

導関数に基づく最適化手法の比較

Comparison of Derivative-Based Optimization Procedures for Storage Routing Models

(株) リブテック

○正 員 仙庭真司 (Shinji Senba)

(財) 北海道河川防災研究センター フェロー 星 清 (Kiyoshi Hoshi)

北海道工業大学土木工学科

フェロー 橋本識秀 (Norihide Hashimoto)

1. はじめに

対象河川流域の洪水流出過程を何らかの流出モデルで表現しようとする場合、実績洪水資料(雨量・流量系列)を用いて、実測ハイドログラフに最も適合するようにモデル定数を推定することが必要となる。この推定法がシステム同定あるいはモデル定数の最適化と言われるものである。このとき、なんらかの客観的基準によってモデル定数の最適値同定を効率よく行う最適化手法が必要となる。

種々の最適化手法が存在するが、その中でももっとも理解が容易で、実用的にも有効な方法は、ニュートン法に代表される導関数を用いた最適化手法であると言われている¹⁾²⁾。

本報告では、一般化貯留関数法を洪水流出モデル解析例として取り上げ、次の3種類の最適化法について検討を行う。

- (i) 一階ニュートン法(一次微係数利用)
- (ii) 二階ニュートン法(一次微係数と二次微係数利用)
- (iii) ダビドン法(一次微係数と二次微係数利用)

数学的最適化手法の成否は、いかに効率よく導関数を算出するかに依存する。上記の3種類の最適化手法の適用にあたっては、感度方程式を導出して、導関数(微係数)を解析的に算定している。

2. 一般化貯留関数モデル

流出解析を行うにあたって、以下に示す二価非線形貯留関数モデルを適用する。

$$s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad , \quad \frac{ds}{dt} = r - q \quad (1)$$

ここで、 s :貯留高[mm]、 k_{11} 、 k_{12} 、 p_1 、 p_2 :モデル定数、 r :有効雨量[mm/h]、 q :直接流出高[mm/h]

式(1)中のモデル定数 k_{11} 、 k_{12} 、 p_1 及び p_2 は参考文献 3)によれば、次式で表わされることがわかっている。

$$\begin{aligned} k_{11} &= 2.8235 f_c A^{0.24} \quad , \quad k_{12} = 0.2835 k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ p_1 &= 0.6 \quad , \quad p_2 = 0.4648 \quad , \quad f_c = (n/\sqrt{i})^{0.6} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 A :流域面積[km²]、 $\bar{r}$:平均有効雨量強度[mm/h]、 n :等価粗度[s/m^{1/3}]、 i :平均斜面勾配

参考文献 3)では、一般化貯留関数法の定数、 k_{11} 及び k_{12} を一階ニュートン法により二次元同時最適化を行っている。

式(2)の関係式からわかるように、 f_c (通常1.0~2.0程度)の値が求められれば、 k_{11} 及び k_{12} の値が一義的に決定されることに着目し、本報告では f_c の一次元探索を行う。

3. 目的関数の設定

モデル定数の最適同定の評価基準としては、観測流量 q_m^* と計算流量 q_m との誤差二乗和平均の最小化が用いられている。つまり、目的関数は次式で与えられる。

$$MSE(f_c) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \{e_m(f_c)\}^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \{q_m^* - q_m(f_c)\}^2 \quad (3)$$

現ステップでの定数値 f_c はすでに既知となっているから、次のステップでの値を計算するためにはモデル定数の補正項、 Δf_c をいかに効率よく算定するかが最適化手法の主要課題となる。そこで、最適化計算における繰返し計算を終了させる条件は、次の収束条件を満たした時点とする。

$$|\Delta f_c / f_c| < \varepsilon \quad (4)$$

ここで、 ε は収束許容限界値(通常 $10^{-3} \sim 10^{-4}$)である。

3.1 一階ニュートン法を用いた Δf_c の算定

次のステップでの誤差項 $e_m(f_c + \Delta f_c)$ をモデル定数 f_c の近傍で一次テーラー級数展開すると、次式が得られる。

$$e_m(f_c + \Delta f_c) = e_m(f_c) + \frac{\partial e_m}{\partial f_c} \Delta f_c \quad (5)$$

