

性能評価における(効率化)モンテカルロシミュレーションの役割について

A Basic Consideration on Advanced Monte Carlo Simulation for Performance Based Design

(株)地崎工業 土木技術部 ○正会員 須藤 敦史(Atsushi SUTOH)

1. はじめに

一般的に性能設計体系では多様な解析技術を導入した設計方法が可能になる反面、構造物個々の要求性能に対する照査方法の合理的な選定とそれによる迅速な計算が重要となる。

ここで、ISO2394に定められるように共通の信頼性評価は確率を基本とした手法によるものが現時点では最も合理的と考えられるが、厳密な破壊確率に基づく信頼性評価の導入には、手法の汎用性・簡便性や迅速性など多くの問題を解決しなければならないのも現実である。

一方、「耐久期間(の地震荷重)において構造物の機能が経済的に維持できる」などの要求性能を満足できるかを評価するに当たってはライフサイクルコスト(LCC:Life cycle cost)の最小化

(a)地震入力を変化曲線、被害確率を fragility 曲線で表現して計算する方法 b)入力地震動を生起確率による多数の地震波形を求め、以下に示すモンテカルロシミュレーションによる応答解析で被害確率を求める手法)で照査せざるを得ない。

ここで、不規則かつ非線形な構造物の正確な信頼性評価の代表的な解法としてモンテカルロシミュレーション(Monte Carlo Simulation)以下MCS)が挙げられる。この手法は破壊確率などを解析的に求めるため、構造物の状態(多自由度・非線形)や作用荷重の状態(非定常)に依存しない汎用性の高い解法である。

しかし、MCSを用いても構造物の破壊は非常に小さい領域を対象とするため、これを精度良く求めるには膨大な計算量を必要とする。

そこでMCSに効率化を目的としたサンプリング技法を導入して破壊事象の発生確率の高い領域にサンプルを集中させ、計算量やサンプル数の減少を図った Importance sampling technique (以下ISM)³⁾や Latin Hypercube sampling technique⁴⁾、また最近では Double and Clump (D&C)⁶⁾、Russian Roulette and Splitting (RR&S)⁸⁾などの効率化MCSが提案されている。

本論文では迅速な破壊確率の算定もしくは信頼性照査の汎用化を目的として効率化MCSを概観し、同時に性能設計における保有性能の照査手法として効率化MCSの適用性を考察する。

2. 効率化モンテカルロシミュレーション

2.1 モンテカルロシミュレーション

MCSは、規定の確率分布を満足するように確率変数ベクトル $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ の数多くのサンプル値を抽出したときに、全サンプリング回数と限界状態関数 $Z = g(X)$ が $g(X) \leq 0$ となる回数との頻度比で破壊確率 $P(E)$ を求める手法である。

$$P(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I\{g(X_i) \leq 0\} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I\{g(X_i) \leq 0\} \quad (1)$$

ここで、 N :全サンプリング回数、 $I\{g(X) \leq 0\}$:限界状態関数加えて $Z = g(X)$ が負になる時(破壊)を1、それ以外は0となる。

ここで、任意の分布形状を示す確率変数ベクトル $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ のサンプル値の抽出方法は Fig.1 に示すように $0 \sim 1$ の範囲で発性させた一様乱数 $u^{(j)}$ と任意の確率分布より確率変数 $X^{(j)}$ が得られる。

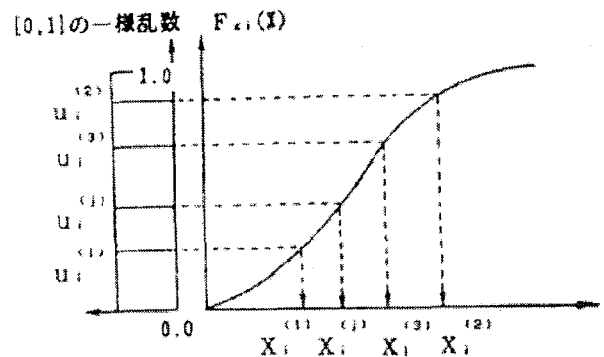


Fig.1 Sampling method (MCS)

