

トンネルライニングの線形座屈について

Tunnel Liner Elastic Buckling

北海道大学工学部土木工学科 ○学生員 早川 諒(Ryo Hayakawa)
 北海道大学工学部土木工学科 学生員 狩野賢吾(Kengo Karino)
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 三上 隆(Takashi Mikami)

1. はじめに

トンネル支保構造物の設計は、トンネル変形量及びトンネル壁面に作用する内圧との関係を表す「地山特性曲線」に、支保工変形量及び支保に作用する荷重(すなわち支保圧)との関係を表す「支保工特性曲線」を重ねる、いわゆる地山特性曲線法が現在のところ有効な方法として挙げられる。しかしながら、地山特性や土質によっては、ライニング(吹き付けコンクリート)の座屈が生じることが報告されている。本研究ではトンネルライニングの座屈の検討に必要な諸関係式を導いたものである。

2. 支保圧と座屈応力

本研究の目的する関係式は、地山特性曲線方による支保圧と繁務現地山中のトンネルライニングの座屈応力に関するものである。

2.1. 支保圧

円筒シェル曲げ理論を基に支保剛性を求める。図-1のような解析モデル、即ち吹き付けコンクリートと鋼製支保を組み合わせた支保モデルを考える。ただし以下の仮定を設ける。

- ・地山は等方均質で、支保には静水圧状の土圧が働く。
- ・トンネルの形状は円形である。
- ・鋼製アーチ支保工の建て込み間隔(L)は一定である。
- ・吹き付けコンクリートによる支保はトンネル軸方向に円筒シェルとしての強度を持つ。
- ・図の左右にも建て込み間隔Lで鋼製支保工が設置されており、変形状態もまた図の部分とその左右とで同じである。

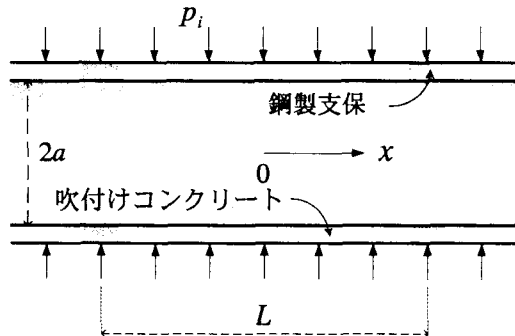


図-1 解析モデル

図-1において、 a : 円筒の半径、 p_i : 地山の圧力であり、 x 軸の原点は間隔 L の中央にとった。

吹き付けコンクリート部分の基礎方程式は、円筒シェルの曲げ理論により次のように表される。

$$\frac{d^4 w_c}{dx^4} + 4\beta^4 w_c = \frac{p_i}{K} \quad (1)$$

x 軸に関して w_c は左右対称であることから未定係数は二つになり、この微分方程式の解は次のように表される。

$$w_c = A \cosh \beta x \cos \beta x + B \sinh \beta x \sin \beta x + \frac{p_i a^2}{E_c h_c} \quad (2)$$

ただし、 w_c : 吹き付けコンクリートの半径方向の変位

$$\beta = \sqrt{3(1-\nu_c^2)} / h_c a^2$$

$$K = E_c h_c^3 / 12(1-\nu_c^2) : \text{板の曲げ剛性}$$

$$E_c : \text{吹き付けコンクリートの弾性係数}$$

$$h_c : \text{吹き付けコンクリートの厚さ}$$

$$\nu_c : \text{吹き付けコンクリートのポアソン比}$$

$$A, B : \text{境界条件により決定される未定係数}$$

鋼製支保に作用する力は、地山の圧力および隣接する円筒シェル(吹き付けコンクリート)からのせん断力 Q_c である。鋼製支保の半径方向の変位 w_s は次のように表される。

$$w_s = \frac{p_i b a^2}{E_s A_s + E_c (bh_c - A_s)} = \frac{(p_i b - 2Q_c) a^2}{E_s A_s + E_c (bh_c - A_s)} \quad (3)$$

$$\text{せん断力は、} \quad Q_c = -K \frac{d^3 w_c}{dx^3} \Big|_{x=L/2} \quad (4)$$

ここで、 b : H 形鋼の幅

$$E_s : \text{H 形鋼の弾性係数}$$

$$A_s : \text{H 形鋼の断面積}$$

$$\text{境界条件は、} x = \frac{L}{2} \text{ において } w_c = w_s, \quad \frac{dw_c}{dx} = 0 \quad (5)$$

