

## 鉄筋コンクリート構造のハイラーキ RC 要素モデル

Hierarchical RC-element for Modeling Reinforced Concrete Structures

函館工業高等専門学校  
函館工業高等専門学校  
長岡技術科学大学名誉教授

○ 学生会員 東 崇広 (Takahiro AZUMA)  
正 会 員 渡 辺 力 (Chikara WATANABE)  
正 会 員 林 正 (Masa HAYASHI)

## 1. まえがき

コンクリート床版を有する鋼・コンクリート複合橋梁構造物の全体解析を効率的に行うためにハイラーキ RC 要素を提案した<sup>1)</sup>。本要素は、ハイラーキソリッド要素にトラス要素(鉄筋)を埋め込んだ要素で、ソリッド要素の一般化変位をトラス要素の変位関数に用いて軸方向に級数展開することにより、鉄筋位置での要素分割を必要としない。さらに、ソリッド要素内で多数の鉄筋を任意の方向に配置できる。

本研究では、ソリッド要素と RC 要素の精度を検証する。等分布荷重を受ける周面単純支持板や周面固定支持板の3次元応力解析では板厚方向の直応力の収束性が悪いが、特異要素<sup>2)</sup>により収束性を改善できることを示す。また、本研究の RC 要素は橋梁などの全体剛性に及ぼす鉄筋コンクリート床版の等価剛性を正確に評価することを目的としている。そこで、鉄筋コンクリート床版の曲げ解析により、ソリッド要素にトラス要素を埋め込んだ RC 要素の等価剛性を調べ、 $h$  法(要素細分割)の埋め込み鉄筋要素と精度および計算効率を比較した結果を報告する。

## 2. ハイラーキ RC 要素

RC 要素は、図-1のようにソリッド要素にハイラーキ棒要素を埋め込んだ要素である。直線鉄筋はトラス要素で、曲線配置された緊張材などはケーブル要素でモデル化する。

## (1) 解析仮定

本研究では、コンクリート床版の弾性応力解析を目的としており、要素の定式化では、以下の3つの仮定を設ける。

- 1) コンクリートは線形弾性体とし、クリープの影響は無視する。
- 2) 鉄筋の曲げ剛性は無視する。
- 3) 鉄筋とコンクリートは完全に結合している。

なお、RC 要素ではトラスやケーブル要素の変位関数をソリッド要素の変位関数で表しているので仮定3)の条件は自動的に満足される。また、コンクリートと

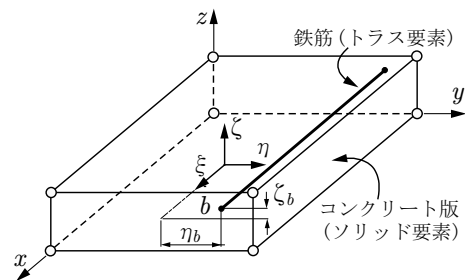


図-1 RC 要素

鉄筋のずれに関してはすべり係数を与えることにより制御できる。

## (2) ソリッド要素の変位関数

ソリッド要素の変位関数は3方向に級数展開して与えられるが<sup>3)</sup>、ここでは三重級数項を1次元展開して次式で表わす。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^K N_k u_k = \mathbf{f}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}^T \\ v &= \sum_{k=1}^K N_k v_k = \mathbf{f}^T \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}^T \\ w &= \sum_{k=1}^K N_k w_k = \mathbf{f}^T \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}^T \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $u, v, w$  は  $x, y, z$  軸方向の変位成分で、 $u$  などはその一般化変位ベクトルである。また、 $K$  は各変位成分の自由度で、形状関数  $N_i$  と形状関数ベクトル  $\mathbf{f}$  は次式で与えられる。

