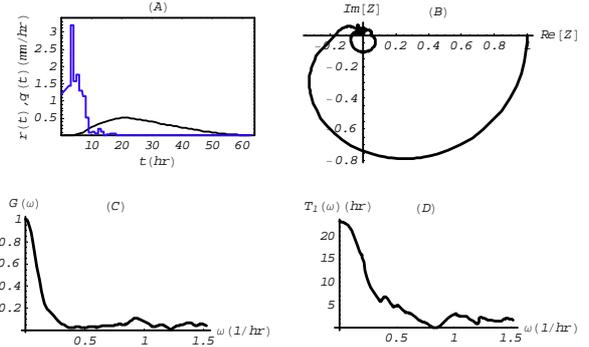


図-2 網走川水系本郷地点における周波数特性 (1974.8.27)

ある周波数成分が共振現象を示すことが読み取れるが、この現象は降雨～流出系に存在している性質ではなく、降雨量～流出量間の対応関係に含まれる誤差に起因すると考えるのが妥当である。

このようにデータに含まれる誤差を評価し、ここからは図-2 のような周波数特性を示すデータを用いることとする。今回用いた本郷地点の全データ数は10、そのうち誤差を多く含むと判断し棄却したものは6であった。図中の(A), (B), (C), (D)はそれぞれ、有効降雨と直接流出量、ベクトル軌跡、ゲイン、時間遅れを表す。

3. モーメント法による近似計算

次に式(1)の等価周波数伝達関数 $Z(j\omega, \bar{r})$ が、次の4次の遅れ系(4階微分方程式)の周波数伝達関数によって近似できるものとして、モーメント法を用いて係数 G_0, G_1, G_2, G_3 を同定する。ここではモーメント法の詳細については紙面の都合上省略する。

$$G_0 \frac{d^4 q}{dt^4} + G_1 \frac{d^3 q}{dt^3} + G_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + G_3 \frac{dq}{dt} + q = r \quad (4)$$

$$\left[\frac{d^n q}{dt^n} \right]_{t=0} = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad (5)$$

$$G_0 = \frac{1}{24} (I_{q,1} - I_{r,1})^4 \left\{ 1 - \frac{J_{q,4} - J_{r,4} - 6J_{q,2}(J_{q,2} - J_{r,2})}{(I_{q,1} - I_{r,1})^4} + \frac{4(J_{q,3} - J_{r,3})}{(I_{q,1} - I_{r,1})^3} - \frac{6(J_{q,2} - J_{r,2})}{(I_{q,1} - I_{r,1})^2} \right\} \quad (6)$$

$$G_1 = \frac{1}{6} (I_{q,1} - I_{r,1})^3 \left\{ 1 + \frac{J_{q,3} - J_{r,3}}{(I_{q,1} - I_{r,1})^3} - \frac{3(J_{q,2} - J_{r,2})}{(I_{q,1} - I_{r,1})^2} \right\} \quad (7)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} (I_{q,1} - I_{r,1})^2 \left\{ 1 - \frac{J_{q,2} - J_{r,2}}{(I_{q,1} - I_{r,1})^2} \right\} \quad (8)$$

$$G_3 = I_{q,1} - I_{r,1} \quad (9)$$

$$I_{r,i} = \int_0^\infty \frac{t^i r(t)}{S_{rq}} dt \quad (10)$$

$$I_{q,i} = \int_0^\infty \frac{t^i q(t)}{S_{rq}} dt \quad (11)$$

$$\int_0^\infty r(t) dt = \int_0^\infty q(t) dt = S_{rq} \quad (12)$$

$$J_{q,i} = \int_0^\infty (t - I_{q,1})^i \frac{q(t)}{S_{rq}} dt \quad (13)$$

$$J_{r,i} = \int_0^\infty (t - I_{r,1})^i \frac{r(t)}{S_{rq}} dt \quad (14)$$

$i = 1, 2, 3, 4$

(q ; 直接流出量(mm/hr), r ; 有効降雨量(mm/hr),

ω ; 周波数(1/hr), t ; 時間(hr))

この方法により求められた係数 G_0, G_1, G_2, G_3 は、2~4階微分方程式の共通の係数になっている。

ここで、等価周波数伝達関数が流域の降雨量の平均値に依存していることは前にも述べたが、モーメント法では等価周波数伝達関数を用いて係数を決定しているため、各係数も降雨量の平均値に依存していると考えられる。

