

予測雨量の誤差を考慮した実用的洪水予測モデルの開発

A practical flood forecasting method coupled with errors of forecasted rainfall

(株) リブテック
 (財) 北海道河川防災研究センター
 北海道工業大学土木工学科

○正員 片山直樹 (Naoki Katayama)
 フェロー 星清 (Kiyoshi Hoshi)
 フェロー 橋本識秀 (Norihide Hashimoto)

1. はじめに

洪水予測システムの構築にあたっては、高速大容量のデータ通信技術をフル活用して、河川流域における河川情報を多面的な角度から捉え、インターネットを見る感覚で、ユーザーが画面表示された情報を正確に解釈して、洪水予警報の情報を迅速に伝達する体系化が不可欠となる。現在、北海道開発局では一般化貯留関数法にカルマン・フィルター予測理論を組み合わせたオンライン同定による洪水予測システムが実運用されている。しかしながら、出力である流量あるいは水位の予測精度を定量的に評価するためには、入力である雨量の不確定性を考慮した洪水逐次予測手法の開発が必要となる。そこで、本報告ではシステム入力である降雨量を状態変数に加えて、システム方程式の拡大を図り、予測雨量の誤差分散を取り入れた実用的洪水予測システムを提案する。

2. 予測雨量の誤差評価

ランク分けされた予測雨量に対応する1~3時間先の実測雨量データにガンマ分布をあてはめた結果、次の予測降雨の誤差分散 (S_{k+1}^2) 算定式が提案されている¹⁾。

$$Var(\hat{r}_{k+1}) = S_{k+1}^2 = a_s^2 I_{k+1}^{2p_1} \quad (1)$$

ここに、 $Var(\cdot)$: 分散、 \hat{r}_{k+1} : 予測値、 r_{k+1} : 真値、 a_s 、 b_s : 予測定数、 l : リードタイム(h)

八重岳レーダ(沖縄)と御在所レーダ(中部)による豪雨情報量を再整理して、定数が以下のように決定されている¹⁾。

$$a_s = 1.37, \quad b_s = 0.64 \quad (2)$$

式(2)の予測定数がどの地点においても適用可能かどうかの疑問は残るが、本報告での予測降雨誤差分散算定式として、式(1)と式(2)を用いて解析を行うこととする。 $r_{k+1} = 0$ のとき、分散がゼロとなる不合理を避けるために、 $r_{k+1} = 0.1$ mm/h と小さな値を想定して計算を進める。

3. システム方程式の定式化

本報告では、次式に示す損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)を流出モデルとして採用する(図-1参照)²⁾。

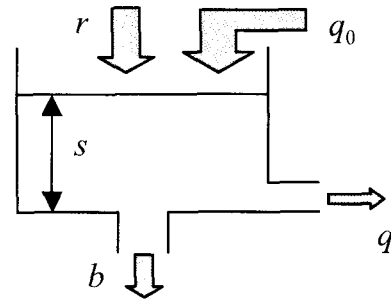


図-1 1段タンク型貯留関数モデル

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r - q - b + q_0 \\ s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ b = k_{13}q \\ q_0 = q_B \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad (3)$$

ここに、 s : 貯留高(mm)、 r : 観測雨量(mm/h)、 q : 観測流出高(mm/h)、 b : 損失高(mm/h)、 q_0 : 基底流出高(mm/h)、 q_B : 初期流出高(mm/h)、 k_{11} 、 k_{12} : 貯留係数、 k_{13} : 損失係数、 p_1 、 p_2 : 貯留指数、 λ : 減衰係数
 また k_{11} 、 k_{12} および k_{13} は、次式で表現される。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648} \\ c_{13} = k_{13} + 1 \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 A : 流域面積(km²)、 \bar{r} : 平均雨量強度(mm/h)、 c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} : 未知定数
 式(3)を解くために、次の変数を「状態変数」に選定する。

$$\begin{cases} x_1 = q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (5)$$

モデル定数 c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} および予測雨量 r は、洪水毎に変化することが予想される。したがって、 c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} および予測雨量 r も「状態変数」に加えてシステム方程式を作成する。