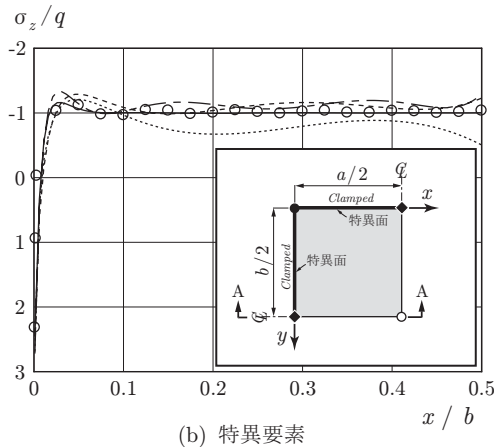
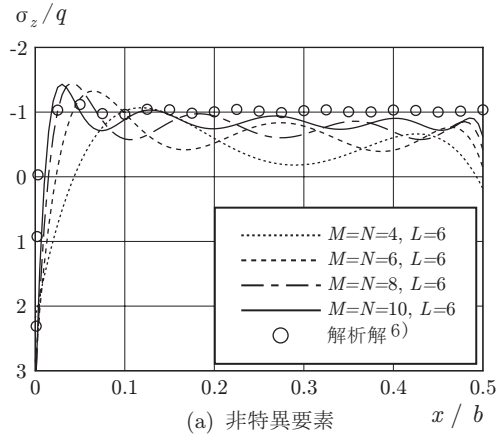
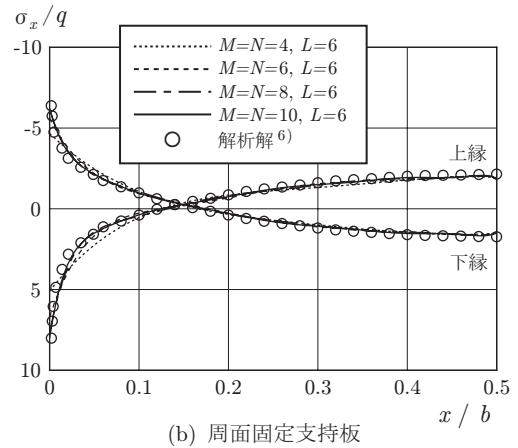
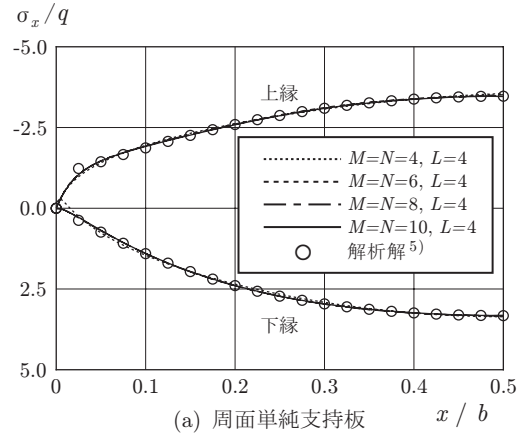
$$\mathbf{f} = \{N_1, N_2, \dots, N_k\}^T \quad (2)$$

$$N_i = f_m(\xi) \cdot f_n(\eta) \cdot f_l(\zeta) \quad (3)$$

式(3)の  $m, n, l$  は  $\xi, \eta, \zeta$  方向の多項式の次数を表し、それぞれ  $M, N, L$  次まで用いるものとする。自由度数は  $K = (M+1)(N+1)(L+1)$  となる。また、 $f_m$  はハイラーキ多項式である<sup>3)</sup>。

## (3) 直線鉄筋の剛性行列

図-1のように要素座標  $\xi$  方向に配置させた直線鉄筋を考える。鉄筋が配置される  $b$  線上 ( $\eta = \eta_b, \zeta = \zeta_b$ ) の軸方向変位  $u_b$  は式(1)のソリッド要素の変位関数を用い


 図-2 平板の直応力  $\sigma_z$  (固定支持板)

 図-3 平板の直応力  $\sigma_x$ 

て次式で表すことができる．

$$u_b = f_b^T \mathbf{u} \quad (4)$$

$f_b$  は式 (3) の形状関数に鉄筋配置位置の座標 ( $\eta=\eta_b$ ,  $\zeta=\zeta_b$ ) を代入したもので、式 (4) を用いてトラスの軸方向ひずみは次式で与えられる

$$\varepsilon_x = \mathbf{g}_b^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{g}_b = \frac{\partial f_b}{\partial x} \quad (5)$$

