

二段タンク型貯留関数モデルの未知定数推定に関する研究 (II)

Study on unknown parameters of the two series tank model coupled with a storage routing method (II)

北海学園大学工学部 〇正員 嵯峨 浩(Hiroshi Saga)
 北海道河川防災研究センター フェロー 星 清(Kiyoshi Hoshi)
 北海道工業大学工学部 フェロー 橋本 謙秀(Norihide Hashimoto)

1. まえがき

前報¹⁾では、二段タンク型貯留関数モデルの未知パラメーターを日野・長谷部らのARフィルター理論¹⁰⁾によって固定する手法を示した。具体的には下段タンクの3個の未知パラメーターを推定するものであったが、一部主観的な判断が入るところがあり、信頼性を欠く懸念があった。本報告では、この欠点を是正するため確定値以外の全ての未知パラメーターを客観的に、すなわち最適化手法で決定する手法を開発した。また、収束性や計算の簡便性を追及するため上段タンクからの浸透量を既知とする(感度係数の伝達)方法を採用したが、この方法の持つ意味を明らかにした。

2. 流出モデル

本研究の流出モデルを図-1に示す。従来のタンクモデルの側方流出孔の高さは、貯留関数法の貯留効果で表現されている。各タンクの支配方程式と未知定数の関係式^{3), 4), 5), 6), 7)}は次式で与えられる。

上段タンク

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = r - q_1 - p_s \\ S_1 = k_1 q_1^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ p_s = \alpha_1 q_1 \end{cases} \quad \dots\dots(1)$$

$$\begin{cases} k_1 = c_1 A^{0.24}, k_2 = c_2 k_1^2 (\bar{r})^{-0.2648}, 1 + \alpha_1 = c_3 \\ p_1 = 0.6, p_2 = 0.4648 \end{cases} \quad \dots\dots(2)$$

下段タンク

$$\begin{cases} \frac{dS_2}{dt} = p_s - q_2 - z_2 \\ S_2 = k_4 q_2 + k_5 \frac{dq_2}{dt} \\ z_2 = \alpha_2 q_2 \end{cases} \quad \dots\dots(3)$$

$$q = q_1 + q_2 \quad \dots\dots(4)$$

ここに、 $S_1 \cdot S_2$: 貯留高 (mm)、 r : 観測雨量 (mm/hr)、 \bar{r} : 平均雨量 (mm/hr)、 A : 流域面積(km²)、 $q_1 \cdot q_2$: 側方流出高(mm/hr)、 $p_s \cdot z_2$: 浸透量 (mm/hr)、 $k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot k_5$: 貯留係数、 $\alpha_1 \cdot \alpha_2$: 損失係数、 $p_1 \cdot p_2$: 貯留指数

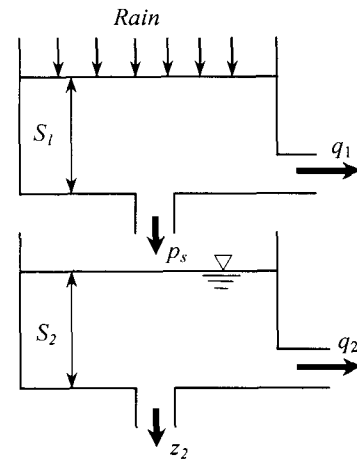


図-1 二段タンク型貯留関数モデル

である。なお、観測流量 q_{ob} をそのまま扱うのが理想であるが、後述の理論展開でゼロ初期条件を必要とするので、以下のように基底流出成分を分離⁹⁾する。

$$q^*(t) = q_{ob}(t) - Q_B \exp(-\lambda t) \quad \dots\dots(5)$$

ここに、 Q_B : 初期流出高 (mm/hr)、 λ : 減水係数
 以後、(5)式の処理をした流量 q^* を実測流量として扱う。

上段タンクにおける未知定数 c_1, c_2, c_3 の3個は数学的最適化手法により同定され、下段タンクにおける未知定数の取り扱いは以下ようになる。

3. 下段タンク未知定数の取り扱い

(3)式より次式の下段タンク支配方程式を得る。

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c_6 \frac{dq_2}{dt} + c_5 q_2 = c_4 p_s \quad \dots\dots(6)$$

$$\text{ここで} \begin{cases} c_6 = k_4 / k_5 \\ c_5 = (1 + \alpha_2) / k_5 \\ c_4 = 1 / k_5 \end{cases} \quad \dots\dots(7)$$