表-1 n次元カルマン・フィルタ理論

定義	公式	式番号
システム方程式	$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}D_{k-1} + w_{k-1}$	(1)
観測方程式	$z_k = H_k x_k + v_k$	(2)
システム誤差	$E(w_k) = 0, E(w_k w_k^T) = Q_k$	(3)
観測誤差	$E(v_k) = 0, E(v_k^2) = R_k$	(4)
初期条件	$\hat{x}_0(+), P_0(+)$	(5)
状態変量の伝達方程式	$\hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + \Gamma_{k-1}D_{k-1}$	(6)
状態変量の推定誤差共分散伝達方程式	$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_k$	(7)
カルマン・ゲイン	$K_k = P_k(-)H_k^T [H_k P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1}$	(8)
状態変量の更新方程式	$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)]$	(9)
状態変量の推定誤差共分散更新方程式	$P_k(+) = [I - K_k H_k] P_k(-)$	(10)

- x_k : $(n \times 1)$ の状態変量ベクトル
 - Φ_k : $(n \times n)$ の遷移行列
 - Γ_k : $(n \times n)$ の係数行列
 - D_k : $(n \times 1)$ の確定変数(強制関数)ベクトル
 - w_k : $(n \times 1)$ のシステム誤差ベクトル
 - z_k : (1×1) の観測値(状態変量のうちの1個)
 - H_k : $(1 \times n)$ の係数ベクトル
 - v_k : 観測誤差
 - Q_k : $(n \times n)$ のシステム誤差分散・共分散行列
 - R_k : 観測誤差分散
 - P_k : $(n \times n)$ の推定誤差分散・共分散行列
 - K_k : $(n \times 1)$ のカルマン・ゲインベクトル
 - I : $(n \times n)$ の単位行列
 - T : 上添字は行列の転置
- $\hat{x}_k(-)$: k 時刻で新しい観測値が入手される直前の状態変量推定値
 $\hat{x}_k(+)$: k 時刻で新しい観測値が入手される直後の状態変量更新値
 $P_k(-)$: 推定値 $\hat{x}_k(-)$ の誤差分散・共分散行列
 $P_k(+)$: 更新値 $\hat{x}_k(+)$ の誤差分散・共分散行列

すなわち、状態変量をベクトル表示すると以下のよう
に示される。

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに、

$$X_1 = [x_1 \ x_2]^T, X_2 = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]^T, X_3 = r \quad (7)$$

表-1 にはカルマン・フィルタ理論の定義式と関連
変量名が説明されている。以下に、表-1 の公式をどの
ように洪水予測システムに組み入れるかを述べる。

4. 状態変量の伝達方程式

式(6)の状態変量を用いて、式(3)を書き換えると2階
非線形微分方程式が得られる。ベクトル X_2 と X_3 が新
しい観測値が得られるまで、時間的に変動しないもの
と仮定して、非線形方程式をテーラー級数展開して線
形近似化を行い、システム方程式の拡大を図る。その
結果、表-1 に示す式(6)「状態変量の伝達方程式」に
対応する式(8)が得られる。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (8)$$

ここに、 $\Phi_i (i=1,2,3)$, Γ_1 : 係数行列、 I : 単位行列、 0 :
ゼロ行列ないしベクトル、 d_2 : スカラー量

次に、状態変量 $x_{1,k}$ の予測値と流量予測値 Q_k 及び水
位予測値 H_k の関係を次式に示す。

$$Q_k = \frac{A}{3.6} q_k = \frac{A}{3.6} x_{1,k}^{1/p_2} \quad (9)$$

$$H_k = b_0 + b_1 \sqrt{Q_k} \quad (10)$$

ここに、 Q_k , H_k , q_k : それぞれ、離散時刻 k における
流量、水位及び流出高、 $x_{1,k}$: 時刻 k における状態変
量 x_1 の値、 b_0 , b_1 : 適用水位毎に分類される水位～流
量曲線の回帰係数