MCSでは、サンプル個数が $g(X) \leq 0$ と比較して十分に大きな場合に精度の良い結果(確率)が得られる。

しかし、有限回のサンプリングでは各確率分布のその部分まで精度良くサンプル値を抽出することは難しく、サンプル数を増加させることは計算時間の増加を引き起こす。

このため、重要な(破壊点まわり)領域に的を絞ったサンプリングを行い、加えて破壊確率の精度を維持しながらサンプリング個数の減少を図るISMなどの効率化モンテカルロ・シミュレーション(Advanced Monte Carlo Simulation)による破壊確率の算定が行われている。

2.2 重要サンプリング法(Importance Sampling method)

破壊確率の算定に影響の大きい設計点(Design point)周辺に的を絞ってサンプルを抽出する方法であり、破壊確率は式(2)で表される。

$$P(E) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I\{g(X_i) \leq 0\} \cdot \frac{f_x(X_i)}{h_x(X_i)} \quad (2)$$

ここで、 $f_x(X)$:確率変数ベクトル X の同時確率密度関数、 $h_x(X)$:設計ベクトル X_D を期待値とする正規同時確率密度関数であり、重要サンプリング確率密度関数(Importance Sampling

density function)と呼ばれる。

ここで2変数の場合におけるISMの概念をFig.2に示す。

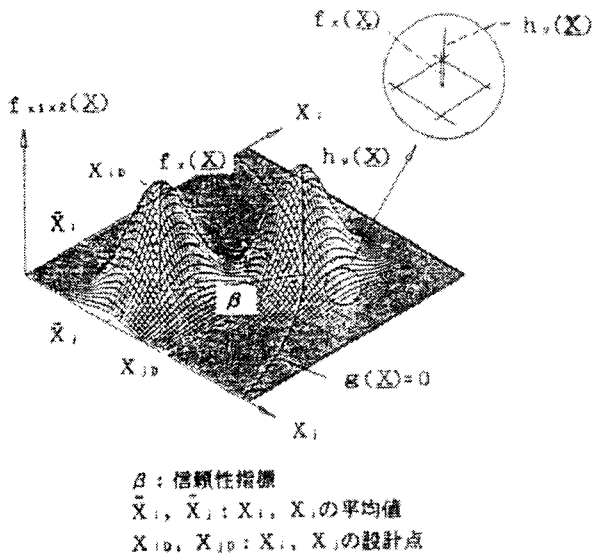


Fig.2 Importance sampling method.

ISMでは条件関数 $I\{g(X_i) \leq 0\}$ を変更し、重要サンプリング密度関数 $h_x(X)$ の分散を適切に設定することにより破壊確率 $P(E)$ の算定が効率化される。

3. Double and Clump (D&C) の概要

3.1 D&C アルゴリズム

構造物の破壊基準レベル $\lambda, -\lambda$ (本研究では応答変位が基準レベルを越えた場合を破壊と定義) を設定し、不規則外乱を $nSim$ 組サンプリングして動的応答解析を実施する。

ここで、不規則外乱のシステムの各時刻 t_k における応答ベクトル $Z_n(t_k), n = 1, 2, \dots, nSim$ は Markov 性を示すものとし、この時の重み $w_n(t_k)$ および選定基準 $C_n(t_k)$ を式(3)と以下で定義する。

$$\begin{cases} Z_1(t_k) & w_1(t_k) & C_1(t_k) \\ Z_2(t_k) & w_2(t_k) & C_2(t_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_i(t_k) & w_i(t_k) & C_i(t_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{nSim}(t_k) & w_{nSim}(t_k) & C_{nSim}(t_k) \end{cases} \quad (3)$$

$w_n(t_k)$: 重み(初期値 $w_n(0) = 1/nSim, n = 1, 2, \dots, nSim$)

$C_n(t_k)$: 選定基準(基準レベルを超過する確率)

