

厚板の3次元応力解析へのB-splineソリッド要素法の適用について

Three-dimensional stress analysis of rectangular plates using the B-spline solid element method

北海道大学大学院工学研究科

○学生員

名木野晴暢 (Harunobu Nagino)

大同工業大学都市環境デザイン学科

正員

水澤 富作 (Tomisaku Mizusawa)

北海道大学大学院工学研究科

フェロー

三上 隆 (Takashi Mikami)

1. まえがき

近年、構造物の長大化、大型化にともない、かなり厚い平板や極厚板が用いられてきている。厚板構造要素では、板厚の増大にともない、厚さ方向のひずみや応力が無視できなくなり、また面外せん断変形の影響も顕著に現れてくるため、これらの影響を考慮できる3次元弾性論に基づく解析が必要になる。しかしながら、3次元構造解析では計算規模に制約を受けるという問題点を考慮しなければならない。

等方性厚板の3次元応力解析に関する研究報告^{1)~8)}は、古くからなされているが、3次元自由振動解析の報告例と比較すると非常に数が少なく、また、境界条件の制約などが見られる。

最近、名木野ら⁹⁾は、系の未知数をできるだけ低減でき、任意の境界条件を取り扱える数値解析法として、B-splineソリッド要素法を定式化した。等方性厚板の3次元自由振動問題へ適用し、その有用性を明らかにした。

本論文では、3次元弾性体で理想化した等方性厚板の3次元応力解析へB-splineソリッド要素法を適用し、解の収束性、精度比較について検討を行ない、本手法の有用性について明らかにすることを目的としている。

2. B-splineソリッド要素の定式化

3次元弾性論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1に示すような8節点からなるB-splineソリッド要素モデルを導く。この方法は、解析領域で仮定される変位場を3方向にB-spline関数で補間したエネルギー原理に基づく離散化手法である。このB-spline関数の次数を高めれば、高次のB-splineソリッド要素モデルが容易に導ける。

まず、式の定式化にあたり、以下のような解析仮定を設ける。

- (i) 3次元弾性理論でモデル化した弾性体は、直方体である。
- (ii) 直方体は、微小変形、線形弾性であると仮定する。
- (iii) 直方体の厚さは、一定である。

また、定式化には、式(1)に示すような無次元直交座標系 (ξ, η, ζ) を用いる。

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \zeta = z/h \quad (1)$$

ここで、 a は直方体の幅、 b は長さ、 h は厚さである。

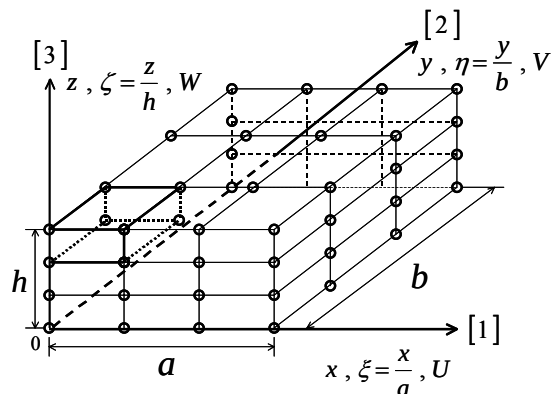


図-1 直方体と無次元直交座標系

B-splineソリッド要素で仮定される x, y, z 方向の変位関数 U, V および W は、それぞれ3方向にB-spline関数を用いて、次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{l=1}^{i_z} A_{mnl} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) \cdot N_{l,k}(\zeta) \\ V &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{l=1}^{i_z} B_{mnl} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) \cdot N_{l,k}(\zeta) \\ W &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{l=1}^{i_z} C_{mnl} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) \cdot N_{l,k}(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 $N_{m,k}(\xi)$, $N_{n,k}(\eta)$, $N_{l,k}(\zeta)$ は、 $k-1$ 次の正規化されたB-spline関数であり、直交性と $k-2$ 階までの導関数の連続性が保証された滑らかな区分的多項式である。また、 A_{mnl} , B_{mnl} , C_{mnl} は未定係数、 $i_x = k-1+M_x$, $i_y = k-1+M_y$, $i_z = k-1+M_z$, $k-1$ はspline次数であり、 M_x , M_y と M_z は、それぞれ x, y, z 方向のソリッド要素の分割数である。