式 (5) を仮想仕事の原理に用いて、形状関数が式 (3) のように変数分離形で与えられることを考慮すると、直線鉄筋の剛性行列の  $(i, j)$  成分  $k_{b,ij}$  ( $i, j = 1 \sim K$ ) は次のようになる．

$$k_{b,ij} = EA G_{mm'} F_{nn'}(\eta_b) F_{ll'}(\zeta_b) \quad (6)$$

ここに、

$$G_{mm'} = \frac{2}{\ell_\xi} \int_{-1}^1 g_m(\xi) g_{m'}(\xi) d\xi, \quad g_m = \frac{df_m}{d\xi} \quad (7)$$

$$F_{nn'}(\eta_b) = f_n(\eta_b) \cdot f_{n'}(\eta_b) \text{ etc.}$$

$EA$  は鉄筋の伸び剛性で、 $\ell_\xi$  は鉄筋の長さである．

ソリッド要素の剛性行列<sup>3)</sup>に式 (6) を加えて RC 要素の剛性行列が得られる． $\eta, \zeta$  方向に配置させた直線鉄筋も変位成分  $v, w$  を用いて同様に定式化できる．また、曲線配置された PC 鋼材などはケーブル要素<sup>4)</sup>を用いて定式化する．

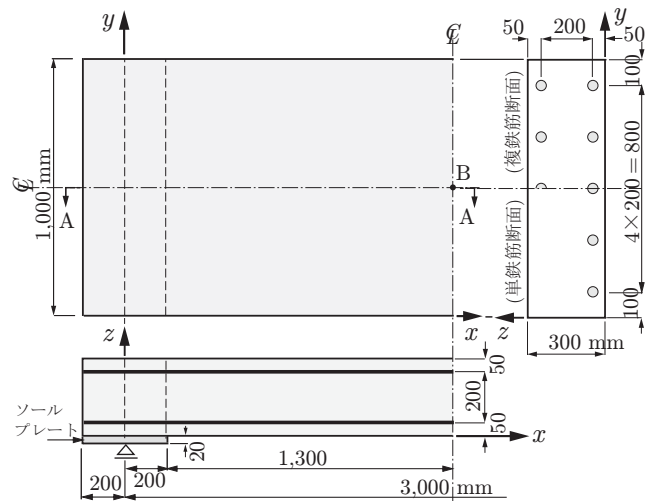


図-4 単純支持鉄筋コンクリートスラブ

### 3. 数値計算例

#### (1) ソリッド要素の収束性

周面単純支持および周面固定支持された平板の 3 次元応力解析を行って、ソリッド要素の収束性を調べる．計算モデルは形状比  $a/b=1$ 、板厚比  $t/b=0.3$  の正方形厚板で、ポアソン比を  $\nu=0.3$  とし、荷重は板の上面に等分布荷重  $q$  を満載する．図-2の図中に示すように要素分割を行わずに板の 1/4 領域を 1 要素で計算する