詳細は前報を参照してもらうこととしてARフィルターによると未知定数 c_5, c_6 を次のように表すことができる。

$$\begin{cases} c_5 = (\delta / T_c)^2 \\ c_6 = \delta^2 / T_c \end{cases} \quad \dots\dots(8)$$

ここで T_c はハイドログラフ減水曲線のうち一番低減率が小さいところの時定数、 δ は 2.0 以上の値を持つ無次元減水係数である。

また、 j を虚数単位とすると(6)式の伝達関数は次式で表される。

$$H(\omega) = \frac{\int_0^\infty q_2(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty q_2(t) \sin \omega t dt}{\int_0^\infty p_s(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty p_s(t) \sin \omega t dt} \quad \dots\dots(9)$$

上式で $\omega = 2\pi f = 0$ とすると、(8)式との関係から

$$c_4/c_5 = \sum q_2(t) / \sum p_s(t) \quad \dots\dots(10)$$

(10)式のように、未知定数 c_4 と c_5 の比は解析期間内の総中間流出量と総浸透量の比で表される。自然現象の総入力と総出力の比であるから、当然

$$c_4/c_5 < 1 \quad \dots\dots(11)$$

となる。 c_5 が決定すると(10)式から c_4 も決めることができるが、右辺の比をどの程度に見積もるかの問題が残る。前報ではこの比率を流域ごとに判断して確定値としていた。冒頭で主観的判断と記述した部分はこのことである。ここで、 c_4 、 c_5 は、(7)式の関係があるから、

$$Ratio = c_4/c_5 = \frac{1}{k_5} \frac{k_5}{1+\alpha_2} = \frac{1}{1+\alpha_2} \quad \dots\dots(12)$$

すなわち、下段タンクの損失係数 α_2 を数学的に最適同定すると客観的に全ての未知パラメーターを決定することが可能である。

4. 支配方程式の数値計算

数値計算の方法は、参考文献 11) に詳述されているのでここではシステム方程式のみを記述する。

上段タンクの支配方程式(1)式を用いて側方流出高を求めるには、次のような変数変換を行う。

$$y_1 = q_1^{p_2}, \quad y_2 = \frac{d}{dt} (q_1^{p_2}) \quad \dots\dots(13)$$

この結果、次のようなシステム方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(14)$$

ここに、

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{k_1 p_1}{k_2 p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{*\left(\frac{p_1}{p_2}-2\right)} y_2^* - \frac{(1+\alpha_1)}{k_2} \frac{1}{p_2} y_1^{*\left(\frac{1}{p_2}-1\right)} \\ a_2 = -\frac{k_1 p_1}{k_2 p_2} y_1^{*\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)} \\ d_2 = \frac{k_1 p_1}{k_2 p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{*\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)} y_2^* + \frac{(1+\alpha_1)}{k_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) y_1^{*\frac{1}{p_2}} + \frac{r}{k_2} \end{cases} \quad \dots\dots(15)$$

下段タンクも同様に

$$y_3 = q_2, \quad y_4 = \frac{dq_2}{dt} \quad \dots\dots(16)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_5 & -c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_4 p_s \end{bmatrix} \quad \dots\dots(17)$$

ここで、上段タンクからの浸透量 p_s は、 k_1, k_2, c_3 が指定されると一義的に決定されるので、 p_s は降雨量と同様に既知量として取り扱う。これらのシステム方程式を解くと計算流量 q は次式となる。

$$q = q_1 + q_2 = y_1^{1/p_2} + y_3 \quad \dots\dots(18)$$

5. 浸透量 p_s を既知量とする意味

浸透量 p_s を既知量としない場合は、(1)式、(2)式を連立して解くことになる。これまでと同様に線形化手法¹¹⁾を用いると、システム方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(19)$$

