

# Kinematic wave 式の等価周波数伝達関数とその応用

Frequency transfer function of kinematic equation and its application to runoff analysis

北海道大学工学部工学研究科環境資源工学専攻 ○学生員 大西宏典 (Hironori Ohnishi)  
 北海道大学工学部土木工学科 学生員 亀澤千奈 (China Kamezawa)  
 北海道大学教授工学研究科環境資源工学専攻 フェロー 藤田睦博 (Mutsuhiro Fujita)

## 1. はじめに

藤田ら<sup>2)</sup>は分布定数系流出モデルにおいて、降雨量と流出量間の等価周波数伝達関数を求めている。さらに、等価周波数伝達関数が低次の遅れ系の周波数伝達関数によって近似できることに注目して遅れ系の係数を同定する手法を提示している。本論文では、斜面域、河道域ともに流出がkinematic wave式で記述できるものとして、遅れ系の係数を求める簡易手法を示す。

## 2. 基礎式



図-1 に示す任意の河道網流域を考える。i 番目の部分流域に着目して基礎式をたてる。

図-1. 任意の河道網流域

### 2.1 斜面域の基礎式

図-1 の i 番目の部分流域の斜面に注目して、次式を与える。

$$\frac{\partial h_{s,\delta,i}}{\partial t} + \frac{\partial q_{s,\delta,i}}{\partial x} = r(t) \quad 0 \leq x \leq l_{s,\delta,i} \quad (1)$$

$$q_{s,\delta,i} = \alpha_{s,\delta,i} h_{s,\delta,i}^{p_s} \quad (2)$$

$$\alpha_{s,\delta,i} = \frac{\sqrt{i_{s,\delta,i}}}{n_{s,\delta,i}} \quad \alpha_{s,\delta,i}, p_s : \text{定数} \quad (3)$$

$h_i, q_{s,\delta,i}, r(t)$  は、それぞれ水深、斜面流出量、降雨量を、

$n_{s,\delta,i}, i_{s,\delta,i}$  は斜面の粗度係数、斜面勾配、 $l_{s,\delta,i}$  は斜面長を表している。 $\delta=1$  は右斜面、 $\delta=2$  は左斜面を示す。又、境界条件として式 (4) を与える。

$$q_{s,\delta,i}(t,0) = 0 \quad (4)$$

### 2.2 河道域の基礎式

図-1 の i 番目の部分流域の河道に着目して、次式を与える。

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} + \frac{\partial q_{c,i}}{\partial y} = \sum_{\delta=1}^2 q_{s,\delta,i}(t, l_{s,\delta,i}) \quad 0 \leq y \leq l_{s,\delta,i} \quad (5)$$

$$q_{c,i} = \beta_i a_i^{p_c} \quad p_c = \frac{5}{3} \quad (6)$$

$$\beta_i = \frac{\sqrt{i_{c,i}}}{n_{c,i} W_i^{2/3}} \quad (7)$$

$a_i, q_{c,i}, W_i$  はそれぞれ流積、河道流量、河道幅、 $n_{c,i}, i_{c,i}$  は河道の粗度係数、河道勾配をそれぞれ表している。境界条件として式 (7) を与えておく。

$$q_{c,i}(t,0) = \begin{cases} 0 & \text{(外部リンク)} \\ q_{c,i-1}(t, l_{c,i-1}) + q_{c,i-2}(t, l_{c,i-2}) & \text{(内部リンク)} \end{cases} \quad (8)$$

## 3. 等価周波数伝達関数の導入

### 3.1 斜面域における等価周波数伝達関数の導入

i 番目の部分流域の斜面流出に関する  $r(t) \sim q_{s,i}(t, l_{s,i})$  間の

等価周波数伝達関数  $Z_{s,i}(j\omega)$  を求めるために式 (9) ~ (11) を設定する。

$$r(t) = \bar{r} + B_{s,i} e^{j\omega t} \quad (9)$$

$$q_{s,\delta,i}(t, x) = \bar{q}_{s,\delta,i}(x) + C_{s,\delta,i}(x) e^{j\omega t} \quad (10)$$

$$h_{s,\delta,i}(t, x) = \bar{h}_{s,\delta,i}(x) + D_{s,\delta,i}(x) e^{j\omega t} \quad (11)$$

