

## 係留索の周期変動張力により励起される水中係留浮体の結合共振特性

Combination Resonances Characteristics of Submerged Floating Structure

北海道大学大学院工学研究科 ○正員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)  
 北海道大学工学部土木工学科 学生員 小室達明 (Tatsuaki Komuro)  
 北海道大学大学院工学研究科 正員 蟹江俊仁 (Shunji Kanie)  
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 三上 隆 (Takashi Mikami)

## 1. はじめに

例えば水中浮遊式トンネルに代表される水中係留浮体とは、重力を上回る浮力を有する浮体を、係留索を用いて水中に引き込み安定化させるという、新しい発想にたつ画期的な構造体である。この特徴を最大限に生かせば、大水深のため地下構造物、大規模な基礎構造建設が困難な海域や、厳しい自然条件のために従来あまり利用されていなかった海峡を横断する物流・交通手段として非常に有効であると考えられる。

一方でこのような構造形式は、「水中」という橋梁や海底トンネルなど、既存の渡海構造物が利用しなかった空間を積極的に利用できるという利点を有すると同時に、「浮遊式」であることによる従来構造物ではあり得ない、非常に特殊、複雑で、最悪の場合全体系の崩壊に至るような動的不安定挙動発生が予想される。

本研究はそのような動的不安定現象のうち、係留索の周期変動張力作用に伴う係数励振振動、特に結合共振の発生可能性に焦点を当て、その基本的特性を解析的に検討することを目的としている。ここで結合共振とは、多自由度系において2つの固有振動数の和に近い振動数で係留索張力が周期変動を起こす場合の同調現象である。この現象を解明するためにまず、係留索変動張力により復元力項に周期関数を含む Mathieu 型方程式の導出を行う。これは係留索配置により回転を含む連成振動となり、結合共振の発生要因となりうる。そしてこの支配方程式より得られる動的不安定現象の発生条件に影響を及ぼすパラメータについて整理していく。

## 2. 解析モデル

Fig.1 は本研究で解析対象とする断面2次元モデルを示したものである。Type-2 は4本の斜め係留索（傾角  $\alpha$ 、取り付け角度  $\beta$ ）を用いて浮体を係留したものであり、Type-1 は Type-2 において  $\alpha=0$  となる特殊な場合と考える。係留索は伸び剛性  $EA$ 、長さ  $l$  であり、質量は係留浮体に比べ非常に小さいものと考え無視する。また係留浮体は体積  $v_0$ 、質量  $m$ 、半径  $r$  ( $=10\text{m}$ )、内空半径  $r_0$  ( $=9\text{m}$ )、浮力  $B = v_0 - m > 0$  を有する剛体の中空円筒であると仮定する。

## 3. 支配方程式の定式化

静平衡状態において一本の係留索に作用する初期張力を  $T_p$  とすると、静平衡方程式は次式となる。

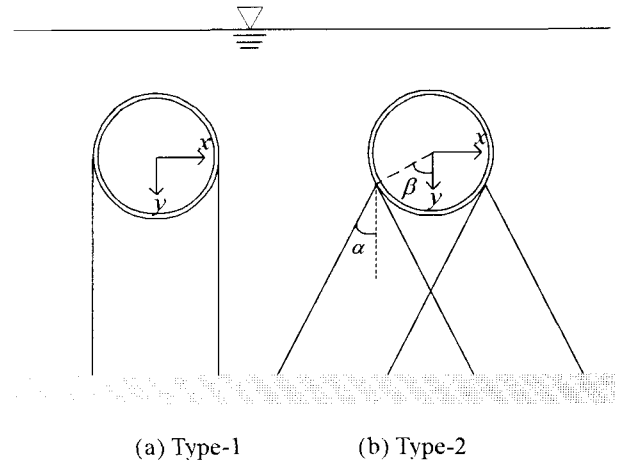


Fig.1 Analytical model

$$B - 4T_p \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

ここで例えば係留浮体中を通過する交通荷重等の外力作用により浮体が鉛直方向に加振され、張力が周期変動成分  $T_0 \cos \omega t$  を有する場合を想定する。浮体重心変位に関する運動方程式は断面2次元モデルにおいては3自由度の次式で表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2)$$

ここで

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_x & 0 & 0 \\ 0 & C_y & 0 \\ 0 & 0 & C_\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_h & 0 & -k_h r \cos \beta \\ 0 & k_v & 0 \\ -k_h r \cos \beta & 0 & k_h r^2 \cos^2 \beta + k_v r^2 \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

$$k_h = \frac{4\{(T_p + T_0 \cos \omega t) \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha\}}{l} \quad (3a)$$

$$k_v = \frac{4\{(T_p + T_0 \cos \omega t) \sin^2 \alpha + EA \cos^2 \alpha\}}{l} \quad (3b)$$

$u, v, \theta$ : 浮体の水平 ( $x$ )、鉛直 ( $y$ )、重心周り回転変位、 $I$ : 浮体の慣性モーメント、 $C_x, C_y, C_\theta$ : 減衰係数である。

本研究では結合共振の特性を検討することに焦点を絞るため、式(2)において鉛直振動を除いた連成項を有する水平と回転変位に関する項を取り出す。そしてさらに剛性マトリックス  $\mathbf{K}$  について次式のように時

