Ｉ－３９　　平成16年度　土木学会北海道支部　論文報告集　第61号

重み関数の改善による FPM の多次元問題解析精度の向上

Improvement in Accuracy of FPM for 2-D and 3-D Analyses with a New Weighting Function

北海道大学大学院工学研究科　〇学生員　京田康宏(Yasuhiro Kyoda)
北海道大学大学院工学研究科　正　員　蟹江俊仁(Shunji Kanie)
北海道大学大学院工学研究科　フェロー　三上 隆 (Takashi Mikami)

1.　序論

近年，数多くのメッシュフリー法が提案されてきた．これらの手法は，一般的に形状関数の作成法と，支配方程式の離散化の組み合わせによって分類される．それらの組み合わせの中でも，weighted least squares approximations(以下 WLSA)と point collocation を用いた Finite Point Method(以下 FPM)は，要素も積分格子も必要としないことから，完全なメッシュフリー法であると言える．FPM は定式化が容易であり，節点の配置が自由であるといった利点を有している．京田([3],[4],[5])らは Timoshenko beam の曲げや固有値問題への適用を試みている．本論文では，2 次元，3 次元 Poisson 方程式に新しく提案した重み関数を適用し，その妥当性を検討していく．

2.　WLSA による近似関数の設定

領域 $x, y \in \Omega$ で定義される関数 $u = f(x, y)$ に対して, 領域内の任意の評価点 (x, y) における関数 u は次式を用いて近似的に表されるものとする．

$$u(x,y) \cong \hat{u}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x,y)\alpha_i = \mathbf{p}(x,y)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \tag{1}$$

ここに， $\hat{u}$ は近似解， $\mathbf{p}$ は基底関数ベクトル， $\boldsymbol{\alpha}$ は未定係数ベクトルである．ちなみに 2 次元で $m = 6$ の場合には, $\mathbf{p}(x,y) = \left[1, x, y, x^2, xy, y^2\right]^{\mathrm{T}}$ となる．

WLSA では，次式で定義される評価関数 Π を最小にするように未定係数 α_i を決定する．

$$\Pi_i = \sum_{j=1}^{NP} w_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\left(u(\mathbf{x}_j) - \mathbf{p}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)^2 \tag{2}$$

ここに， $\mathbf{x} = (x, y)^{\mathrm{T}}$ であり， NP は節点数， $\mathbf{x}_i$ ， w_i はそれぞれ評価点の節点座標とその重み関数である．ここで，

$$\mathbf{P} = \left[\mathbf{p}(x_1, y_1), \mathbf{p}(x_2, y_2), \cdots, \mathbf{p}(x_{NP}, y_{NP})\right]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$\mathbf{W} = diag(w_1, w_2, \cdots, w_{NP}) \tag{4}$$

$$\mathbf{u} = \left[u(x_1), u(x_2), \cdots, u(x_{NP})\right]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

と表し最小化の条件を付与すると，

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Bu} \tag{6}$$

ここに，

$$\mathbf{M} = \mathbf{PWP}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{PW} \tag{8}$$

とおいた．式(1)と式(6)から未定係数 $\boldsymbol{\alpha}$ を消去して，

$$\hat{u}(x,y) = \mathbf{pM}^{-1}\mathbf{Bu} = \sum_{j}^{NP} N_j u_j \tag{9}$$

が得られる．ここで N は形状関数である．

既往の研究では重み関数として，4 次スプライン関数や指数関数が使用されているが，本研究では，新しく以下の関数を提案する(式(10))．

$$\varphi = \frac{2}{\lambda}\left[\exp\left(\frac{r_x}{\lambda}\right) + \exp\left(-\frac{r_x}{\lambda}\right)\right]^{-2} \quad \left(\lambda > 0, r_x = \frac{x - x_i}{\rho_i}\right) \tag{10}$$

全体の重み関数は

$$w = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \tag{11}$$

となる．ここで， ρ_i (サポート半径)は重み関数の大きさを示している．式(10)は評価点周辺の幅 λ 程度の小区間で $1/\lambda$ 程度の値をもち，その外で急速にゼロに近づく関数である．従来の重み関数は，重み関数の範囲内に含まれる点数 n が大きくなると，評価点とその近傍の点の重さを同等に評価してしまう(Fig. 1(b))．しかし，式(10)では評価点の重みが十分に大きいので，より正確に評価点での計算が行えるのである(Fig. 1(a))．