モーメント法より得られた各係数と流域の平均降雨量との関係を図-3に示す。ここに、平均降雨は(総降雨量)/(出水の継続時間)で定義している。

今回の4種類のデータを見る限りではデータ数が十分でなく、平均降雨量と係数 G_0, G_1, G_2, G_3 がどのような関

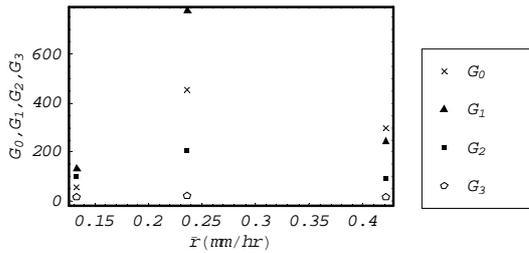


図-3 平均降雨量と係数 G_0, G_1, G_2, G_3 の関係

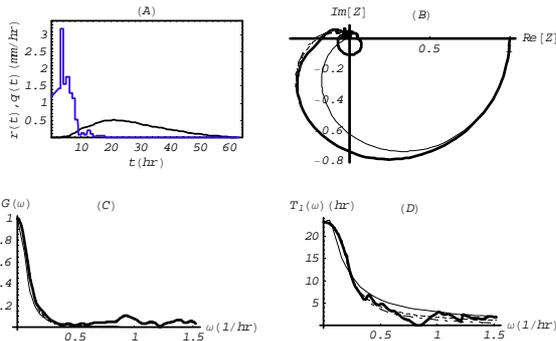


図-4 モーメント法による周波数特性

係になっているのか読み取ることはできないが、藤田らによれば平均降雨量の増加に伴い係数 G_0, G_1, G_2, G_3 は現象する傾向にある。これについては今後より多くのデータを取り上げて検証する。

モーメント法により、図-2 と同じデータを用いた近似結果を図-4 に示す。図中の太実線は実測データを用いたもので、鎖線、点線、細実線はそれぞれ4階、3階、2階の遅れ系微分方程式で近似したときのものである。

この近似結果を見ると、流域の等価周波数伝達関数は2階の遅れ系微分方程式によっても十分に評価できることがわかる。

4. 降雨の周波数スペクトル

任意の時間関数がフーリエ級数展開できることを利用し、降雨データを次式のように表す。

$$r(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(\omega_i t) \quad (15)$$

このとき流出量はゲインと時間遅れを用いて次のように計算される。

$$q(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i G(\omega_i) \sin\{\omega_i(t - T_i(\omega_i))\} \quad (16)$$

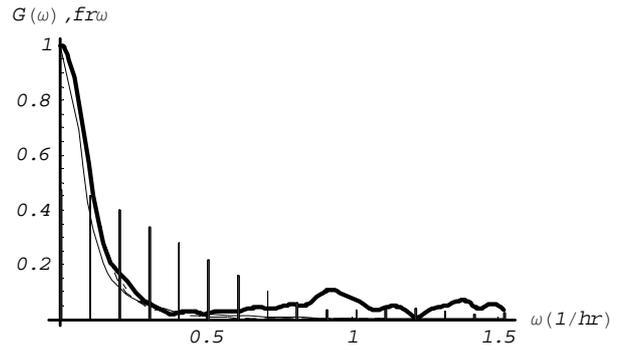


図-5 ゲイン特性と有効降雨の周波数スペクトル

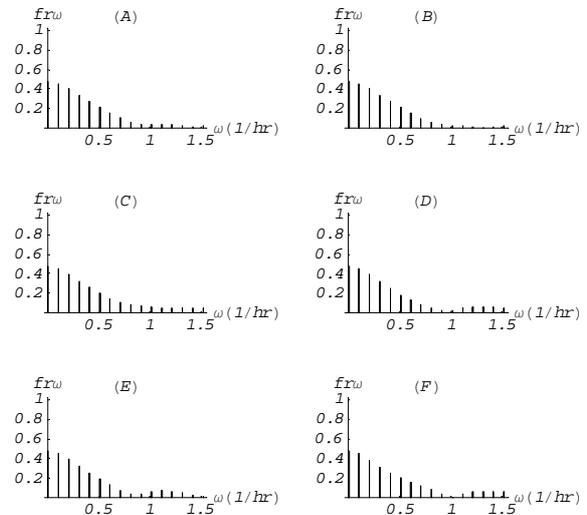


図-6 数時間平均化した降雨の周波数スペクトル

($r(t)$) ; 有効降雨(mm/hr), ($q(t)$) ; 直接流出量(mm/hr),
 A_i ; 定数, ω_i ; 周波数(1/hr), t ; 時間(hr),
 $G(\omega_i)$; ゲイン, $T_i(\omega_i)$; 時間遅れ(hr)