$\omega$ : 周波数  $\bar{h}_{s,\delta,i}, \bar{q}_{s,\delta,i}, \bar{r}$ : 定常状態における水深  $j$ : 虚数単位  
 斜面流出量、降雨量  $B_{s,i}$ : 定数  $C_{s,\delta,i}, D_{s,\delta,i}$ : 未知の複素数

式 (9) ~ (11) を (1) (2) に代入し、高調波成分を無視することによって次式を誘導できる。

$$\bar{q}_{s,\delta,i} = \bar{r} x \quad 0 \leq x \leq l_{s,\delta,i} \quad (12)$$

$$\frac{dC_{s,\delta,i}}{dx} + \frac{j\omega}{p_s} \left\{ \frac{(\bar{r}x)^{1-p_s}}{\alpha_{s,\delta,i}} \right\}^{1/p_s} C_{s,\delta,i} = B_{s,i} \quad (13)$$

$$C_{s,\delta,i}(0) = 0 \quad (14)$$

式 (14) は式 (4)、(10) より誘導されたものである。式 (13) を解くことより、 $Z_{s,\delta,i}(j\omega)$  は次式によって定義される。

$$Z_{s,\delta,j}(j\omega) = \frac{C_{s,\delta,j}(l_{s,\delta,j})}{B_{s,j}l_{s,\delta,j}} = e^{-j\omega t_{s,\delta,j}} {}_1F_1[p_s, 1 + p_s, j\omega t_{s,\delta,j}] \quad (15)$$

$$t_{s,\delta,j} = \left\{ \frac{\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{-p_s} l_{s,\delta,j}}{\alpha_{s,\delta,j}} \right\}^{1/p_s} \quad (16)$$

式(15)の ${}_1F_1[a,b,c]$ は次式で定義される Kummer の合流型超幾何関数である。

$${}_1F_1[a,b,c] = 1 + \frac{ac}{b} + \frac{a(a+1)c^2}{2!b(b+1)} + \dots \quad (17)$$

### 3.2 河道域における等価周波数伝達関数の導入

$r(t) \sim q_{c,j}(t, l_{c,j})$ の間における等価周波数伝達関数 $Z_{c,j}(j\omega)$ を求めるために次式を設定する。

$$q_{c,j}(t, y) = \bar{q}_{c,j}(y) + C_{c,j}(y)e^{j\omega t} \quad (18)$$

$$a_i(t, y) = \bar{a}_i(y) + D_{c,j}(y)e^{j\omega t} \quad (19)$$

$C_{c,j}, D_{c,j}$ : 未知の複素数  $\bar{q}_{c,j}, \bar{a}_i$ : 定常状態における河道流量, 流積  
又, 式(8)の境界条件より, 式(20), (21)を得る。

$$\bar{q}_{c,j}(0) = \begin{cases} 0 & \text{(外部リンク)} \\ \bar{q}_{c,j-1}(l_{c,j-1}) + \bar{q}_{c,j-2}(l_{c,j-2}) = \bar{r}(A_{r,j-1} + A_{r,j-2}) & \text{(内部リンク)} \end{cases} \quad (20)$$

$$C_{c,j}(0) = \begin{cases} 0 & \text{(外部リンク)} \\ C_{c,j-1}(l_{c,j-1}) + C_{c,j-2}(l_{c,j-2}) & \text{(内部リンク)} \end{cases} \quad (21)$$

$A_{r,j}$  は図-1 に示す  $i$  番目の部分流域を最下流の部分流域と

する流域の面積を表している。 $i$  番目の部分流域を  $A_i$  と

する。式(5)の右辺を(12)(15)を用いて書きなおす。

$$\sum_{\delta=1}^2 q_{s,\delta,j}(t, l_{s,\delta,j}) = \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,j} \left\{ \bar{r} + B_{s,j} Z_{s,\delta,j}(j\omega) e^{j\omega t} \right\} \quad (22)$$