ここで、計算流出高 q_m に関する微係数 u_m を次式で定義する。

$$u_m = \frac{\partial q_m}{\partial f_c} = - \frac{\partial e_m}{\partial f_c} \quad (6)$$

式(5)を式(3)に代入し、 Δf_c で微分すると次式が得られる。

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \{ [e_m(f_c) - u_m \Delta f_c] [-u_m] \} = 0 \quad (7)$$

式(7)より更新値 Δf_c は、次式で得られる。

$$\Delta f_c = \sum_{m=1}^N e_m u_m / \sum_{m=1}^N u_m^2 \quad (8)$$

式(8)からわかるように、 Δf_c を求めるためには、式(6)で表わされる微係数 u_m が必要となる。

3.2 ニュートン法を用いた Δf_c の算定

次のステップでの誤差項 $e_m(f_c + \Delta f_c)$ をモデル定数 f_c の近傍で二次テーラー級数展開すると、次式が得られる。

$$e_m(f_c + \Delta f_c) = e_m + \frac{\partial e_m}{\partial f_c} \Delta f_c + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_m}{\partial f_c^2} (\Delta f_c)^2 \quad (9)$$

ここで、計算流出高 q_m に関する微係数を次式で定義する。

$$u_m = \frac{\partial q_m}{\partial f_c} = -\frac{\partial e_m}{\partial f_c}, \quad w_m = \frac{\partial^2 q_m}{\partial f_c^2} = -\frac{\partial^2 e_m}{\partial f_c^2} \quad (10)$$

式(9)を式(3)に代入し、 Δf_c で微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial J(f_c + \Delta f_c)}{\partial \Delta f_c} = \frac{1}{2} w_m^2 (\Delta f_c)^3 + \frac{3}{2} u_m w_m (\Delta f_c)^2 + (u_m^2 - e_m w_m) \Delta f_c - e_m u_m = 0 \quad (11)$$

上式において、式の煩雑さを避けるため、 m に関する合計値を表す Σ 記号を省略した。

式(11)は三次方程式であり、 Δf_c の数値解を求めるためには、式(11)を $f(\Delta f_c)$ と定義し、 $f(\Delta f_c)$ を Δf_c で微分すると、次の二式が得られる。

$$\begin{cases} f(\Delta f_c) = \frac{1}{2} w_m^2 (\Delta f_c)^3 + \frac{3}{2} u_m w_m (\Delta f_c)^2 + (u_m^2 - e_m w_m) \Delta f_c - e_m u_m \\ f'(\Delta f_c) = \frac{3}{2} w_m^2 (\Delta f_c)^2 + 3 u_m w_m \Delta f_c + (u_m^2 - e_m w_m) \end{cases} \quad (12)$$

一階ニュートン法を用いて、 Δf_c の初期値 Δf_{c0} を式(8)で計算して、上式に代入し、 Δf_c の補正項 $\Delta(\Delta f_c)$ を次式で求める。

$$\Delta(\Delta f_c) = -\frac{f(\Delta f_c)}{f'(\Delta f_c)} \quad (13)$$

式(13)を用い、 Δf_c を $\Delta f_c = \Delta f_c + \Delta(\Delta f_c)$ にて更新し、次の収束条件を満たした時点で Δf_c を決定する。

$$|f(\Delta f_c)| < \varepsilon \quad (14)$$

ここで、 ε は収束許容限界値(通常 $10^{-3} \sim 10^{-4}$)である。

以上によって求められた補正項 Δf_c を用いて、 f_c を $f_c + \Delta f_c$ にて更新し、式(4)の収束条件を満たすまで繰り返し計算を行う。

式(11)からわかるように、補正項 Δf_c を求めるためには、式(10)で表わされる微係数 u_m 及び w_m が必要となる。

3.3 ダビドン法を用いた Δf_c の算定

目的関数 $J(f_c + \Delta f_c)$ を二次テーラー級数展開すると、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} J(f_c + \Delta f_c) &= J(f_c) + \frac{\partial J(f_c)}{\partial f_c} \Delta f_c + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(f_c)}{\partial f_c^2} (\Delta f_c)^2 \\ &= J(f_c) + g \Delta f_c + \frac{1}{2} G (\Delta f_c)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、次式を定義する。

$$g = \frac{\partial J(f_c)}{\partial f_c}, \quad G = \frac{\partial^2 J(f_c)}{\partial f_c^2} \quad (16)$$