降雨の各周波数成分に、その周波数におけるゲインを乗じたものが流出量の周波数成分になっていることがわかる。ここで、図-4 から読み取れるようにゲイン特性は高周波数領域では十分小さい値をとっており、そこに降雨の周波数成分があつたとしても流出量に与える影響は十分小さくなっているものと考えられる。そこで有効降雨の周波数スペクトルとゲイン特性を図-5 に示す。

図-5 によると、等価周波数伝達関数を2~4階のいずれの遅れ系の周波数伝達関数によって近似したとしても、周波数がおおよそ0.5(1/hr)を超えたあたりからゲインは十分小さいとみなすことができ、降雨成分が流出量に与える影響を無視することができるのではないかと考えら

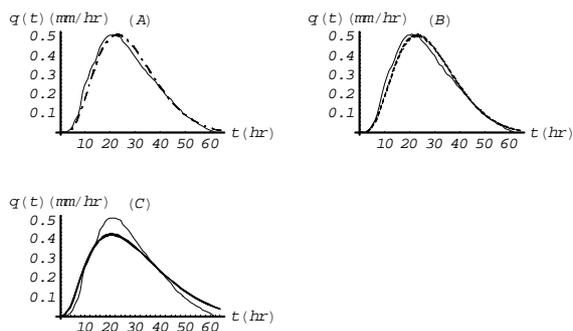


図-7 数時間平均降雨を用いた流出解析

れる。降雨の高周波数領域を無視するという事は元のデータを数時間毎にサンプリングし、時間平均を取ることと等しいので、次に元のデータを数時間毎に平均化した時の周波数スペクトルを調べ、図-6に示す。実測資料は1時間毎の降雨データである。

ここで、(A),(B),(C),(D),(E),(F)はそれぞれ、1時間～6時間毎に降雨を平均化したときの周波数スペクトルを示す。周波数が0～0.5の範囲で見比べると、それぞれの周波数スペクトルはすべてほぼ等しくなっている。これを受けて、次にそれぞれの時間平均を取った降雨データを用いた流出解析を行う。

5. 時間平均降雨を用いた流出解析

流出解析にはモーメント法により係数を同定した各階の遅れ系微分方程式を用いる。解析した結果を図-7に示す。(A),(B),(C)はそれぞれ4階、3階、2階の遅れ系による近似結果を用いたものである。この結果を見ると、ピーク流量に実測値との差が見られることからこの流域において2階の遅れ系を適用することは適切ではなく、3階、4階で近似したものについては1～6時間平均化した降雨データを用いて解析したところほぼ実測に等しい結果を得ている。これは、先に降雨データを数時間平均化したものの周波数スペクトルを示したが、ゲインによる影響が比較的大きい、周波数が0～0.5(1/hr)の間で周波数スペクトルがほぼ等しいことから予想どおりの解析結果を得たといえる。

6. 流出予測理論への適用

等価周波数伝達関数を用いて流域特性を記述し、その

ゲイン特性を利用して流出解析に数時間の平均降雨を用いることができることを示したが、今後この方法を流出予測に適用することを予定している。降雨の予測は現在でも困難なものであり、短時間予測には相応の設備が必要とされ、長時間の予測に比べて含まれる誤差も大きくなることが予想される。そこで、等価周波数伝達関数の概念を利用することで流域特性を記述し、数時間の平均降雨を用いても十分に流出解析の精度が得られる流域において、予測降雨データとして数時間毎の粗いものを用いた、カルマンフィルターによる流出予測を考えている³⁾。

7. まとめ

本論文では、非線形系における等価周波数伝達関数の降雨～流出系への適用により非線形系においても線形系と同様に周波数特性について記述できることを利用した、モーメント法による等価周波数伝達関数の2～4階の遅れ系微分方程式への近似によって得られた流域の周波数特性から、降雨の高周波数成分が流出に与える影響について検討した結果、高周波数領域において降雨の影響が十分小さくなることを利用し流出解析に用いる降雨データを数時間で平均化し、そのデータを用いても解析精度は保たれることを示した。さらにこの方法を流出予測に適用することにより、数時間毎の予測降雨データを用いても十分な流出予測を行うことができる可能性を示した。

参考文献

- 1) 藤田睦博、Surakha WANPHEN、田中岳、清水康行：等価周波数応答法に基づくKinematic waveモデルの集中化に関する基礎的研究，土木学会論文集，No.726/II-62，pp.11-30，2003.2.
- 2) 藤田睦博、Surakha WANPHEN、田中岳、清水康行：モーメント法による流出モデルのパラメータの同定とKinematic Wave式に基づくパラメータの評価，土木学会論文集，No.733/II-63，pp.1-20，2003.5.
- 3) 東海林勉，星清，渡邊和好：予測降雨の推定誤差評価について，土木学会論文報告集，第60号，pp.296-299，2003.