式(18)(19)(22)を式(4)に代入して次式を誘導する。

$$\frac{d\bar{q}_{c,j}}{dy} = \bar{r} \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,j} \quad (23)$$

$$\frac{dC_{c,j}}{dy} + j\omega D_{c,j} = B_{s,j} \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,j} Z_{s,\delta,j}(j\omega) \quad (24)$$

式(20)を考慮して式(23)を解く。

$$\bar{q}_{c,j}(y) = \begin{cases} \bar{r} \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,j} y & \text{(外部リンク)} \\ \bar{r}(A_{r,j-1} + A_{r,j-2}) + \bar{r} \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,j} y & \text{(内部リンク)} \end{cases} \quad (25)$$

式(18)(19)を式(6)に代入して次式を得る。

$$\bar{q}_{c,j} = \beta_i (\bar{a}_i)^{p_c} \quad (26)$$

$$C_{c,j} = p_c \beta_i (\bar{a}_i)^{p_c - 1} D_{c,j} \quad (27)$$

したがって式(26)(27)を式(24)に代入して次式が誘導できる。

$$\frac{dC_{c,j}}{dy} + \frac{j\omega}{p_c} \left\{ \frac{(\bar{q}_{c,j})^{1-p_c}}{\beta_i} \right\}^{1/p_c} C_{c,j} = B_{s,j} \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,j} Z_{s,\delta,j}(j\omega) \quad (28)$$

また $Z_{k,j}(j\omega)$ は次式によって定義される。

$$Z_{k,j}(j\omega) = \frac{C_{c,j}(l_{c,j})}{BA_{r,j}} \quad (29)$$

今, 式(30)の変数を導入して式(28)を書き直す。

$$E_i = \frac{C_{c,j}}{B} \quad (30)$$

$$\frac{dE_i}{dy} + \frac{j\omega}{p_c} \left\{ \frac{(\bar{q}_{c,j})^{1-p_c}}{\beta_i} \right\}^{1/p_c} E_i = \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,j} Z_{s,\delta,j}(j\omega) \quad (31)$$

$$E_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{(外部リンク)} \\ E_{i-1}(l_{c,i-1}) + E_{i-2}(l_{c,i-2}) & \text{(内部リンク)} \end{cases} \quad (32)$$

等価周波数伝達関数は次式によって与えられる。

$$Z_{k,j}(j\omega) = \frac{E_i(l_{c,i})}{A_{r,j}} \quad (33)$$

### 4. 遅れ系の周波数伝達関数による等価周波数伝達関数の近似

今, 式(34)の3次遅れ系を考える。

$$G_{1,j} \frac{d^3 q_i}{dt^3} + G_{2,j} \frac{d^2 q_i}{dt^2} + G_{3,j} \frac{dq_i}{dt} + q_i = r \quad (34)$$

$$q_i(0) = 0 \quad \left[ \frac{d^2 q_i}{dt^2} \right]_{t=0} = 0 \quad \left[ \frac{dq_i}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad (35)$$

$G_{1,j}, G_{2,j}, G_{3,j}$ : 定数

式(33)の周波数伝達関数 $Z_{q,j}(j\omega)$ は式(34)によって与えられる。

$$Z_{q,j}(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{1 - j\omega^2 G_{2,j} - j\omega(G_{1,j}^2 - G_{3,j})} \quad (36)$$

式(33)の遅れ系の周波数伝達関数 $Z_{k,j}(j\omega)$ が, 式(36)の

$Z_{q,j}(j\omega)$ によって近似できるものとする。 $Z_{q,j}(j\omega)$ が

$Z_{k,j}(j\omega)$ を近似しているならば,  $Z_{q,j}(j\omega), Z_{k,j}(j\omega)$ から求

まるインパルス応答関数 $z_{q,j}(t), z_{k,j}(t)$ もまたお互いに近似していることになる。

今, 任意の時間関数 $f(t)$ のフーリエ変換関数を $F(j\omega)$

とする。フーリエ変換関数のモーメント定理より式(37)を得る。

$$\left[ \frac{d^n F}{d\omega^n} \right]_{\omega=0} = (-j)^n \int_0^{\infty} t^n f(t) dt \quad n=1,2,3 \dots \quad (37)$$