5. 状態変量の推定誤差共分散伝達方程式の定式化

洪水予測では、状態変量の推定誤差共分散伝達方
程式は l 時間先の流量及び水位予測値の精度(分散)算
定式に対応しているため、表-1 に示される式(7)「推
定誤差共分散伝達方程式」について定式化を行う。

表-1 の式(7)に示される \hat{X}_{k+1} (誤差ベクトル) の分
散・共分散行列 P_{k+1} は次式で与えられる。

$$P_{k+1} = E(\tilde{X}_{k+1}\tilde{X}_{k+1}^T) \quad (11)$$

$$= \Phi_k P_k \Phi_k^T$$

ここに、 Φ_k ：式(8)の小行列からなる(6×6)の係数行列

式(11)において小行列を用いて行列展開して、状態変量 X_1 に関する推定誤差分散・共分散を求めると次式が得られる。

$$P_{1,k+1} = \Phi_1 P_{1,k} \Phi_1^T + \Phi_2 P_{2,k} \Phi_1^T + \Phi_3 P_{3,k} \Phi_1^T + \Phi_1 P_{2,k} \Phi_2^T + \Phi_2 U_{1,k} \Phi_2^T + \Phi_1 P_{3,k} \Phi_3^T + \Phi_3 U_{2,k} \Phi_3^T \quad (12)$$

ここに、 $P_{1,k}$ ： X_1 に関する分散・共分散行列、 $P_{2,k}$ ： X_1 と X_2 に関する共分散行列、 $P_{3,k}$ ： X_1 と X_3 に関する共分散行列、 $U_{1,k}$ ： X_2 に関する分散・共分散行列、 $U_{2,k}$ ： X_3 に関する分散(式(1)で与えられる)、 Φ_i ($i=1,2,3$)：式(8)の小行列

すなわち、モデル定数と予測雨量を状態変量に加え、システム方程式を拡大することによって $P_{2,k}$ 、 $P_{3,k}$ 、 $U_{1,k}$ 及び $U_{2,k}$ が $P_{1,k+1}$ に反映されることになる。

流量を予測する場合、流量と流出高の関係により計算される流量予測値の精度(分散)は、式(9)より次式で求められる。

$$Var(Q_k) = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial x_{1,k}} \right)^2 Var(x_{1,k}) \quad (13)$$

$$= \left(\frac{A}{3.6} \right)^2 \left(\frac{1}{P_2} x_{1,k}^{1/p_2-1} \right)^2 Var(x_{1,k})$$

ここに、 $Var(x_{1,k})$ は $x_{1,k}$ の分散であり、式(12)に示される行列 $P_{1,k}$ の1行1列目の値で計算される。

また、水位を予測する場合、式(10)により計算される水位予測値の精度(分散)は、次式で求められる。

$$Var(H_k) = \left(\frac{\partial H_k}{\partial Q_k} \right)^2 Var(Q_k) = \frac{b^2}{4} Q_k^{-1} Var(Q_k) \quad (14)$$

要約すると、1時間先の予測流量(Q_t)および予測水位(H_t)の推定誤差分散を求めるには、式(13)と式(14)を順次適用していけばよいことになる。

表-1の式(7)に示される「システム誤差 Q_k 」をどう与えるかが実際上問題となる。本報告では、新しい観測値が入手される直前に、状態変量推定値 $\hat{x}_{1,k}(-)$ と $\hat{x}_{2,k}(-)$ の $100\alpha_1\%$ に相当する乗算的ノイズの分散を式(12)に付加させた ($\alpha_1=0.1\sim 0.2$)。

6. 観測方程式の定式化

カルマン・フィルタ理論を適用するために、表-1に示される式(2)「観測方程式」の定式化を行う。流出高を観測値とすると、流量を流出高に変換した値と状態変量 x_1 の間には式(5)の関係が成立するので、観測方程式を次のように定義する。

$$z_k = x_{1,k}^{1/p_2} (1 + v_k) = x_{1,k}^{1/p_2} + c_k v_k \quad (15)$$

ここで、

$$c_k = x_{1,k}^{1/p_2} \quad (16)$$

z_k ：サンプリング時刻 k における流出高観測値、 v_k ：観測誤差

7. 状態変量の更新方程式

観測値として流出高が得られた後、表-1に示される式(9)「状態変量の更新方程式」は、次式で与えられる。

$$\hat{X}_k(+) = \hat{X}_k(-) + K_k [z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2}] \quad (17)$$