ここに、 a_1, a_2, d_2 は (15) 式と同様であり、その他は次式で表される。

$$\begin{cases} a_3 = -\frac{\alpha_1}{k_5} \frac{1}{p_2} y_1^{*\left(\frac{1}{p_2}-1\right)} \\ a_4 = -\frac{(1+\alpha_2)}{k_5} \\ a_5 = -\frac{k_4}{k_5} \\ d_4 = \frac{\alpha_1}{k_5} \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) y_1^{*\frac{1}{p_2}} \end{cases} \quad \dots\dots(20)$$

一方、浸透量 p_s を既知量とする場合のシステム方程式は、既に上段タンクは(14)式、下段タンクは(17)式で示されているが、比較のため記号を変えて下段タンクのシステム方程式を再記すると次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_4' \end{bmatrix} \quad \dots\dots(21)$$

$$\text{ここに、} b_4' = \frac{p_s}{k_5} \quad \dots\dots(22)$$

以上より、浸透量 p_s を既知とするか、しないかの相違は (dy_4/dt) の項だけである。(19)式の (dy_4/dt) は、

$$\begin{aligned} \frac{dy_4}{dt} &= a_3 y_1 + a_4 y_3 + a_5 y_4 + d_4 \\ &= \frac{p_s}{k_5} \left\{ \frac{1}{p_2} \left(\frac{y_1}{y_1^*} - 1 \right) + 1 \right\} - \frac{(1+\alpha_2)}{k_5} y_3 - \frac{k_4}{k_5} y_4 \end{aligned} \quad \dots\dots(23)$$

ここで、 $p_s^* (= \alpha_1 y_1^{*p_2})$ は 1 ステップ前の浸透量を表す。
また、(21)式より

$$\begin{aligned} \frac{dy_4}{dt} &= a_4 y_3 + a_5 y_4 + b'_4 \\ &= -\frac{(1+\alpha_2)}{k_5} y_3 - \frac{k_4}{k_5} y_4 + \frac{p_s}{k_5} \end{aligned} \quad \dots\dots(24)$$

(23)式と(24)式が同じ値になるとすると

$$\begin{aligned} \frac{p_s^*}{k_5} \left\{ \frac{1}{p_2} \left(\frac{y_1}{y_1^*} - 1 \right) + 1 \right\} &= \frac{p_s}{k_5} \\ \therefore p_s &= p_s^* \left\{ \frac{1}{p_2} \left(\frac{y_1}{y_1^*} - 1 \right) + 1 \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots(25)$$

(25)式は、浸透量 p_s を既知量とするか、しない場合の両者の関係を表している。即ち、計算過程での p_s^* の補正を予め行なっている形式になる。また、大きな利点はそれぞれのタンクで独立にシステム方程式をたてることのできるため、システム方程式と感度係数マトリックスの数値計算で行列数を大きく減らすことである。特に、感度係数の計算ではこの効果は大きい。(19)式の場合、感度係数を得るには[16×16]のマトリックスを解く事になるが、後述の様に p_s を既知量として解くと[6×6]と[8×8]のマトリックス演算で済む。

6. 感度係数の算出

上段タンクからの浸透量 p_s は $p_s(k_1, k_2, c_3)$ となるので、(17)式からも明らかなように y_3 と y_4 も未知定数(k_1, k_2, c_3)の変化に対応して変化する。また、下段タンクの損失係数 α_2 も最適化の対象とした為、 $y_3(k_1, k_2, c_3, \alpha_2), y_4(k_1, k_2, c_3, \alpha_2)$ となる。

表示法を簡略化するために

$$K_1 = [k_1 \quad k_2 \quad c_3]^T, \quad K_2 = [\alpha_2] \quad \dots\dots(26)$$

とすると、上段タンクの感度係数ベクトルは

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial K_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_1 \\ a_1 \mathbf{I}_1 & a_2 \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial K_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(27)$$

ここに、 $G_2 = [g_1 \quad g_2 \quad g_3]^T$ は、

$$\begin{cases} g_1 = -\frac{1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} y_2 \\ g_2 = \frac{1}{k_2^2} \left(k_1 \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} y_2 + c_3 y_1^{\frac{1}{p_2}} - r \right) \\ g_3 = -\frac{1}{k_2} y_1^{\frac{1}{p_2}} \end{cases} \quad \dots\dots(28)$$