式(15)を Δf_c で微分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial J(f_c + \Delta f_c)}{\partial (\Delta f_c)} = g + G \Delta f_c = 0 \quad (17)$$

ここで、目的関数の微係数は、次式で算定される。

$$\begin{cases} g = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (q_m^* - q_m) \frac{\partial q_m}{\partial f_c} \\ = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (q_m^* - q_m) u_m \\ G = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ (q_m^* - q_m) \frac{\partial^2 q_m}{\partial f_c^2} - \left(\frac{\partial q_m}{\partial f_c} \right)^2 \right\} \\ = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ (q_m^* - q_m) w_m - u_m^2 \right\} \end{cases} \quad (18)$$

式(17)より、モデル定数更新値 Δf_c は次式で与えられる。

$$\Delta f_c = -G^{-1} g \quad (19)$$

式(18)からわかるように、 Δf_c を求めるためには、式(18)中で用いられる微係数 u_m 及び w_m が必要となる。

上述した3種類の最適化手法においては、一次・二次微係数を必要とする。したがって、以下に一般化貯留関数モデルにおける一次・二次微係数を算定する方法を述べる。

4. 一般化貯留関数法の感度方程式

式(1)で表わされる一般化貯留関数モデルは、次のシステム方程式に置き換えることができる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, f_c) = -\frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2} - \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (20)$$

ここで、

$$x_1 = q^{p_2}, \quad x_2 = d(q^{p_2})/dt \quad (21)$$

式(2)において、次式を定義する。

$$\alpha = 2.8235 A^{0.24}, \quad \beta = 0.2835 \alpha^2 (\bar{r})^{-0.2648} \quad (22)$$

式(22)を用いると、 k_{11} 及び k_{12} は次式で表わされる。

$$k_{11} = \alpha f_c, \quad k_{12} = \beta f_c^2 \quad (23)$$

式(20)を一次の項までテーラー級数展開し、線形化近似すると、次の行列式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = AX + D \quad (24)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$a_1 = \partial f_2 / \partial x_1, \quad a_2 = \partial f_2 / \partial x_2$$

$$d = f_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2$$

式(24)を離散化表示すると、次式となる。

$$X_{m+1} = \Phi X_m + \Gamma D_m \quad (26)$$

式(26)中の係数行列 Φ 及び Γ の値は、次式のマクローリン展開で計算するものとする。

$$\Phi = e^{AT} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = (e^{AT} - I)A^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

ここで、 T は計算時間間隔 ($T \leq 1$) である。

4.1 一次微係数の算定

$q = x_1^{1/p_2}$ を定数 f_c について微分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial q}{\partial f_c} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} u_1 \quad (28)$$

式(28)中の一次微係数 u_1 を算定するためには、定数 f_c が時間的に変化しないと仮定して、式(20)を定数 f_c について微分すれば、次式に示される一次微係数に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{dU}{dt} = AU + B \quad (29)$$

上式において、次式を定義する。

$$U = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial f_c \\ \partial x_2 / \partial f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$b = \frac{\partial f_2}{\partial f_c} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c} = b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_3$$

$$b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}}, \quad b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c}, \quad \alpha_3 = \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c}$$

式(29)を離散化表示すると、次式で表わされる。

$$U_{m+1} = \Phi U_m + \Gamma B_m \quad (31)$$

係数 Φ 及び Γ は式(27)で計算された係数と同じである。

式(31)の離散式を用いると、任意の離散時刻 m における一次微係数が解析的に算定されたことになる。

4.2 二次微係数の算定

式(28)を定数 f_c について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial f_c^2} &= \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial f_c} \right)^2 + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial f_c^2} \\ &= \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} u_1^2 + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} w_1 \end{aligned} \quad (32)$$

式(32)中の二次微係数 w_1 を算定するためには、定数 f_c が時間的に変化しないと仮定して、式(29)を定数 f_c について微分すれば、次式に示される二次微係数に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{dW}{dt} = AW + V \quad (33)$$

$$W = \begin{bmatrix} \partial^2 x_1 / \partial f_c^2 \\ \partial^2 x_2 / \partial f_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (34)$$