次に時刻 t_k において $nSim$ 組のサンプルされた不規則外乱に対する応答ベクトル $Z_n(t)$ が基準レベル $\lambda, -\lambda$ を通過する可能性の大きさ(選定基準: $C_n(t_k), n = 1, 2, \dots, nSim$) を求めて式(4)のように大きい順に並び替える。

$$C_{j,1}(t_k) \leq C_{j,2}(t_k) \leq \dots \leq C_{j,nSim}(t_k) \quad j = 1, 2, \dots, nSim \quad (4)$$

ここで Fig.3 に示すように t_k ステップにおける選定基準値の上位 M 個 (通常はサンプル総数の 20%程度以下) のサンプル数を $2M$ 個に増加(Doubling)させ、次の時間ステップ (t_{k+1}) におけるサンプル数とし、同時にサンプル総数 $nSim$ 個を維持す

るように選定基準の小さい $2M$ 個のサンプル数を M 個に減少させる(Clumping)。

これにより破壊基準レベルを通過する確率の高いサンプルの数を増加させることになり通常の MCS より少ないサンプル数で効率かつ正確に初通過確率を算定する方法である。

ここで応答ベクトル $Z_n(t_k), n = 1, 2, \dots, nSim$ を表すと Fig.4 のようになる。

3.2 サンプルの統計量修正

以上の操作で破壊基準レベルを通過する確率の高いサンプルは多くなるが、サンプル全体の統計量(破壊確率)が歪むこととなる。

そこで Doubling したサンプルには式(4)に示すように重みを $1/2$ に減少させる。また、Clumping されたサンプルの重みは式(5)に示すように Clumping 以前にサンプルが保有していた重みの和を新たな重みとする。

$$w_{k,nSim-M+1}^{(t_k)} \Rightarrow \frac{1}{2} w_{k,nSim-M+1}^{1(t_k+1)}, \frac{1}{2} w_{k,nSim-M+1}^{2(t_k+1)} \quad (5)$$

$$w_{k,M}(t_k+1) = w_{k,2M-1}(t_k) + w_{k,2M}(t_k) \quad (6)$$

$nSim - M + 1 (M \rightarrow 2M)$: Doubling したサンプル個数,
 $M (2M \rightarrow M)$: Clumping したサンプル個数, t_{k+1} : 時間ステップ

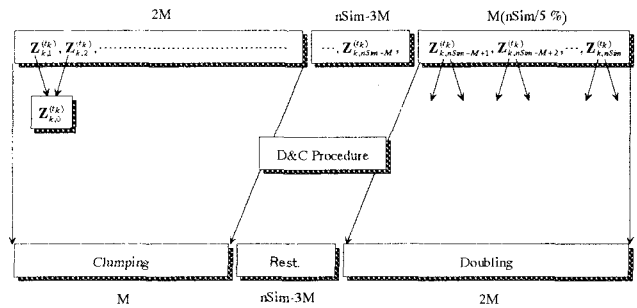


Fig.3 Algorithm of D&C

ここで重みの変更操作を施した後の D&C における全継続時間 T における破壊確率すなわち初通過確率は式(7)に示すようになる。

$$P_f(T) = CDF(T) = \sum_{n=1}^{nSim} I[Z_n(T)] \cdot w_n(T) \quad (7)$$

$w_n(T)$: 全時刻 T における各サンプルの重み

しかし、上記の修正操作ではサンプル全体の統計量の変化に対して不十分である。

そこで極力全体の統計量に影響を与えないような Clumping の組み合わせを探索する基準として式(8)に示すサンプル間の正規化した距離を用いる。

$$d_{j_1, j_2}(t_k) = \sqrt{\sum_{m=1}^{nState} (Y_{j_1, m}(t_k) - Y_{j_2, m}(t_k))^2} \rightarrow \min \quad (8)$$

$$Y_{j, m}(t_k) = \frac{Z_{j, m}(t_k) - \hat{z}_m(t_k)}{\sigma_m(t_k)} \cdot q(m)$$

m : 各構成要素, j_1, j_2 : 異なるサンプル実現値,

$\sigma_m(t_k)$: 残存サンプル標準偏差, $\hat{z}_m(t_k)$: 残存サンプル平均値, $q(m)$: 相対

的重要度($q(m) = 1, m = 1, 2, \dots, nState$)