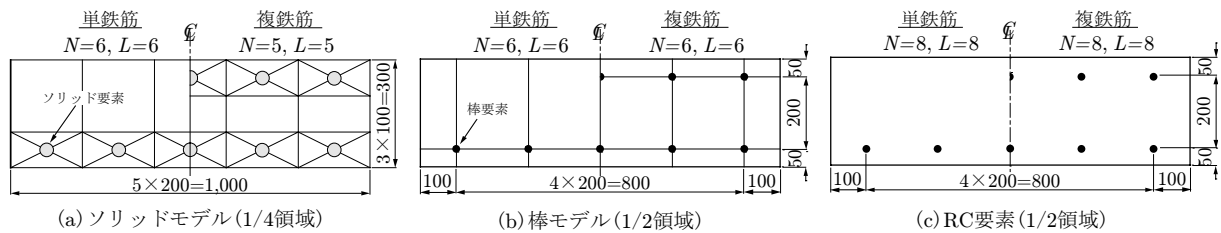
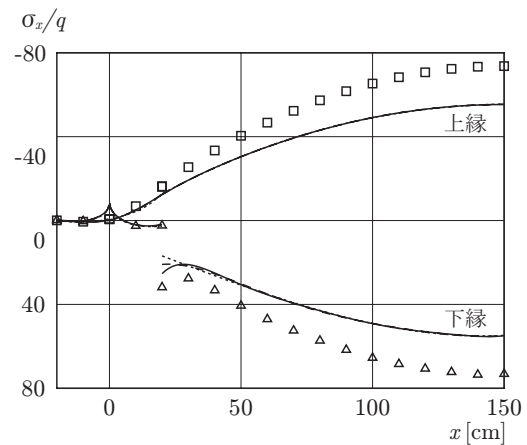
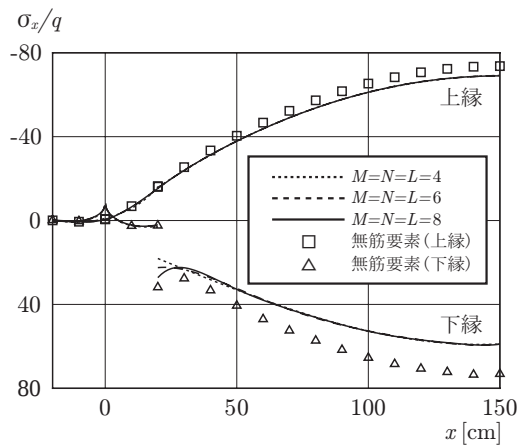


図-5 計算モデル

表-1 たわみと応力の誤差 (ソリッドモデルに対する比)

| 計算モデル   |         | 単鉄筋断面   |                 |                 |        | 複鉄筋断面   |                 |                 |        | 備 考<br>(計算領域) |
|---------|---------|---------|-----------------|-----------------|--------|---------|-----------------|-----------------|--------|---------------|
|         |         | たわみ $w$ | $\sigma_x$ (上縁) | $\sigma_x$ (下縁) | DOF    | たわみ $w$ | $\sigma_x$ (上縁) | $\sigma_x$ (下縁) | DOF    |               |
| ソリッドモデル |         | 1.0000  | 1.0000          | 1.0000          | 33612  | 1.0000  | 1.0000          | 1.0000          | 42048  | 1/4 領域        |
| 棒モデル    |         | 1.0014  | 1.0020          | 1.0081          | 25530  | 1.0020  | 1.0093          | 1.0102          | 36852  | 1/2 領域        |
| RC 要素   |         | 1.0003  | 1.0014          | 1.0072          | 4374   | 0.9996  | 1.0078          | 1.0087          | 4374   | 1/2 領域        |
| $h$ 法   | 14× 8×2 | 0.9785  | 0.9859          | 0.9952          | 4821   | 0.9801  | 0.9908          | 0.9989          | 4821   | 1/2 領域        |
|         | 44×26×8 | 0.9980  | 0.9961          | 1.0176          | 130317 | 0.9992  | 1.0083          | 1.0193          | 130317 | 1/2 領域        |
| 無 筋     |         | 1.1437  | 1.0694          | 1.2500          | 4374   | 1.3207  | 1.3418          | 1.3443          | 4374   | 1/2 領域        |

図-6 A-A 線上の直応力  $\sigma_x$ 

が、応力の収束性を改善させるために固定支持面を特異面とした2特異面要素<sup>2)</sup>を用いる。

図-2は、固定支持板の板中央 A-A 線上 (上縁) の直応力  $\sigma_z$  を示したもので、変位関数には  $x, y$  軸方向に  $M=N=4\sim 10$  次式、板厚 ( $z$  軸) 方向に  $L=6$  次式を用いる。図 (a) は非特異要素を用いた場合で、図 (b) は特異要素による結果である。図より、特異要素によって直応力  $\sigma_z$  の収束性が改善されていることが分かる。