なお、式(34)中の v は複雑であるため、ここでは省略する。

式(33)を離散化表示すると、次式で表わされる。

$$W_{m+1} = \Phi W_m + \Gamma V_m \quad (35)$$

係数 Φ 及び Γ は式(27)で計算された係数と同じである。

式(35)の離散式を用いると、任意の離散時刻 m における二次微係数が解析的に算定されたことになる。

5. 実洪水資料による最適化計算の比較

一般に、貯留関数法は直接流出量に対して適用される場合が多い。このため、片対数紙上でのハイドログラフ低減部第2折曲点と洪水立上り点を結んで、直接流出成分と基底流出成分に分離した。総直接流出量と総雨量の比から流出率を算出し、観測雨量に流出率を乗じて有効雨量とした。

解析例として、信濃川水系・笠堀川に位置する笠堀ダム(流域面積 $A=70.0\text{km}^2$) における比較的規模の大きな3個の洪水を選定した。これらの洪水解析例は2山ピークを有する洪水であることが特徴として掲げられる。解析洪水例の特性を要約して、表-1 に示す。

式(1)に示される一般化貯留関数法に関して、以下の2つの最適化法を試みた。

- (a) 式(2)に示されるように、 f_c が求まれば、定数 k_{11} と k_{12} は一義的に決定されるので、これを一次元探索法とする。
- (b) 式(2)に示される関数関係を無視して、定数 k_{11} と k_{12} の同時最適化を行う。これを二次元探索法とする。

表-2 には最適化結果を比較するための精度評価指標を示す。表-3 には、3個の洪水例における最適化結果と精度評価指標が示されている。また、表-4 には、一次元探索と二次元探索による計算ピーク流量を実測ピーク流量 [m^3/s] と比較して示す。その結果を要約して以下に述べる。

表-1 解析洪水データの洪水特性

信濃川・笠堀ダム	S63.7.9	H7.7.19	H7.8.1
ピーク流量 [m^3/s]	231.30	145.66	236.63
比流量	3.3043	2.0809	3.3804
平均有効雨量強度 [mm/h]	4.6188	3.0216	4.7681
流出率	0.5173	0.7465	0.6949

表-2 精度評価指標式

指標	J_{re}	E	E_v	E_p
数式	$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{ q_{om} - q_{cm} }{q_{om}}$	$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{q_{om} - q_{cm}}{q_{op}} \right\}^2$	$\frac{\sum_{m=1}^N q_{om} - \sum_{m=1}^N q_{cm}}{\sum_{m=1}^N q_{om}}$	$\frac{q_{op} - q_{cp}}{q_{op}}$

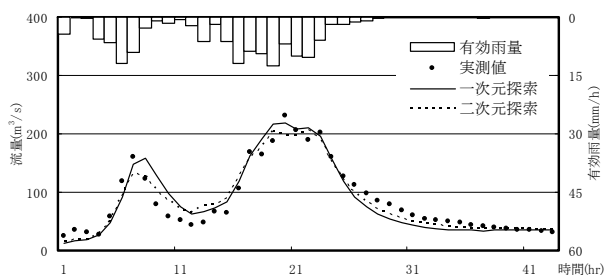
ここで、 q_{om} : 実測流出高 [mm/h]、 q_{cm} : 計算流出高 [mm/h]、 q_{op} : 実測ピーク流出高 [mm/h]、 q_{cp} : 計算ピーク流出高 [mm/h]、 N : データ数

表－3 笠堀ダム流入量解析結果

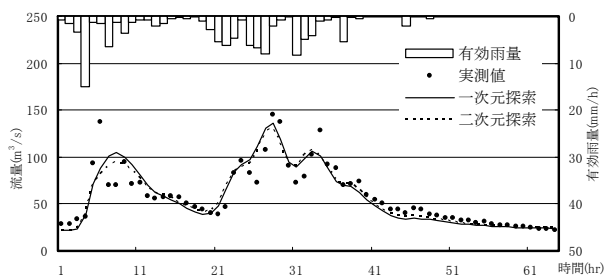
	S63.7.9		H7.7.19		H7.8.1	
探索法	一次元	二次元	一次元	二次元	一次元	二次元
f_c の初期値	1.0		1.0		1.0	
最適値 f_c	0.96	—	1.90	—	0.91	—
最適値 k_{11}	7.48	9.02	8.55	9.67	7.13	8.99
最適値 k_{12}	10.58	5.23	15.47	13.06	9.54	4.13
一階 N 法	6 回	7 回	7 回	発散	10 回	9 回
二階 N 法	4 回	8 回	5 回	5 回	5 回	12 回
ダビンソン法	4 回	8 回	5 回	6 回	5 回	5 回
MSE	0.924	0.627	0.489	0.449	1.880	1.002
J_{re}	0.388	0.339	0.310	0.285	0.350	0.262
E	0.008	0.005	0.012	0.011	0.014	0.007
E_v	0.014	0.026	0.015	0.021	0.015	0.029
E_p	0.063	0.122	0.073	0.124	-0.215	-0.062