式(2), (3), (4), 及び(5)から未定係数が次のように求まる。

$$A = \frac{\cosh \beta \frac{L}{2} \sin \beta \frac{L}{2} + \sinh \beta \frac{L}{2} \cos \beta \frac{L}{2}}{I(\cosh \beta L - \cos \beta L) + \frac{1}{2}(\sinh \beta L + \sin \beta L)} F \quad (6)$$

$$B = \frac{\cosh \beta \frac{L}{2} \sin \beta \frac{L}{2} - \sinh \beta \frac{L}{2} \cos \beta \frac{L}{2}}{I(\cosh \beta L - \cos \beta L) + \frac{1}{2}(\sinh \beta L + \sin \beta L)} F \quad (7)$$

ここで、

$$I = \frac{E_c h_c^2 a \beta}{\{E_s A_s + E_c (bh_c - A_s)\} \sqrt{3(1-\nu_c^2)}} \quad (8)$$

$$F = \frac{p_i b a^2}{E_s A_s + E_c (bh_c - A_s)} - \frac{p_i a^2}{E_c h_c} \quad (9)$$

支保間隔中央での支保剛性は次のようになる。

$$k = \frac{p_i}{w_c \Big|_{x=0}} \quad (10)$$

静水圧状の土圧が働く弾性地山中において、トンネル掘削後の地山の変位は次のように表される。

$$u = \frac{1+\nu}{E} (p_0 - p) \frac{a^2}{r} \quad (11)$$

ただし、 u : 地山の変位(掘削円形断面における半径方向)

$$\nu : \text{地山のポアソン比} \quad p : \text{支保工の反力}$$

$$E : \text{地山の弾性係数} \quad a : \text{半径}$$

$$p_0 : \text{初期地圧}(=\gamma H) \quad r : \text{円心からの距離}$$

$$\gamma : \text{地山の単位体積重量} \quad H : \text{土かぶり}$$

従ってトンネル内空変位は $r = a$ のときなので、

$$u = \frac{a(1+\nu)(p_0 - p)}{E} \quad (12)$$

図-2 に示す地山特性曲線法すなわち、地山特性曲線に支保工特性曲線を重ね、その交点を求めることにより、地山が安定するような支保圧を導く。図-2 において支保工についての変形量と支保圧の関係は、支保剛性を k とすれば

$$p = k(u - u_1) \quad (13)$$

ここで図-2 において

$$u_2 = \frac{a(1+\nu)}{E} p_0 \quad (14)$$

図-2 地山特性曲線法

であり、 u_1 は掘削过程中に鋼製支保が打設されるまでに生じた壁面変位である。応力解放率を α とすれば、

$$u_1 = \alpha u_2 = \frac{\alpha a(1+\nu)}{E} p_0 \quad (15)$$

ここで新たに支保圧を p_i とすれば式(12), (13), (15), より次のように求まる。

$$p_i = \frac{ak(1+\nu)(1-\alpha)}{ak(1+\nu)+E} p_0 \quad (16)$$

またこれを無次元化すると、

$$\frac{p_i}{(1-\alpha)p_0} = \frac{ak(1+\nu)}{ak(1+\nu)+E} \quad (17)$$

以上の式に諸量を与えてやれば具体的な支保圧の値を調べる事が可能である。

2.2. ライニングの座屈荷重²⁾

半無限に広がる弾性地山の内部に、図-3 のような極座標平面で、地山内の地盤に n 次の座屈モードで与えられる波状の変位が生じる場合を想定すると、半径方向および接線方向の変位はそれぞれ次のように与えられる。

$$u(r, \theta) = u_n(r) \cos n\theta \quad (18a)$$

$$v(r, \theta) = v_n(r) \sin n\theta \quad (18b)$$

軸方向の変位が拘束される平面ひずみの状態を仮定し、地山の変位がトンネルの半径に対して非常に小さいと考えられ、物体力が無視できる場合は、地山が支保工との接触面で、支保工に直接及ぼす応力の最大値は半径方向、接線方向に対して、それぞれ次のようになる。

$$\sigma_{rn} = -n(n+1)r^{-n-2}a_n - (n-1)(n+2)r^{-n}b_n \quad (19a)$$

$$\tau_{r\theta n} = -n(n+1)r^{-n-2}a_n - n(n-1)r^{-n}b_n \quad (19b)$$

a_n, b_n は変位を与えることで得られる未定係数である。

平面ひずみ状態における応力とひずみの関係式より変位 u, v はそれぞれ次のように与えられる。

$$u = \frac{r}{K_g} \left\{ n(1+\mu_g)r^{-n-2}a_n + [n(1+\mu_g) + 2(1-\mu_g)]r^{-n}b_n \right\} \quad (20a)$$