$F(j\omega) = Z_{q,i}(j\omega)$  として式(37)を計算して式(38)～(40)を得る.

$$\left[ \frac{dZ_{k,i}(j\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=0} = \left[ \frac{dZ_{q,i}(j\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=0} = -jG_3 \quad (38)$$

$$\left[ \frac{d^2 Z_{k,i}(j\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} = \left[ \frac{d^2 Z_{q,i}(j\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} = 2G_2 - 2G_3^2 \quad (39)$$

$$\left[ \frac{d^3 Z_{k,i}(j\omega)}{d\omega^3} \right]_{\omega=0} = \left[ \frac{d^3 Z_{q,i}(j\omega)}{d\omega^3} \right]_{\omega=0} = j(6G_1 - 12G_2G_3 + 6G_3^3) \quad (40)$$

式(38)～(40)より式(41)～(43)を得る.

$$G_{3,i} = j \left[ \frac{dZ_{k,i}(j\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=0} \quad (41)$$

$$G_{2,i} = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{d^2 Z_{k,i}(j\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} + 2G_{3,i}^2 \right) \quad (42)$$

$$G_{1,i} = \frac{1}{6} \left( -j \left[ \frac{d^3 Z_{k,i}(j\omega)}{d\omega^3} \right]_{\omega=0} + 12G_{2,i}G_{3,i} - 6G_{3,i}^3 \right) \quad (43)$$

次に, 計算を容易にするために次式を定義する.

$$V_1 = \frac{1}{j} \left[ \frac{dE_i}{d\omega} \right]_{\omega=0} \quad (44)$$

$$V_2 = \left[ \frac{d^2 E_i}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} \quad (45)$$

$$V_3 = \frac{1}{j} \left[ \frac{d^3 E_i}{d\omega^3} \right]_{\omega=0} \quad (46)$$

式(31)の両辺を  $\omega$  で微分し  $\omega=0$  とし, 式(44)～(46)を用いて式(47)～(49)を誘導できる.

$$\frac{dV_{1,i}}{dy} - \frac{1}{p_c} \left\{ \frac{(\bar{q}_{c,i})^{-p_c}}{\beta_i} \right\}^{1/p_c} [E_i]_{\omega=0} = F_{1,i} \quad (47)$$

$$\frac{dV_{2,i}}{dy} + \frac{2}{p_c} \left\{ \frac{(\bar{q}_{c,i})^{-p_c}}{\beta_i} \right\}^{1/p_c} V_{1,i} = F_{2,i} \quad (48)$$

$$\frac{dV_{3,i}}{dy} + \frac{3}{p_c} \left\{ \frac{(\bar{q}_{c,i})^{-p_c}}{\beta_i} \right\}^{1/p_c} V_{2,i} = F_{3,i} \quad (49)$$

$$F_{1,i} = \frac{1}{1+p_s} \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,i} t_{s,\delta,i} \quad (50)$$

$$F_{2,i} = \frac{-2}{(1+p_s)(2+p_s)} \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,i} t_{s,\delta,i}^2 \quad (51)$$

$$F_{3,i} = \frac{6}{(1+p_s)(2+p_s)(3+p_s)} \sum_{\delta=1}^2 l_{s,\delta,i} t_{s,\delta,i}^3 \quad (52)$$

$$V_{k,i}(0) = \begin{cases} 0 & \text{(外部リンク)} \\ V_{k,i-1}(l_{c,i-1}) + V_{k,i-2}(l_{c,i-2}) & \text{(内部リンク)} \end{cases} \quad (53)$$

式(46)の  $[E_i]_{\omega=0}$  は式(30)において  $\omega=0$  としたときの解

$$\text{である. } [E_i]_{\omega=0} = \frac{\bar{q}_{c,i}(y)}{r} \quad (54)$$

式(41)～(43)の  $G_{k,i}$   $k=1,2,3$  は式(55)～(57)によって計算できる.