表－4 実測ピーク流量と計算ピーク流量の差異[m³/s]

	S63.7.9		H7.7.19		H7.8.1	
探索法	一次元	二次元	一次元	二次元	一次元	二次元
実測値	231.30		145.66		236.63	
計算値	218.10	206.70	136.64	130.29	285.36	250.60



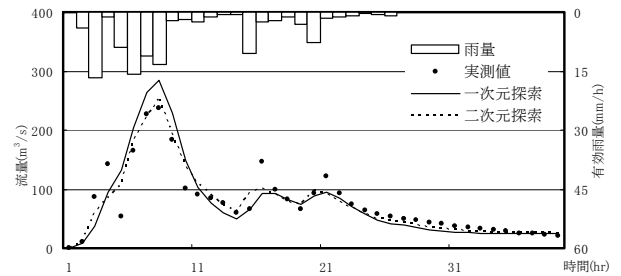
図－1 昭和 63 年 7 月 9 日洪水例



図－2 平成 7 年 7 月 19 日洪水例

6. まとめ

- (a) 3種の最適化手法のうち、二次元探索において、一階ニュートン法で発散、ダビンソン法で計算時間間隔の違いによって解が得られないケースも見られた。一次元探索では3種の最適化手法で解が得られている。収束した例では、二



図－3 平成 7 年 8 月 1 日洪水例

次微係数を用いる二階ニュートン法とダビンソン法で繰り返し計算が少なくなる傾向が見られる。今後、多数の洪水例での検証が必要である。

- (b) 式(3)の目的関数値 MSE は、 k_{11} と k_{12} の二次元探索の方が小さくなるのは自明である。
- (c) ハイドログラフの相対誤差を表す J_{re} は一次元・二次元探索において同程度ある。
- (d) ピーク流量に対するハイドログラフの誤差を表す E の値も、0.01 前後で、一次元・二次元探索においてほぼ同程度であると言える。
- (e) 全流出量のボリュームに関する相対誤差 E_v は、一次元探索の方が二次元探索に比べて小さく、0.015 程度である。
- (f) 表－4 において、一次元探索による計算ピーク流量は、二次元探索によるピーク流量よりも大きくなる傾向にある。
- (g) 図－1 から図－3 には、3洪水例における実測ハイドログラフと計算ハイドログラフを比較して示す。一次元探索における再現計算も実用性十分な精度を有していると考えられる。なお、図－1 から図－3 においては、計算流出量に基底流出成分を加えて表示してある。
- (h) ピーク流量の相対誤差 E_p は、2洪水例において、一次元探索の方が小さい。すなわち、 f_c の一次元探索による最適化の方がピーク流量の再現がよい傾向にある。今後とも、多数の洪水例についての検証を必要とする。
- (i) 一次元探索法は、同定すべきモデル定数が1個であるため、最適化計算は二次元探索に比べると容易であり、計算時間も短縮されることが考えられる。また、ハイドログラフの再現性も高く、より実用的であると言える。

参考文献

- Gupta, V.K. and Sorooshian, S.: The Automatic Calibration of Conceptual Catchment Models Using Derivative-Based Optimization Algorithms, Water Resources Research, 21(4), pp.473-485, 1985.
- (財)北海道河川防災研究センター・編集・発行：一般化貯留関数法による流域流出解析・河道洪水追跡実用計算法, 152p., 2001.
- 北海道開発土木試験所・河川研究室：実用的な洪水流出計算法, 北海道開発土木試験所, 185p., 1987.