ここで、 $\mathbf{0}$ は [3×3] のゼロ行列、 $\mathbf{0}_1$ は [3×1] のゼロ行列、 \mathbf{I}_1 は [3×3] の単位行列である。下段タンクは

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_3}{\partial K_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \\ -c_5 \mathbf{I}_2 & -c_6 \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_3}{\partial K_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ c_4 \frac{\partial p_s}{\partial K_1} \\ g_8 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(29)$$

$$g_8 = -\frac{c_5 p_s}{(1+\alpha_2)^2} = -c_5 p_s \text{Ratio}^2 \quad \dots\dots(30)$$

ここで、 $\mathbf{0}_2$ は [4×4] のゼロ行列、 $\mathbf{0}_3$ は [2×1] のゼロ行列、 \mathbf{I}_2 は [4×4] の単位行列である。 g に関する感度係数は上式を解き(31)式に従って計算すれば良い。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial K_1} = \frac{\partial q_1}{\partial K_1} + \frac{\partial q_2}{\partial K_1} = \frac{1}{p_2} y_1^{\left(\frac{1}{p_2}-1\right)} \frac{\partial y_1}{\partial K_1} + \frac{\partial y_3}{\partial K_1} \\ \frac{\partial q}{\partial K_2} = \frac{\partial q_1}{\partial K_2} + \frac{\partial q_2}{\partial K_2} = \frac{\partial y_3}{\partial K_2} \left(= \frac{\partial y_3}{\partial \alpha_2} \right) \end{cases} \quad \dots\dots(31)$$

(29)式のように、上段タンクの未知パラメーターの影響を浸透量の感度係数 $[c_4 \cdot \partial p_s / \partial K_1]$ によって下段タンクに

伝達することで計算を容易にさせ、収束性を向上させることができる。この方法は河道洪水追跡手法や他の最適化手法にも適用が可能な計算手法である。

7. 道内一級河川 13 水系の実流域への適用

このモデルを使用して、北海道内一級河川 13 水系のおよそ 460 例の流出解析を行った。計算は数学的最適化手法を用いているが、収束の判断は未知パラメーターの補正值 ΔK_i の大きさによった。すなわち、

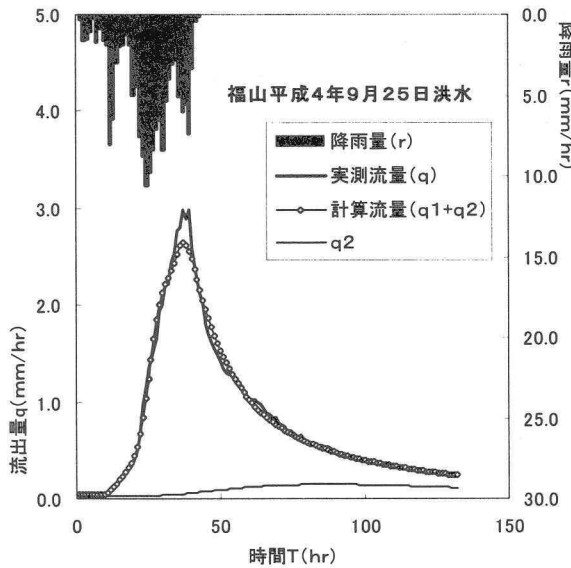
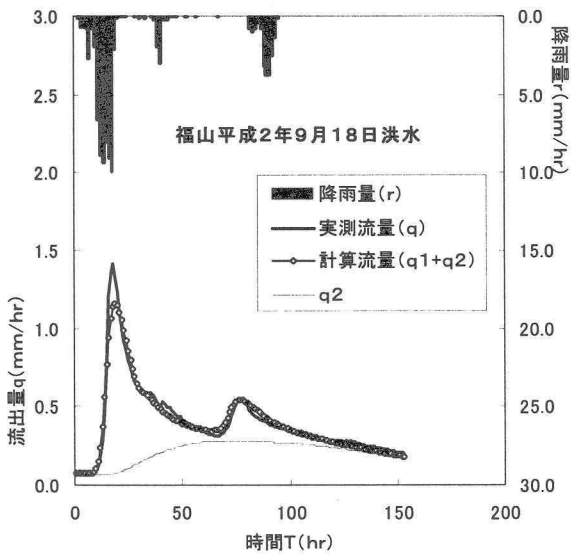
$$\varepsilon > \left| \frac{\Delta K_i}{K_i} \right|_{i=1,2} \quad \dots\dots(32)$$