ここで注意すべき点は、予測雨量は別途レーダー雨量計などを用いた予測雨量モデルにより与えられるものであり、式(17)によって更新される性質のものではないということである。

8. 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化

カルマン・フィルタを実行するには、表-1に示される式(4)「観測誤差分散」が必要となる。 R_k は式(15)より次式で与えられる。

$$\begin{cases} R_k = E[(c_k v_k)^2] = c_k^2 E[v_k^2] = c_k^2 \alpha_2^2 \\ \alpha_2^2 = E[v_k^2] \quad (\alpha_2 = 0.1\sim 0.2) \end{cases} \quad (18)$$

すなわち、 α_2 については観測値の10%ないし20%の誤差を仮定するものとする。

9. 実測データへの適用

1段タンク型貯留関数法による洪水予測モデルは、当初単一流域を対象として開発されたモデルである。そこで、北海道の一般河川である石狩川の納内地点(流域面積 3558.0km²)における近年の出水である平成13年9月11日洪水を選定して、その解析例を示す。

なお、予測降雨値として、雨量が容易に加工可能な旧建設省の洪水予報業務においてよく用いられていた過去3時間の移動平均雨量を用いた。この方法は単純な時系列予報であるが、従来の流出予測において特別な不都合を生じなかったこと、またその計算が簡便であることなどから多用されてきたものである。以下に、現時刻 t_k から1時間後の降雨予測値を \hat{r}_{k+t} とした場合の式を以下に示す。

$$\hat{r}_{k+t} = (r_{k-2} + r_{k-1} + r_k) / 3 \quad (19)$$

3時間先予測水位の計算例を図-2及び表-2に、同じく、予測雨量の誤差分散(式(1))を考慮しないでモデルに実測雨量を与えた再現結果を図-3及び表-3に示す。ハイドログラフの9/10～9/11における減衰部から立ち上がり部にかけての適合度は良好であることがわかる。