図-3は、特異要素による単純支持板と固定支持板の A-A 線上 (図-2を参照) の直応力  $\sigma_x$  を示したものである。ともに収束性は良好で  $M=N=4\sim 6$  次式を用いれば解析解<sup>5), 6)</sup>に良く一致した値が得られている。

## (2) RC 要素の等価剛性

図-4に示す支間 3m、幅 1m、厚さ 0.3m の単鉄筋長方形スラブと複鉄筋長方形スラブを計算して RC 要素の精度を検証する。鉄筋は直径 40mm、純かぶり 50mm として 200mm 間隔で下段に 5 本配置した単鉄筋断面と、5 本の鉄筋を 2 段に配置した複鉄筋断面の場合を計算する。荷重はスラブ上面に等分布荷重を満載し、コ

ンクリートのヤング係数  $E_c$ 、ポアソン比  $\nu_c$  および鉄筋の  $E_s, \nu_s$  には以下の値を用いる。

$$E_s = 206 \text{ GPa}, n = E_s/E_c = 7, \nu_s = 0.3, \nu_c = 0.15$$

計算では構造の対称性を考慮してスラブの 1/2 領域を計算する。境界条件は支点上の鉛直変位を線支持しているが応力集中を緩和するために厚さ 20mm のソールプレートを設定している。x 軸方向の要素分割は支点上と  $x = 200\text{mm}$  の位置で 3 分割する ( $x$  軸方向の変位関数には、それぞれ  $M=4, 4, 8$  次式を用いる)。また、支点の支持線の特異線として、支持線を含む要素には 1 特異線要素<sup>2)</sup>を用いる。

比較のために鉄筋をソリッド要素によりモデル化したソリッドモデル (図-5(a))、鉄筋配置位置で要素分割し節点間に棒要素を配置した棒モデル (図-5(b))、RC 要素 (図-5(c)) の 3 ケースを計算する。横断面には図-5のように分割し、RC 要素では横断面に要素分割を行わずに 3 要素で計算している。なお、 $y, z$  軸方向の変位関数の次数には図中に示す次数を用いる。また、棒モデルと RC 要素では、断面積の補正を鉄筋のヤング

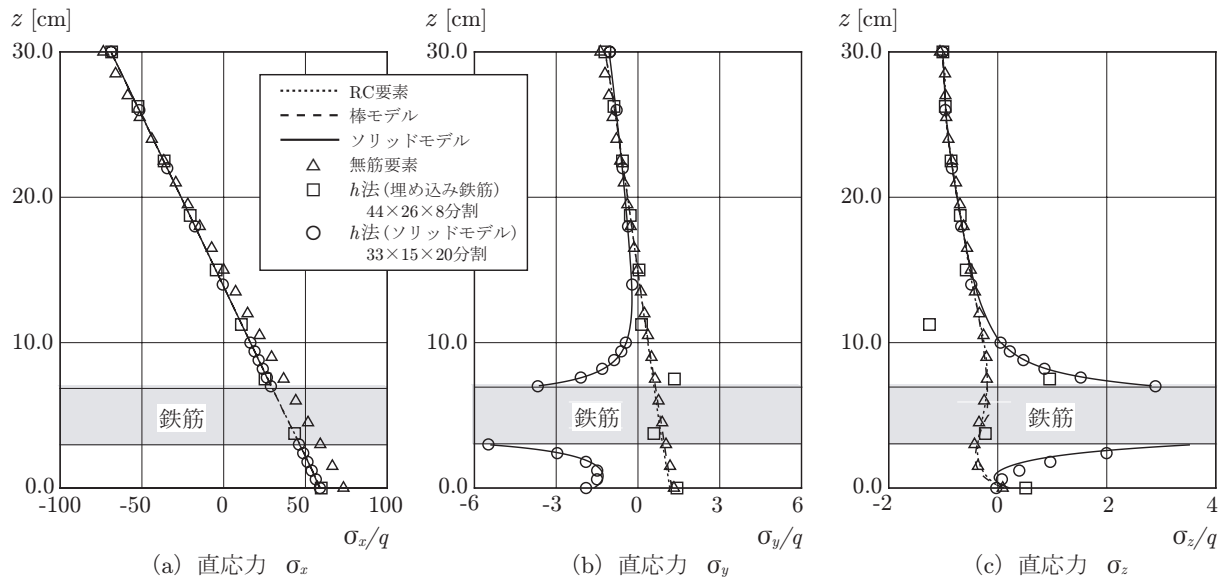


図-7 B-B 線上の直応力 (単鉄筋断面)

係数によって行っている ( $E'_s = 6/7 E_s$ ) .