また，本解析では，節点配置の疎密に関らずが一定に保たれるように ρ_i を変化させている．さらに，基底関数 $\mathbf{p}$ 中の変数 x, y を ρ_i で正規化する(式(12))．

$$\xi = (x - x_i)/\rho_i, \quad \eta = (y - y_i)/\rho_i \tag{12}$$

式(7)は大きさの異なる成分が存在する性質の悪いマトリクスであるが,正規化を行うことでその性質は改善される．

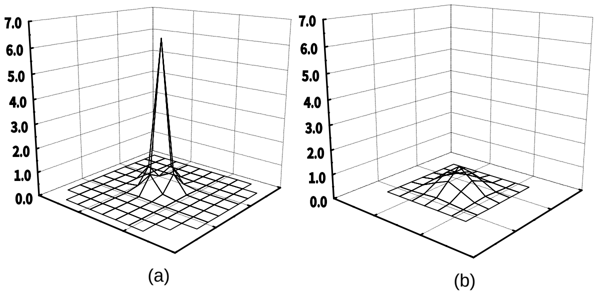

Fig. 1. Comparison of the weighting function($m = 6$, $n = 25$, $\lambda = 0.2$): (a) new weighting function(eq.(10)), (b) quartic spline function.

3.　選点法による支配方程式の定式化

2 次元問題で微分方程式を以下のように定義する．

$$L(u) = f \ \text{in}\,\Omega, \quad u = g \ \text{on}\ \Gamma_g, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h \ \text{on}\ \Gamma_h \tag{13}$$

ここに， L は微分演算子である．式(13))はそれぞれ支配方程式, ディリクレ境界条件, ノイマン境界条件である．近似解 $\hat{u}(x)$ によって近似される未知関数 $u(x)$ に重み付き残差法を用いると，次式が得られる．

$$\int_{\Omega}\left(L(\hat{u}) - f\right) w\, d\Omega + \int_{\Gamma_g}(\hat{u} - g)\overline{w}\, d\Gamma_g + \int_{\Gamma_h}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial n} - h\right)\overline{\overline{w}}\, d\Gamma_h = 0 \tag{14}$$

ここで，重み関数を $w = \overline{w} = \overline{\overline{w}} = \delta$ とする． δ は Dirac delta である．式(14)は

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \tag{15}$$

と表すことができる． $\mathbf{K}$ は剛性マトリックスであり， $\mathbf{K} \in \Re^{NP \times NP}$ ， $\mathbf{u} \in \Re^{NP \times 1}$ ， $\mathbf{F} \in \Re^{NP \times 1}$ となる．一般に剛性マトリックスの対称性は得られない． 領域内の点を I ，ディリクレ境界上の点を M , ノイマン境界上の点を N とすると，剛性マトリックスは次のようになる．

$$\mathbf{K}_{Ij} = L\left(N_j(x_I, y_I)\right), \mathbf{K}_{Mj} = N_j(x_M, y_M), \mathbf{K}_{Nj} = \frac{\partial N_j(x_N, y_N)}{\partial n}, \quad j = 1, 2, \cdots, NP \tag{16}$$

4.　2次元 Poisson 方程式への適用

2次元 Poisson 方程式に本手法を適用する．支配方程式と境界条件は以下のように与えられる．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x-6y-\left[\frac{4}{\alpha^2}-4\left(\frac{x-\beta}{\alpha^2}\right)^2-4\left(\frac{y-\beta}{\alpha^2}\right)^2\right]\times\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2\right]\quad 0\le x\le 1\quad 0\le y\le 1 \tag{17}$$

$$u(x=0)=-y^3+\exp\left[-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{18}$$

$$u(x=0)=-x^3+\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x=1)=-3-2\left(\frac{1-\beta}{\alpha^2}\right)\exp\left[-\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y=1)=-3-2\left(\frac{1-\beta}{\alpha^2}\right)\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{21}$$

ここに，$\alpha=0.2,\beta=0.5$ である．厳密解は式(22)である．

$$u=-x^3-y^3+\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{22}$$

数値計算における誤差の評価には式(23)を用いる．

$$\varepsilon=\frac{1}{|u|_{\max}}\sqrt{\frac{1}{NP}\sum_{i=1}^{NP}[u(\mathbf{x}_i)-\hat{u}(\mathbf{x}_i)]^2} \tag{23}$$

ここで，ε は誤差，u と $\hat{u}$ はそれぞれ厳密解と解析解を表している．ここでは $\lambda=0.2$，$m=6$ として解析行う．異なる重み関数を適用した場合の解の収束性を示すために，点数が 121，289，1089 のランダム配置で解析を行っている．Fig. 2 から $n=25$ の時，4 次スプラインが $n=16$ と比べて全体に精度が悪化しているのに対して，式(10)は $n=16$ と比較しても同程度の収束性が得られていることがわかる．