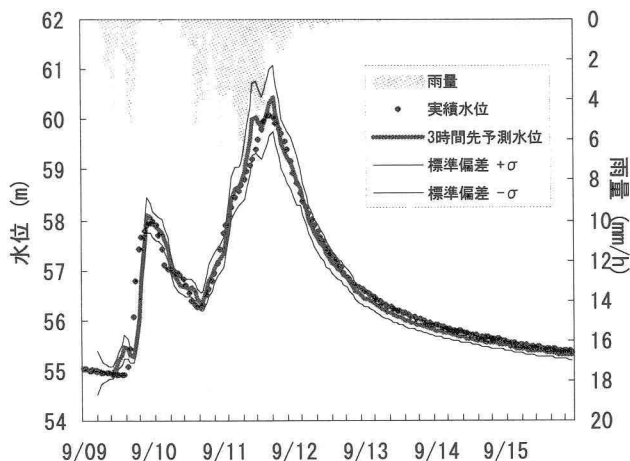


図-2 過去3時間移動平均雨量を用いた再現結果

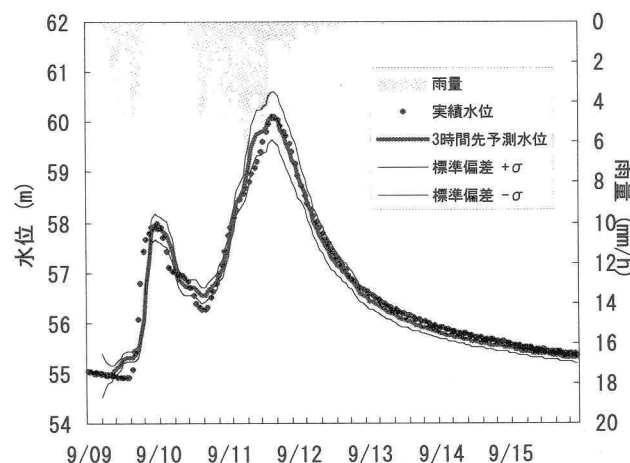


図-3 実測雨量を用いた再現結果

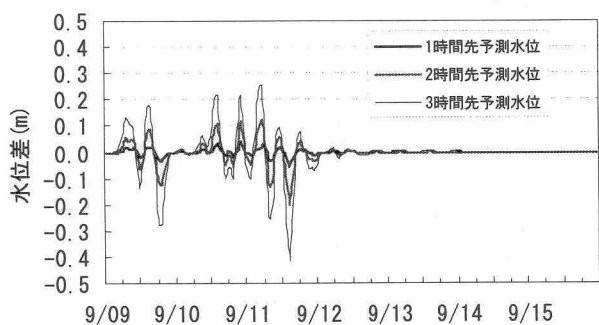


図-4 予測水位差

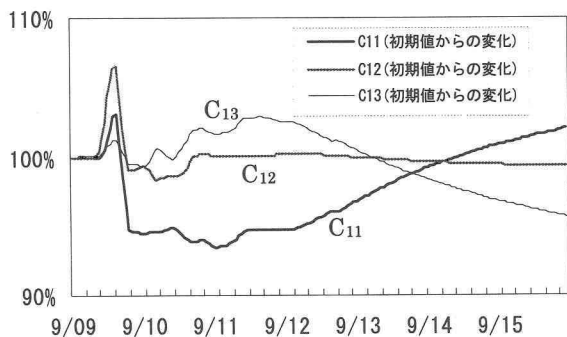


図-5 パラメータ更新値の変化率

表-2 過去3時間移動平均雨量を用いた再現結果

採用モデル	1時間先予測	2時間先予測	3時間先予測
実測ピーク水位	60.09m	60.09m	60.09m
予測ピーク水位	60.15m	60.30m	60.44m
予測水位+標準偏差	60.60m	60.80m	61.10m
RMSE	0.0935	0.1728	0.2463

表-3 実測雨量を用いた再現結果

従来モデル	1時間先予測	2時間先予測	3時間先予測
実測ピーク水位	60.09m	60.09m	60.09m
予測ピーク水位	60.10m	60.11m	60.12m
予測水位+標準偏差	60.55m	60.57m	60.59m
RMSE	0.0927	0.1686	0.2349

ピーク近傍におけるハイドログラフの適合度については、実際の雨量は急激に減衰しているのに対し、過去3時間の平均値を用いて予測を行っている場合には、計算値が実測値を上回る結果となっているが、予測値・実測値とも信頼区間(予測値±標準偏差)内に収まっている。

採用モデルと従来モデルとの水位予測値を比較した。その結果、実測雨量が過去3時間の移動平均雨量より大きい場合には水位差は正となり、逆の場合は負となる。図-4に示すように、最大で0.42(m)の差が見られた。図-5は、モデル定数の初期値を100%として、逐次更新される値を1時間ごとに変化率で表したものである。モデル定数の時間変動は小さく10%以内に収まっている。

評価基準には、表-2と表-3に示すハイドログラフ全体の誤差を表す指標として、平均2乗誤差の平方根(RMSE: Root Mean Squares Error)を用いた。この結果からも提案した手法の有効性を確認することができる。

10. まとめ

本報告では、予測雨量の誤差を考慮した1段タンク型貯留関数モデルを石狩川納内地点に適用し、洪水予測シミュレーションを試みた。本モデルの特徴は、カルマン・フィルターによる予測値の誤差分散つまり予測雨量の誤差を含んだ予測精度(信頼区間)を自動的に算定することであり、河道追跡を含む場合にも拡張可能である。

参考文献

- 1) Etoh, T., Kamibayashi, Y., Nakanishi, M. and Yoshida, M.: A study on prediction error in rainfall forecasting and its application to on-line operation of detention storage, Proc. of International Conference on Water Resources & Environment Research: Towards the 21st Century, Vol. I, pp.531-538, 1996.
- 2) (財)北海道河川防災研究センター・研究所編集・発行: 単一流域を対象とした貯留関数法の精度比較, 189p., 2002.