よって式(8)により正規化距離の差が最小となるサンプルを選び出しClumpingすることで、サンプル全体の統計量の歪みを防止することができる。

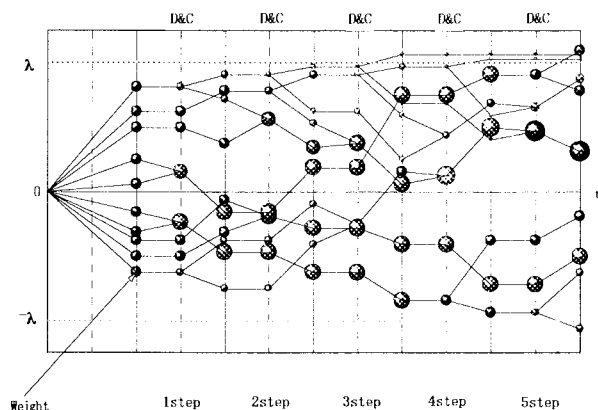


Fig4 D&C Procedure

4. 選定基準の設定および統計量の保存について

D&C,RR&S や ISM では、GA や MCS を基本とした離散最適化手法と同様にサンプルの選定基準が効率化の良否を決定するため、破壊確率を正確に算定する上で非常に重要となる加えて、MIS ではサンプルを元の確率分布と異なったサンプリングを行っているため、算出された破壊確率の修正を行わなければならない。

まず、基準レベル通過の可能性をサンプルの絶対応答変位とその速度勾配を基準とする。

$$C_n(t_k) = \left[a \cdot \left(\frac{z_n(t_k)}{\sigma_{x(t_k)}} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{\dot{z}_n(t_k)}{\sigma_{\dot{x}(t_k)}} \right)^2 \right], n = 1, 2, \dots, nSim \quad (9)$$

$z_n(t_k)$: 応答変位, $\dot{z}_n(t_k)$: 応答速度,

$\sigma_{x(t_k)}$: 残存サンプルの応答変位の標準偏差,

$\sigma_{\dot{x}(t_k)}$: 残存サンプルの応答速度の標準偏差

$$a = \begin{cases} 1; & x_n(t_k) > 0 \\ -1; & x_n(t_k) < 0 \end{cases}, \quad b = \begin{cases} 1; & \dot{x}_n(t_k) > 0 \\ -1; & \dot{x}_n(t_k) < 0 \end{cases}$$

ここで式(9)では各サンプルの変位が破壊基準レベルからどれだけ離れているか、またどれだけの速度で基準レベルに近づいているかを評価の対象としており、変数 a, b は変位・速度の方向を表している。

次に、Doubling もしくは Clumping されたサンプルの重みは時刻とともに修正されているため、どのサンプルがどの時刻で破壊基準レベルを超過するかで初通過確率の値に大きな影響を与える。

そこで、サンプルに付加する重みの上・下限値を式(10),(11)のように設定し、これよりのサンプルの Doubling, Clumping 操作の重みに制限を設ける。

$$\text{上限値: } w_{\max} = 2/nSim = 2 \cdot w_n(0) \quad (10)$$

下限値:

$$(CDF(t_k) - CDF(t_{k-1})) \neq 0 \cap w_f \neq 0 \cap CDF(t_{k-1}) \neq 0$$

のとき、初期の重みの下限値; $w_{\min} = w_f \times 10^{-3}$

$$\left| \log_{10}(CDF(t_k) - CDF(t_{k-1})) - \log_{10}(w_f) \right| > 1.5$$

ならば、 $w_f = w_f / 10$ (下限値を下げる)

$$\left| \log_{10}(CDF(t_k)) - \log_{10}(w_f) \right| > 1.5 \quad \text{ならば、}$$

$$w_f = w_f \times 15 \quad \text{(下限値を上げる)} \quad (11)$$

w_f : 最初に破壊基準レベルを超過したサンプルの重み

以上より、D&C を実施するサンプルの選定基準を設定し、同時にその重みを制限することで、安定かつ正確な初通過確率の算出が行える。

5. バイリニア系モデルの初通過 (破壊) 確率

バイリニア系の振動方程式は式(12)で表される。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\eta(x(t)) = -mF(t) \quad (12)$$

$$\eta(x(t)) = \begin{cases} x(t); & |x(t)| < X_e \\ \gamma x(t) - X_e; & |x(t)| < X_e \cap x(t) \geq 0 \\ \gamma x(t) + X_e; & |x(t)| < X_e \cap x(t) < 0 \end{cases}$$