直方体の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = U_p - F \quad (3)$$

ここで、 U_p はひずみエネルギー、 F は外力ポテンシャルである。

したがって、ポテンシャルエネルギー最小の原理を適用して Π を極値化すれば、次式の代数方程式が得られる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta\}_{mnl}^T} = [K]_{mnl ijs} \{\Delta\}_{ijs} - \{F\}_{ijs} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $[K]_{mnl ijs}$ の大きさは、 $3 \times (k-1+M_x)$

$(k-1+M_y)(k-1+M_z)$ で表され、常に対称マトリックスである。ただし、先に述べたように、 $k-1$ は、spline 次数であり、 M_x 、 M_y と M_z は、それぞれ x 、 y 、 z 方向のソリッド要素の分割数である。

3. 数値計算例および考察

ここでは、直方体でモデル化した等方性厚板の3次元応力解析への本手法 (BSSEM) の適用性について検討する。本手法の解の収束性と局所応力および応力分布の精度比較について示す。解析モデルは、**図-2**に示すような板表面に等分布満載荷重 q を受ける任意の境界条件を持つ厚板である。

ここで、等方性厚板の境界条件は、CS-FS のように表し、それぞれ ξ 軸に垂直な 2 つ境界面 ($\xi=0.0$, 1.0) で固定面 (C)、単純支持面 (S) であり、 η 軸に垂直な 2 つの境界面 ($\eta=0.0$, 1.0) で自由面 (F)、単純支持面 (S) に相当している。

数値計算例に用いる等方性厚板の物性値は、 $\nu=0.3$ であり、たわみや応力は、例えば、 $W(\xi, \eta, \zeta)$ のように表し、 $W(0.5, 0.5, 1.0)$ は、 $\xi=0.5$ 、 $\eta=0.5$ 、 $\zeta=1.0$ の位置でのたわみを表している。

3.1 本手法の解の収束性

まず、本手法の解の収束性について示す。

表-1 には、**図-2** に示すような板表面に等分布満載荷重 q を受ける周面単純支持 (SS-SS) された等方性正方形板 ($b/a=1.0$) の中央断面 ($\eta=0.5$) でのたわみ W と面内方向の垂直応力 σ_x 、 σ_y の収束性に与える spline 次数 $k-1$ と要素分割数 $M_x \times M_y \times M_z$ の影響が示してある。ここで、板厚比 h/a は 0.1 に仮定し、spline 次数 $k-1$ は、2, 3 に設定している。また、要素分割数 $M_x \times M_y \times M_z$ は、等分割で、 $2 \times 2 \times 2$ から $12 \times 12 \times 12$ まで変化させた場合と、 y [η] 方向の要素分割数 M_y を 4 に固定し、 $M_x \times M_z$ を 2×2 から 18×18 まで変化させた不等分割について検討を行っている。

これより、要素分割数 $M_x \times M_y \times M_z$ を等分割にした

場合には、たわみ W 、垂直応力 σ_x 、 σ_y は、2 次の B-spline ソリッド要素を用いると要素分割数を増大させても収束値が得られていないが、3 次の B-spline ソリッド要素を用いれば、一定値への一様な収束状態が示

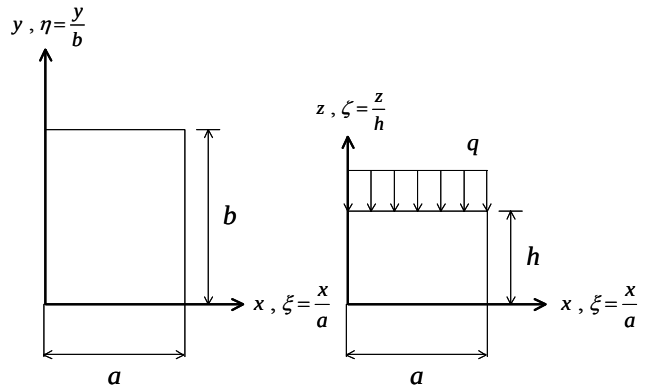


図-2 解析モデル図

表-1 板表面に等分布満載荷重を受ける周面単純支持された等方性正方形板の中央断面でのたわみと垂直応力の収束性に与える spline 次数 $k-1$ と要素分割数 $M_x \times M_y \times M_z$ の影響：