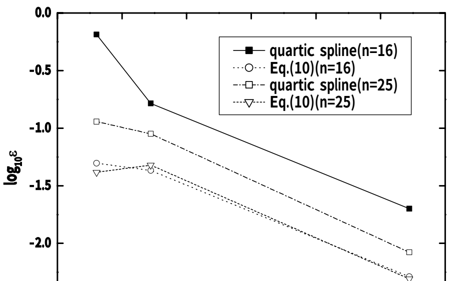

Fig. 2. Convergence plot when the cloud size is 16 and 25.

5.　3次元 Poisson 方程式への適用

次に，3 次元 Poisson 方程式に適用する．支配方程式と境界条件は以下のように与えられる．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-6x-6y-6z-\left[\frac{6}{\alpha^2}-4\left(\frac{x-\beta}{\alpha^2}\right)^2-4\left(\frac{y-\beta}{\alpha^2}\right)^2-4\left(\frac{z-\beta}{\alpha^2}\right)^2\right]\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{24}$$

$$0\le x\le 1\quad 0\le y\le 1\quad 0\le z\le 1$$

$$u(x=0)=-y^3-z^3+\exp\left[-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{25}$$

$$u(y=0)=-x^3-z^3+\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{26}$$

$$u(z=0)=-x^3-y^3+\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{27}$$

$$u,_x(x=1)=-3-2\left(\frac{1-\beta}{\alpha^2}\right)\exp\left[-\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{28}$$

$$u,_y(y=1)=-3-2\left(\frac{1-\beta}{\alpha^2}\right)\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{29}$$

$$u,_z(z=1)=-3-2\left(\frac{1-\beta}{\alpha^2}\right)\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{30}$$

ここに，$\alpha=0.2,\beta=0.5$ である．厳密解は式(31)である．

$$u=-x^3-y^3-z^3+\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right)^2\right] \tag{31}$$

誤差の評価には式(23)を用いる．

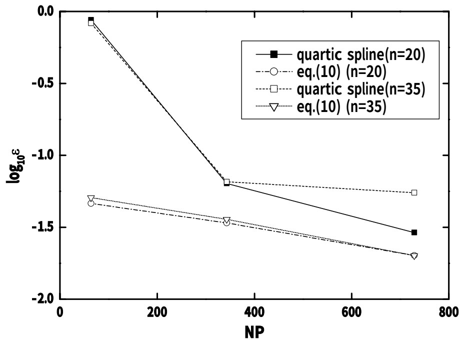

Fig. 3. Convergence plot with different polynominal basis.

ここでは，$\lambda=0.2$，$m=10$ とする．異なる重み関数を適用した場合の 3 次元における解の収束性を示すために，点数が 64, 343, 729 のランダム配置で解析を行っている．Fig. 3 から 2 次元の場合と同様に，式(10)の重み関数の安定性が優れていることがわかる．

6.　まとめ

FPM は任意の節点配置に適用可能であることが特徴であるが，従来の重み関数では点の配置が不均一である時，精度の低下が見られた．しかし，式(10)の重み関数を用いることにより，計算点での値を十分に評価することが可能になり，ランダムな点配置であっても解析精度が維持される．これにより，2 次元，3 次元問題のように一定の点数を選択しにくい問題に対して，より一層適用性が向上したと言える．今後は，2 次元，3 次元弾性問題への適用性を確認していく予定である．

参考文献

1) Xiaozhong Jin, Gang Li, N.R. Aluru, “Positivity condition in meshless collocation method”, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. , 193 pp1171-1202, 2004
2) E. Onate , F. Perazzo , J. Miquel, “A finite point method for elasticity problems”, Computers & Structures, 79 :pp2151 -2163, 2001
3) 京田康宏，蟹江俊仁，寺田学：重み付き最小自乗法のよるメッシュフリーFEM の一次元問題への適用 土木学会北海道支部論文報告集，Vol 59，pp.128-131, 2003
4) 京田康宏，蟹江俊仁，寺田学：Finite Point Method の一次元問題適用について, 土木学会第 58 回年次学術講演会，p445-446，2003
5) 京田康宏，蟹江俊仁，三上隆：Timoshenko beam 座屈問題への Finite Point Method 適用について 土木学会北海道支部論文報告集，Vol 60，pp.64-65, 2004