ここで、減衰定数 (β_s); 0.05, 固有円振動数 (ω_s); 7.07

(rad/sec), $X_e = 3.0$ (cm), $\gamma = 2.0$ としている。

以上の条件により全継続時間 $T = 10$ (sec), 時間刻み $\Delta t = 0.01$ (sec) の計 1000step で応答解析を行い、比較にはの MCS (シミュレーション 10 万回) により求めた確率を用いた。ここで、サンプルサイズ 3,000 として、D&C を実施するサンプル数は全体比率の $L=20\%$ として初通過確率を求めた結果を Fig5 に示す。

Fig5 より MCS と同精度の初通過確率が求められる。

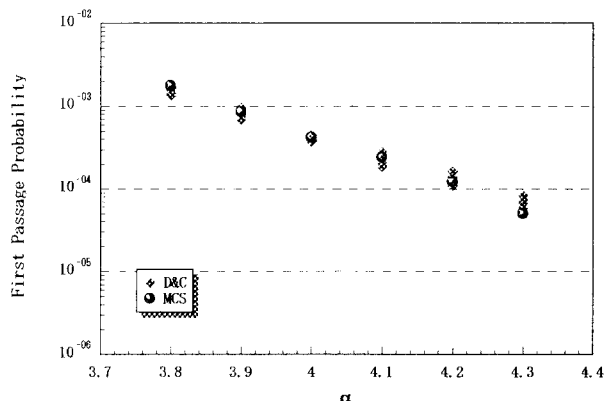


Fig5 First Passage Probability of D&C

6. 結論

MCS を効率化した D&C による初通過確率の精度を MCS と比較し、以下に示す結論が得られた。

- 1) D&C は 3,000 個程度のサンプル数で MCS (シミュレーション回数 10 万回) と同程度の初通過 (破壊) 確率が算出された。
- 2) D&C はサンプルの選定基準を適切に設定することで、効率的に初通過確率が算出される。
- 3) 効率化 MCS は性能設計 (破壊確率に基づく信頼性) の評価法として活用でき、加えて汎用性・簡便性の高い手法の一つである。

参考文献

- 1) Rubinstein, R.Y., Simulation and Monte Carlo Method, (1981), John Wiley & Sons, New York.
- 2) Bayer, V and Bucher, C, An Importance Sampling Procedure for First Passage Problem, *Proc. of ICOSSAR*, Kyoto, (1997).
- 3) Bayer, V. and Bucher, C., A Simulation Procedure for First Passage Problem of Nonlinear Structures, Proc. ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, (1996), pp.816-819.
- 4) Iman, R.L., and Conover, W.J., Small Sample Sensitivity Analysis Techniques for Computer Models with an Application on Risk Assessment, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, Vol. A9, No.17, (1980), pp.1749-1842.
- 5) Bazant, Z.P. and Lin, K.-L., Random Creep and Shrinkage in Structures Sampling, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 111, No.5, 1985/
- 6) Pradlwarter, H.J., Schueller, G.I., and P.M. Mehinikov, Reliability of MDOF-Systems, *Journal of Probabilistic Engineering Mechanics*, (1994), pp. 235-243.
- 7) Pradlwarter, H.J., A Selective MC Simulation Technique for Nonlinear Structural Reliability Assessment, Proc. ASCE Specialty Conference, (1992), pp.451-454.
- 8) Pradlwarter, H.J. and Schueller, G.I., Assessment of Low Probability Events of Dynamical Systems by Controlled Monte Carlo Simulation, (1997), *Applied Mechanics Review*.
- 9) Pradlwarter, H.J. and Schueller, G.I., On Advanced MCS Procedures in Stochastic Structural Dynamics, *Journal of Non-Linear Mechanics*, (1996).