上式において、 ΔK_i が ε (=1%) 未満になった時、収束とした。紙面の都合上一部であるが、鶴川水系福山地点における計算結果を図-2 に示す。いずれもピーク流量が若干小さめに計算されているが、減水部の適合度がかなり良い結果となっている。減水部情報により未知パラメーターを固定した本手法が妥当であることを示している。また、平成2年の出水では2つのピークを再現しており、実用上十分な精度を有するモデルであると思われる。

流域ごとに最適同定された未知パラメーターの推定平均値を表-1 に示す。未知パラメーター c_1, c_2, c_3 は旧モデルで同定された値とほぼ同じである。また、流域ごとに $Ratio$ の分布を総降雨量あるいは初期流出高等と相関を求めたが明確な関係は得られなかった。表-2 は改良された今年度のモデルと旧モデルでの収束率の違いを示している。若干ではあるが、収束率の向上が見られる。

表一 水系別未知パラメーターの推定平均値

水系	C_1	C_2	C_3	Ratio
石狩川	10.061	0.159	2.354	0.378
尻別川	11.446	0.699	2.258	0.414
後志利別川	6.930	0.506	2.007	0.570
留萌川	9.296	0.260	1.362	0.545
天塩川	9.471	0.489	2.458	0.477
鶴川	11.461	0.354	2.353	0.468
沙流川	10.215	0.164	1.399	0.489
渚滑川	12.549	0.177	2.122	0.405
湧別川	10.844	0.200	2.077	0.354
常呂川	11.532	0.327	2.500	0.467
網走川	17.003	0.077	4.498	0.275
十勝川	14.951	0.127	2.227	0.405
釧路川	20.106	0.077	3.052	0.381
平均値	11.990	0.213	2.359	0.433



図一 流出計算結果 (鶴川水系)

表二 収束率の比較

水系	現モデル収束率 (%)	旧モデル収束率 (%)
石狩川	61.1	72.2
尻別川	89.8	90.2
後志利別川	56.5	68.0
留萌川	83.3	91.7
天塩川	73.9	60.0
鶴川	97.1	85.7
沙流川	75.6	73.3
渚滑川	90.9	90.9
湧別川	88.0	92.0
常呂川	97.2	97.2
網走川	100.0	89.7
十勝川	83.1	75.0
釧路川	92.6	92.6
平均値	84.3	83.0

参考文献

- 1) 嵯峨、星、橋本：二段タンク型貯留関数モデルの未知定数推定に関する研究、北海道支部論文報告集、第58号、pp.344-347、2002。
- 2) Saga, Hoshi and Hashimoto: A New Tank Model coupled with the Storage Routing Method. XX Nordic Hydrological Conference Report. No.44, pp.605-614、1998。
- 3) 八田：山地流域における流出過程のモデル化とその応用に関する研究、北海道大学博士論文、1998
- 4) 佐藤、嵯峨、馬場、星：損失機構を含む貯留関数法を応用したタンクモデルの提案、第54回年講講演概要集、第2部、pp.634-635、1999。
- 5) 田中、藤田、清水：損失機構を含む貯留関数法に関する研究、北海道支部論文報告集、第53号(B)、pp.54-59、1997。
- 6) 馬場、星、橋本：損失機構を組み合わせた貯留関数モデルの総合化、水工学論文集、第43巻、pp.1085-1090、1999。
- 7) 佐々木、星、井出：損失項を含む総合化貯留関数法の開発、北海道開発局開発土木研究所研究報告書、2000。
- 8) 星、山岡：雨水流法と貯留関数法の相互関係、第26回水理講演会論文集、pp.273-278、1982。
- 9) 吉川、砂田、グエン：洪水流量遅減曲線の特性を考慮した流出モデルに関する研究、土木学会論文報告集、第283号、pp.23-32、1979。
- 10) 日野、長谷部：水文流出解析、森北出版
- 11) 若手水文学研究会：現場のための水文学、北海道開発局開発土木研究所、1994。