$h/a=0.1, b/a=1.0, \nu=0.3, SS-SS$

k-1	$M_x \times M_y \times M_z$	$W(0.5, 0.5, 0.5)$	$\sigma_x(0.5, 0.5, 1.0)$	$\sigma_y(0.5, 0.5, 1.0)$
2	$4 \times 4 \times 4$	-354.0	-30.91	-30.91
	$8 \times 8 \times 8$	-356.7	-29.23	-29.23
	$10 \times 10 \times 10$	-356.8	-29.15	-29.15
	$12 \times 12 \times 12$	-356.9	-29.11	-29.11
3	$4 \times 4 \times 4$	-357.4	-29.41	-29.41
	$8 \times 8 \times 8$	-356.9	-29.03	-29.03
	$10 \times 10 \times 10$	-356.9	-29.01	-29.01
	$12 \times 12 \times 12$	-356.9	-29.01	-29.01
	$4 \times 4 \times 4$	-357.4	-29.42	-29.42
	$8 \times 4 \times 8$	-357.2	-29.15	-29.29
	$12 \times 4 \times 12$	-357.2	-29.14	-29.28
	$16 \times 4 \times 16$	-357.1	-29.14	-29.28
	$18 \times 4 \times 18$	-357.1	-29.14	-29.28
	Multiplier	qh/G	q	q

表-2 板表面に等分布荷重を受ける周面単純支持された等方性正方形板のたわみと垂直応力の精度比較： $k-1=3, M_x \times M_y \times M_z=10 \times 10 \times 10, \nu=0.3, SS-SS$

b/a	h/a	Solution method	W (0.5,0.5,0.5)	σ_x (0.5,0.5,1.0)	σ_y (0.5,0.5,1.0)
1.0		Present	5522.6	115.22	115.22
	0.05	Srinivas et al. ¹⁾	5522.5	115.26	115.26
		Sundara et al. ²⁾	5523.0	115.20	115.20
		Present	356.90	29.008	29.008
	0.1	Srinivas et al.	356.90	28.998	28.998
		Sundara et al.	356.87	28.983	28.983
2.0		Present	13710	244.28	111.65
	0.05	Srinivas et al.	13710	244.22	111.53
		Sundara et al.	13710	244.20	111.51
		Present	875.03	61.225	28.152
	0.1	Srinivas et al.	875.03	61.240	28.166
		Sundara et al.	875.02	61.200	28.124
Multiplier			qh/G	q	q

されている。

しかしながら、 $y[\eta]$ 方向の要素分割数 M_y を 4 に固定した不等分割では、たわみ W と垂直応力 σ_x , σ_y は、一定値への一様な収束状態が示されているが、剛性が固く評価されており、また、垂直応力 σ_x , σ_y の応力値の対称性が崩れている。これは、 $y[\eta]$ 方向の要素分割数が少ないために、剛性が正確に評価されていないためであると思われる。したがって、不等分割にする際には、 $y[\eta]$ 方向にも十分に要素分割を取る必要がある。

以上の結果より、以後の数値計算例では、spline 次数 $k-1$ は 3 とし、要素分割数 $M_x \times M_y \times M_z$ は、 $10 \times 10 \times 10$ としている。