$$v = \frac{r}{K_g} \left\{ n(1+\mu_g)r^{-n-2}a_n + [n(1+\mu_g) - 4]r^{-n}b_n \right\} \quad (20b)$$

$$K_g = E/(1-\nu^2), \quad \mu_g = \nu/(1-\nu)$$

ここで、 $u_n = 1, v_n = 0$ の変位が生じたときの σ_{rn} の値を S_{11} 、 $\tau_{r\theta n}$ の値を S_{21} として、同様に $u_n = 0, v_n = 1$ の変位が生じたときの σ_{rn} の値を S_{12} 、 $\tau_{r\theta n}$ の値を S_{22} とすると、次のように地盤の剛性係数が得られる。

$$S_{11} = S_{22} = -\frac{K_g}{2(3-\mu_g)r_g} \left[\frac{4(n+1)}{1+\mu_g} - 2 \right] \quad (21a)$$

$$S_{21} = S_{12} = -\frac{K_g}{2(3-\mu_g)r_g} \left[\frac{4(n+1)}{1+\mu_g} - 2n \right] \quad (21b)$$

r_g : 円心から地盤までの距離

式(21)を用いることにより、変位が与えられれば地山が支保工に及ぼす応力が次のような形で容易に求められる。

$$\sigma_{rn} = (S_{11}u_n + S_{12}v_n)\cos n\theta \quad (22a)$$

$$\tau_{r\theta n} = (S_{21}u_n + S_{22}v_n)\sin n\theta \quad (22b)$$

式(22)で与えられた地盤の応力および土被り圧による周方向圧縮力 pr を考慮すれば、ライニング部分の半径方向および周方向のつりあい条件式は次式となる、

$$\alpha_l \left(\frac{d^4 v_l}{d\theta^4} + \frac{d^2 u_l}{d\theta^2} \right) + \beta_l \left(\frac{dv_l}{d\theta} + u_l \right) + \frac{\gamma H r_g}{r_l} \left(\frac{d^2 u_l}{d\theta^2} + u_l \right) - \sigma_{r_g} r_l = 0 \quad (23a)$$

$$-\beta_l \left(\frac{d^2 v_l}{d\theta^2} + \frac{du_l}{d\theta} \right) + \alpha_l \left(\frac{d^3 u_l}{d\theta^3} + \frac{du_l}{d\theta} \right) - \tau_{r\theta} r_l = 0 \quad (23b)$$

ここで、 u_l : ライニングの半径方向の変位

v_l : ライニングの周方向の変位

r_l : 円心から支保工の中心までの距離

$$\alpha_l = K_c h_c^3 / 12a^3, \quad \beta_l = K_c h_c / 12a$$

$$K_c = E_c / (1-\nu_c^2), \quad \mu_c = \nu_c / (1-\nu_c)$$

式(23)に式(18), 式(22)を代入すれば、次の固有値方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \bar{a}_{11} \gamma H & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (24)$$

$$a_{11} = \alpha_l n^2 (n^2 - 1) + \beta_l - r_l S_{11} \quad (25a)$$

$$\bar{a}_{11} = (n^2 - 1) \frac{r_g}{r_l} \quad (25b)$$

$$a_{12} = \beta_l n - S_{12} r_l \quad (25c)$$

$$a_{21} = \beta_l n + \alpha_l n (n^2 - 1) - S_{21} r_l \quad (25d)$$

$$a_{22} = \beta_l n^2 - S_{22} r_l \quad (25e)$$

式の必要十分条件式は、行列式が零であり、よって座屈荷重は以下となる。

$$p_{c_n} = \frac{1}{a_{11}} \left(a_{11} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} \right) \quad (26)$$

(17)式と比較するために、 p_0 により無次元化を行うと、

$$\frac{p_{c_n}}{p_0} = \frac{1}{p_0 a_{11}} \left(a_{11} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22}} \right) \quad (27)$$

となる。式(27)を式(17)と比較することにより、座屈に対する安全性の考慮を容易に行うことができる。

3. まとめ

トンネルとライニングの座屈の検討に必要な、支保圧(17)と座屈応力算定式(27)を導いた。数値計算については当日発表を行う予定。

参考文献

- 1) 藤田佳彦, 三上隆, 佐藤京, 小池明夫: 円筒殻理論に基づくトンネル支保圧について, 平成14年度土木学会北海道支部論文報告集第59号, pp.184-101, 2002.
- 2) James G.A. Croll: Buckling of Cylindrical Tunnel Liners, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 127, No. 4, April, 2001.