$$G_{3,i} = \frac{V_{1,i}(l_{c,i})}{A_{r,i}} \quad (55)$$

$$G_{2,i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{V_{2,i}(l_{c,i})}{A_{r,i}} + 2G_{3,i}^2 \right\} \quad (56)$$

$$G_{1,i} = \frac{1}{6} \left\{ \frac{V_{3,i}(l_{c,i})}{A_{r,i}} + 12G_{2,i}G_{3,i} - 6G_{3,i}^3 \right\} \quad (57)$$

## 5. Kinematic wave 式の計算

式(1), (2)及び(5), (6)のKinematic wave式による流出計算は通常, 差分計算によって流出量を求めている. 一方 Kenneth G. Eggert<sup>1)</sup>は降雨波形が階段関数であることに着目して, 式(1), (2)の理論解を求めている. 5章では Kenneth G. Eggert<sup>1)</sup>の理論を紹介するとともに, 式(5), (6)を理論的に解く手法について述べる.

### 5.1 斜面流出の計算

基礎式の特微方程式から次式を得る.

$$\int_{h_0}^h dh_i = \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \quad \int_{x_0}^x dx_i = \alpha p_s \int_{t_0}^t h_i^{p_s-1} d\tau \quad (58)$$

また, 雨量  $r(t)$  を次のように定義する.

$$r(t) = \sum_{i=1}^n r_i [U\{t - (i-1)\} - U\{t - i\}] \quad (59)$$

$U(t)$ : 単位ステップ関数,  $n$ : 降雨継続時間  
( $t, x$ ) = ( $t_0, 0$ ) ( $i-1 \leq t_0 < i$ ) から計算する場合を考える. (57), (58)式より次式を得る.

$$h(t) = r_{k+1}t + h_0 \quad (60)$$

$$h_0 = \begin{cases} -rt_0 & (k = i-1) \\ r_i(i-t_0) + \sum_{j=i+1}^k r_j + r_{k+1}(t-k) & (k \geq i) \end{cases} \quad (61)$$

但し, ( $k < t \leq k+1$ ) である. 次に  $x(t)$  を考える. (58), (60), (61)式より

$$x(t) = \begin{cases} \alpha p_s h_0^{p_s-1} (t-t_0) & r_{k+1} = 0 \\ \frac{\alpha}{r_{k+1}} \left\{ (r_{k+1}t + h_0)^{p_s} - (r_{k+1}t_0 + h_0)^{p_s} \right\} & r_{k+1} \neq 0 \end{cases} \quad (62)$$

(60)~(62)式を用いて、 $t=i, i+1, \dots, n$  における  $x(t)$ ,  $h(t)$  をそれぞれ計算し斜面末端までの到達時間を求める。

i)  $x(k) \leq l_s < x(k+1)$  となる場合 (図-2)

$r_n \neq 0$  より、次式から  $t_s$  を求める。

$$t_s = \frac{1}{r_{k+1}} \left[ \left\{ \frac{r_{k+1}}{\alpha} l_s + (r_{k+1} t_0 + h_0)^{p_s} \right\}^{\frac{1}{p_s}} - h_0 \right] \quad (63)$$

ii)  $x(n) < l_s$  となる場合 (図-3)

$x(t) = l_s$ ,  $h_0 = h(n)$  とし、次式から  $t_s$  を求める。

$$t_s = \frac{l_s}{\alpha p_s \{h(n)\}^{p_s-1}} + t_0 \quad (64)$$

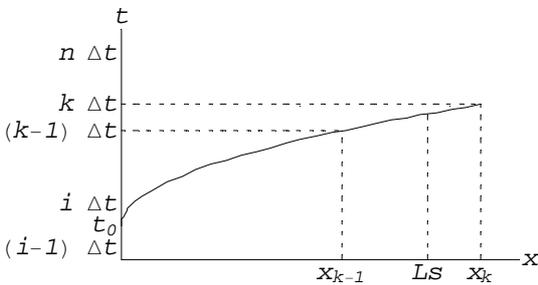


図-2 t 軸上を起点とする特性曲線 (1)