3.2 本手法の局所応力の精度比較

次に、本手法によって得られた解の解析精度について検討する。

3.2.1 周面単純支持された等方性厚板の解析精度

まず、報告例の多い周面単純支持された厚板の解析精度について示す。

表-2 には、板表面に等分布満載荷重 q を受ける周面単純支持された等方性厚板のたわみ W と垂直応力 σ_x , σ_y の精度比較が示してある。ここで、辺長比 b/a は、1.0 と 2.0 に仮定し、板厚比 h/a は 0.05 から 0.1 まで変化させている。また、解の比較のために、3次元弾性論に基づく Srinivas ら¹⁾の解析解と Sundara ら²⁾の数値解も示してある。

これより、本手法により求めたたわみ W と局所応力 σ_x , σ_y は、板厚比 h/a や辺長比 b/a に関わらず、Srinivas らの解析解および Sundara らの数値解と非常によく一致した結果が示されている。

3.2.2 任意の境界条件を有する厚板の解析精度

厚板の 3 次元応力解析に関する既往の研究報告は、有限要素法を除くと、任意の境界条件を取り扱った報告例があまり見られない。そこで、厳密な解を得ることが困難な固定面や自由面を有する厚板の解析精度について示す。

表-3 および表-4 には、板表面に等分布満載荷重 q を受ける周面固定(CC-CC)および片持ち(CF-FF)等方性正方形厚板($b/a=1.0$)のたわみ W と垂直応力 σ_x , σ_y の精度比較が示してある。ここで、板厚比 h/a は 0.05 から 0.3 まで変化させている。また、解の比較のために、水澤¹⁰⁾の 1 次せん断変形板理論に基づく spline 要素法により求めた数値解も示してある。

これより、本手法により求めたたわみ W と局所応力 σ_x , σ_y は、境界条件や板厚比 h/a に関わらず水澤の数値解と誤差 3.0%以内でよく一致しているが、本手法による解の方がやや小さな値を示している。これは、板理論では考慮できない厚さ方向の影響が現れているものであると考えられる。

3.3 厚さ方向の応力分布の精度比較

3.1 および 3.2 の結果より、本手法により求めた解の収束性と精度比較の検討から、本手法の局所応力の

表-3 板表面に等分布荷重を受ける周面固定された等方性正方形板のたわみと垂直応力の精度比較： $k-1=3$, $b/a=1.0$, $M_x \times M_y \times M_z=10 \times 10 \times 10$, $\nu=0.3$, CC-CC

B.C	h/a	Solution method	W (0.5,0.5,0.5)	σ_x (0.5,0.5,1.0) σ_y (0.5,0.5,1.0)	σ_x (0.5,0.5,0.0) σ_y (0.5,0.5,0.0)
CC-CC	0.05	Present	-2283.7	-54.829	54.420
		[†] Mizusawa et al. ¹⁰⁾	-2319.0	-55.198	55.198
	0.1	Present	-161.62	-14.193	13.787
		Mizusawa et al.	-164.31	-13.920	13.920
	0.2	Present	-14.485	-3.9882	3.5974
		Mizusawa et al.	-14.827	-3.5365	3.5365
	0.3	Present	-4.2230	-2.0720	1.6932
		Mizusawa et al.	-4.3768	-1.5867	1.5867
	Multiplier		qh/E	q	q

[†]spline element method based on Reissner-Mindlin plate theory

表-4 板表面に等分布荷重を受ける片持ち等方性正方形板のたわみと垂直応力の精度比較： $k-1=3$, $b/a=1.0$, $M_x \times M_y \times M_z=10 \times 10 \times 10$, $\nu=0.3$, CF-FF

B.C	h/a	Solution method	W (1.0,0.5,0.5)	σ_x (0.5,0.5,1.0)	σ_y (0.5,0.5,1.0)
CF-FF	0.05	Present	-225107	295.37	56.693
		[†] Mizusawa et al. ¹⁰⁾	-227306	294.43	57.428
	0.1	Present	-14240	73.813	13.142
		Mizusawa et al.	-14402	73.671	13.406
	0.2	Present	-925.12	18.383	2.579
		Mizusawa et al.	-937.68	18.522	2.6244
	0.3	Present	-193.30	8.1164	0.8366
		Mizusawa et al.	-196.03	8.3073	0.8538
	Multiplier		qh/E	q	q