表-1は各モデルの支間中央における最大たわみ  $w$  と上下縁の応力  $\sigma_x$  のソリッドモデルに対する誤差と全自由度数を示したものである．また，比較のために20節点6面体要素と埋め込み鉄筋を用いた  $h$  法 (要素細分割法)<sup>7)</sup> による値を示してある．

RC 要素では，単鉄筋断面，複鉄筋断面ともにたわみ  $w$  と応力  $\sigma_x$  の誤差は1%以下となっており，十分な等価剛性が得られている．なお， $h$  法でも埋め込み鉄筋を用いているがRC要素と同程度の自由度数である  $14 \times 8 \times 2$  分割では2%程度の誤差を生じていて，RC要素と同程度の値を得るためには  $44 \times 26 \times 8$  分割が必要となる．

図-6は，RC要素による板中央A-A線上の直応力  $\sigma_x$  を示したもので，図(a)の単鉄筋断面，図(b)の複鉄筋断面ともに変位関数に  $M=N=L=4$  次式を用いればほぼ収束値が得られている．

図-7は各モデルによる板中央B点の板厚方向の直応力の分布を示したものである．比較のために無筋要素の計算値を△印で，埋め込み鉄筋を用いて  $44 \times 26 \times 8$  分割した  $h$  法による値を□印で，鉄筋をソリッド要素でモデル化して  $30 \times 15 \times 20$  分割した  $h$  法による値を○印で示してある．図より， $\sigma_x$  ではどのモデルも良く一致しているが，ソリッドモデルの  $\sigma_y$  と  $\sigma_z$  では異種材料の結合による特異性から鉄筋の周辺で応力集中を起こしている．鉄筋をトラス要素でモデル化したRC要素や棒モデルではこの応力は計算できないが，RC要素の自由度数は棒モデルに対して約  $1/6 \sim 1/8$  となっており，効率良く鉄筋の効果を考慮した全体解析が可

能となる．

#### 4. まとめ

ハイアラキソリッド要素とRC要素による数値計算例から以下のようなことが言える．

- 1) 等分布荷重を受ける平板の3次元応力解析には特異要素が有効で，応力の収束性を改善できる．
- 2) RC要素により，鉄筋コンクリート床版の等価剛性を十分に評価でき，効率良く鉄筋の効果を考慮した全体解析が可能となる．

#### 参考文献

- 1) 渡辺 力，林 正，齋藤道生，小間栄律：ハイアラキRC要素による鉄筋コンクリート床版の曲げ解析，土木学会第58回年次学術講演会講演概要集 (CD-ROM)，pp.425-426, 2003.
- 2) 林 正，渡辺 力，齋藤道生：応力集中問題に対する特異写像関数，土木学会論文集，No.738/I-64，pp.113-123, 2003.
- 3) 林 正，山中素直，加瀬部弘，佐藤敏亮：ハイアラキ要素による有限要素解析の効率化，土木学会論文集，No.591/I-43，pp.71-84, 1998.
- 4) 林 正，岩崎英治，山野長弘，時 譲太：ハイアラキ要素によるケーブル構造の有限変位解析，土木学会論文集，No.668/I-54，pp.207-216, 2001.
- 5) Pagano, N.J.: Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *Composite Materials*, Vol.4, pp.20-34, 1970.
- 6) Okumura, I.A., Oguma, Y.: Series solutions for a transversely loaded and completely clamped thick rectangular plate based on the three-dimensional theory of elasticity, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.68, pp.103-121, 1998.
- 7) ADINA Theory and Modeling Guide: ADINA R & D Inc., 2003.