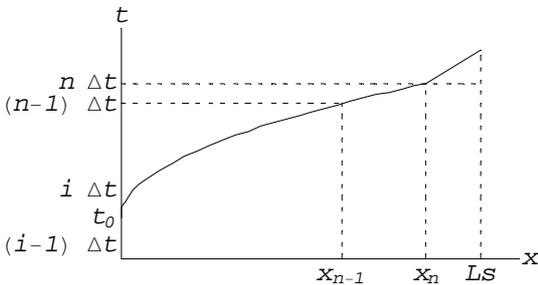


図-3 t 軸上を起点とする特性曲線 (2)

また  $(t, x) = (0, x_0)$  から計算する場合は (59) 式で  $t_0 = 0$  とすると、 $h(t)$  は  $x_0$  によって変化せず次式で表される

$$h(t_s) = r_{k+1}(t_s - k) + \sum_{j=1}^k r_j \quad k < t_s \leq k+1 \quad (65)$$

以上の計算から  $t_0$  に対応する  $t_s$  が算出でき、基礎式と

(59) 式により斜面末端流量  $q_s(t_s, l_s)$  を得る。さらに  $t_0$  を変化させ繰り返し計算を行うことにより、指定した  $dt$  区切りの計算結果を得ることができる。

## 5.2 河道流出の計算

斜面の計算と同様に基礎式の特性方程式から次式を得る。

$$\int_{t_0}^t da_1 = \int_{t_0}^t q_s(\tau) d\tau \quad \int_{y_0}^y dy_1 = \beta p_c \int_{t_0}^t a^{p_s-1} d\tau \quad (66)$$

斜面流出の計算結果より  $q_s(t)$  を次のように定義する。

$$q_s(t) = A_t + B_t \quad (67)$$

$$A_t = \frac{q_s(idt) - q_s\{(i-1)dt\}}{dt} \quad (68)$$

$$B_t = q_s(idt) - A_t \times idt \quad (69)$$

(66)~(68) 式を (65) 式に代入して計算を進める。  $y(t)$  を求める際の積分には以下の超幾何関数を用いて計算を行った。

$${}_2F_1[a, b, c, z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (70)$$

その後の計算は斜面計算と同様なので省略する。

## 6. 計算例とまとめ

図-4 に示す部分流域において 4 章で示した遅れ系による近似計算と 5 章で示した理論計算の計算結果を比較する。

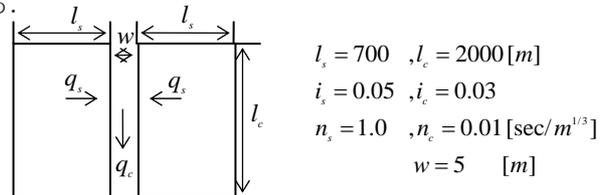


図-4 計算対象の部分流域

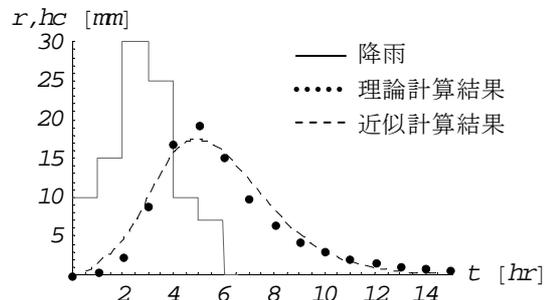


図-5 雨量および河道末端流出高

図-5 に計算結果を示す。今回の計算では災害が発生するような激しい降雨に対しての流出計算を行った。遅れ系による近似計算の精度が高いことが示されている。今後今回の手法を複雑な河道網流域に適用し検証する必要がある。

## 参考文献

- 1) Kenneth G. Eggert: Upstream Calculation of Characteristics for Kinematic wave Routing, Journal of Hydraulic Engineering vol. 113/No. 6 pp743-752, 1987
- 2) 藤田睦博, Surakha WANPHEN, 田中岳, 清水康行: 等価周波数応答法に基づく Kinematic wave モデルの集中化に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No. 726/II-62, pp. 11-30, 2003