[†]spline element method based on Reissner-Mindlin plate theory

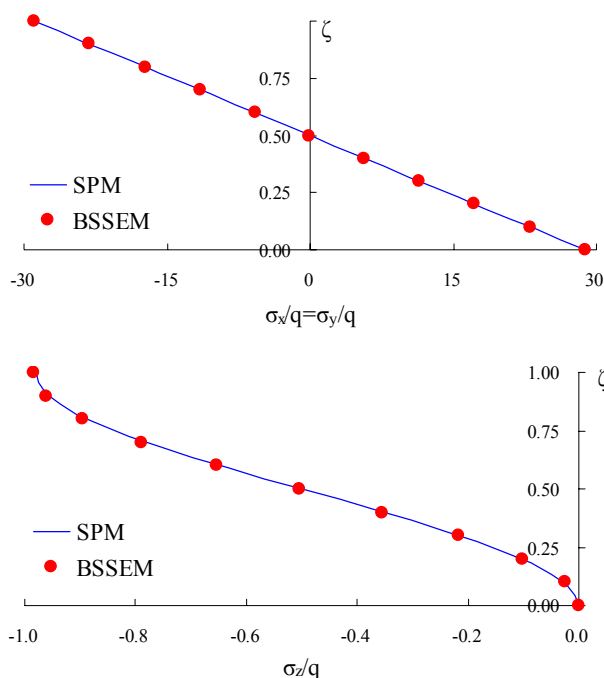


図-3 板表面に等分布満載荷重 q を受ける周面単純支持された等方性正方形板の厚さ方向の垂直応力分布の精度比較： $k-1=3$, $M_x \times M_y \times M_z=10 \times 10 \times 10$, $h/a=0.1$, $b/a=1.0$, $\xi=\eta=0.5$, $\nu=0.3$, SS-SS

解析精度は、十分高いことが示された。しかしながら、設計の際には、応力分布の解析精度が重要になる。そ

こで、厚さ方向の応力分布の精度比較について検討する。

図-3 と図-4 には、それぞれ板厚比 h/a が 0.1, 0.7 である板表面に等分布満載荷重 q を受ける周面単純支持された等方性正方形板($b/a=1.0$)の厚さ方向の垂直応力分布 $\sigma_x=\sigma_y$ と σ_z ($\xi=\eta=0.5$) の精度比較が示してある。ここで、比較に用いた応力分布図は、名木野ら⁸⁾の spline prism 法 (SPM) の結果である。ここで、spline prism 法の要素分割数は、 22×22 とし、応力の解析精度を高めている。

これより、本手法 (BSSEM) による結果は、板厚比 h/a に関わらず、SPM と比較して少ない要素分割数で、SPM により求めた厚さ方向の応力分布に非常によく一致している。また、厚さ方向の応力 σ_z 分布より、BSSEM による結果は、板表面および下面での力学的な境界条件 ($\zeta=0.0$; $\sigma_z=0.0$, $\zeta=1.0$; $\sigma_z=-q$) を十分満足している。今回は割愛したが、せん断応力の境界条件も満足していることを確認している。

4. まとめ

本論文では、3次元弾性体で理想化した等方性厚板の3次元応力解析へのB-splineソリッド要素法の適用性を明らかにするために、解の収束性と精度比較について検討を行なった。

本論文で得られた新たな知見をまとめると、以下のとおりである。

- 1) 本手法を用いれば、厚板の変位および応力の様な収束状態が示されており、また、spline 次数を高めれば、少ない要素分割数で収束値が得られる。
- 2) 本手法により求められた厚板の変位および応力は、境界条件、辺長比および板厚比に関わらず、他の解析解や数値解と非常によく一致している。
- 3) 本手法により求めた解は、板理論と比較してやや小さな値を示す。これは、厚さ方向の影響が現れているものと考えられる。
- 4) 厚さ方向の応力分布は、板厚比 h/a に関わらず、spline prism 法の結果と比較して、非常によく一致した結果を示している。
- 5) 本手法を用いれば、厚板の表面、下面での応力の境界条件を正確に満足させられる。

今後、本手法の直交異方性厚板への適用や、厳密な解を得ることが困難な周面固定および片持ち厚板の応力分布特性や変位特性について明らかにしていきたい。

参考文献

- 1) S. Srinivas : Flexure of simple supported thick homogeneous and laminated rectangular plates. ZAMM, Vol. 49, pp. 449-458, 1969.
- 2) K. T. Sundara Raja Iyengar, K. Chandrashekhara and V.K. Sebastian : On the analysis of thick rectangular plates. Ing.-Archiv, Vol. 43, pp. 317-330, 1974.

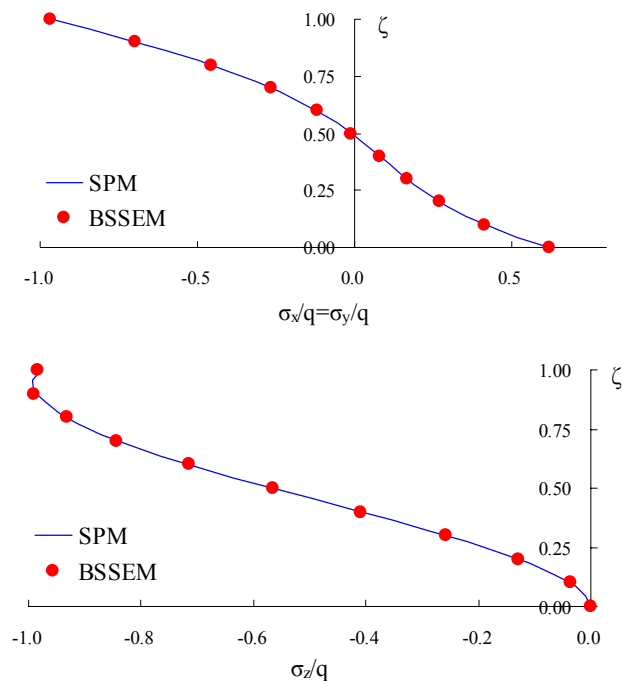


図-4 板表面に等分布満載荷重 q を受ける周面単純支持された等方性正方形板の厚さ方向の垂直応力分布の精度比較: $k=1=3, M_x \times M_y \times M_z=10 \times 10 \times 10, h/a=0.7, b/a=1.0, \xi=\eta=0.5, \nu=0.3, SS=SS$

- 3) O. C. Zienkiewicz and J. J. M. Too. : The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes. Proc. Inst. Civil Engrs, Vol. 53, pp. 147-172, 1972.
- 4) 奥村勇: 部分分布の垂直荷重を受ける直方体の3次元応力解析について. 土木学会論文集, 238号, pp. 17-30, 1975.
- 5) 林正, 小林亨市: 節点プリズム法による3次元応力解析. 土木学会論文集, No. 450/I-20, pp. 95-101, 1992.
- 6) 水澤富作, 高木信治: Spline Prism 法を用いた長方形厚板の三次元曲げ解析について. 土木学会論文集, 第 489 号/I-27, pp. 101-110, 1994.
- 7) 末武義崇, 大須賀敦, 友田士雄: Lagrange 多項式に基づく三次元弾性問題の EFGM 解析. 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 257-266, 2003.
- 8) 名木野晴暢, 佐野直樹, 関本光晴, 水澤富作: Spline prism 法を用いた直交異方性厚板の3次元応力解析. 平成 15 年度土木学会中部支部研究発表会, I-49, pp. 97-98, 2004.
- 9) 名木野晴暢, 水澤富作, 三上隆: B-spline ソリッド要素法を用いた等方性厚板の自由振動解析. 土木学会第 59 年次学術講演会, I-338, pp. 685-686, 2004.
- 10) T. Mizusawa : Application of the spline element method to analyze the bending of skew plates. Computers and Structures Vol. 53, No. 2, pp. 439-448, 1994.