間依存項と非依存項に分けた次式の検討を行う。

$$\mathbf{M}_{x\theta} \ddot{\mathbf{u}}_{x\theta} + \mathbf{C}_{x\theta} \dot{\mathbf{u}}_{x\theta} + (\mathbf{K}_{x\theta} + \mathbf{K}'_{x\theta} \cos \alpha) \mathbf{u}_{x\theta} = 0 \quad (4)$$

式(4)において

$$\mathbf{u}_{x\theta} = \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{x\theta} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{x\theta} = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{x\theta} = \frac{4}{l} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}'_{x\theta} = \frac{4}{l} \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = T_p \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha$$

$$k_{12} = k_{21} = (T_p \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha) r \cos \beta$$

$$k_{22} = (T_p \sin^2 \alpha + EA \cos^2 \alpha) r^2 \sin^2 \beta + (T_p \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha) r^2 \cos^2 \beta$$

$$k'_{11} = T_0 \cos^2 \alpha, \quad k'_{12} = k'_{21} = T_0 r \cos^2 \alpha \cos \beta$$

$$k'_{22} = T_0 r^2 (\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)$$

である。ここで  $\mathbf{C}_{x\theta} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{K}'_{x\theta} = \mathbf{0}$  における基準振動系の直交性を用いて式を変形する。まず  $u = Ue^{i\omega t}$ ,  $\theta = \Theta e^{i\omega t}$  を仮定し、これを式(4a)に代入し整理することで振動数方程式が得られる。このときの無次元固有振動数  $\Omega_1$  (1次),  $\Omega_2$  (2次), および1次, 2次の水平変位 ( $X_{11}$ ,  $X_{12}$ ) に対する回転変位 ( $X_{21}$ ,  $X_{22}$ ) の固有振動モード比はそれぞれ次式のように得られる。

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left( \frac{er \sin \beta}{m_0} \right)^2 + \left( \frac{r \cos \beta}{m_0} \right)^2 - \sqrt{\left\{ 1 + \left( \frac{er \sin \beta}{m_0} \right)^2 + \left( \frac{r \cos \beta}{m_0} \right)^2 \right\}^2 - 4 \left( \frac{er \sin \beta}{m_0} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5a)$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left( \frac{er \sin \beta}{m_0} \right)^2 + \left( \frac{r \cos \beta}{m_0} \right)^2 + \sqrt{\left\{ 1 + \left( \frac{er \sin \beta}{m_0} \right)^2 + \left( \frac{r \cos \beta}{m_0} \right)^2 \right\}^2 - 4 \left( \frac{er \sin \beta}{m_0} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5b)$$

$$\frac{X_{11}}{X_{21}} = \frac{r \cos \beta}{1 - \Omega_1^2} \quad (6a)$$

$$\frac{X_{12}}{X_{22}} = \frac{r \cos \beta}{1 - \Omega_2^2} \quad (6b)$$

ここで  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  はそれぞれ1次, 2次の固有振動数でありまた

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k_h}{m}}, \quad e = \sqrt{\frac{k_v}{k_h}}, \quad m_0 = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

である。一方変位ベクトルは次式で表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{Bmatrix} q_1 + \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{Bmatrix} q_2 \quad (7)$$

式(7)を式(4)に代入し、基準振動系の直交性を用いて式を変形すると、次式が得られる。

$$\ddot{q}_n + 2\omega_n h_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n + 2\varepsilon \cos \alpha \sum_{s=1}^2 k_{ns}^* q_s = 0 \quad (8) \quad (n=1,2)$$

ここで

$$\varepsilon = \omega_0^2 \mu \cos \alpha \quad (9a)$$

$$\mu = \frac{T_0}{2T_p} \quad (9b)$$

$$h_n = \frac{C_x X_{1n}^2 + C_\theta X_{2n}^2}{2(MX_{1n}^2 + IX_{2n}^2)\omega_n} \quad (9c)$$

$$k_{11}^* = \frac{X_{11}^2 + 2 \frac{k'_{12}}{k'_{11}} X_{11} X_{21} + \frac{k'_{22}}{k'_{11}} X_{21}^2}{X_{11}^2 + m_0^2 X_{21}^2} \quad (9d)$$

$$k_{12}^* = \frac{k^*}{X_{11}^2 + m_0^2 X_{21}^2} \quad (9e)$$

$$k_{21}^* = \frac{k^*}{X_{12}^2 + m_0^2 X_{22}^2} \quad (9f)$$

$$(k^* = X_{11} X_{12} + \frac{k'_{21}}{k'_{11}} X_{21} X_{12} + \frac{k'_{12}}{k'_{11}} X_{11} X_{22} + \frac{k'_{22}}{k'_{11}} X_{21} X_{22})$$

$$k_{22}^* = \frac{X_{12}^2 + 2 \frac{k'_{12}}{k'_{11}} X_{12} X_{22} + \frac{k'_{22}}{k'_{11}} X_{22}^2}{X_{12}^2 + m_0^2 X_{22}^2} \quad (9g)$$

$$\frac{k'_{12}}{k'_{11}} = \frac{k'_{21}}{k'_{11}} = -r \cos \beta \quad (9h)$$

$$\frac{k'_{22}}{k'_{11}} = r^2 (\sin^2 \beta \tan^2 \alpha + \cos^2 \beta) \quad (9i)$$

#### 4. 結合共振による動的不安定領域の決定

多自由度系の Mathieu 型方程式より動的不安定領域を決定する手法はいくつか提案されているが、ここでは multiple scales 法<sup>2)</sup>によって解を決定する。まず解の形として次式を仮定する。

$$q_n = q_{n0}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon q_{n1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_{n2}(T_0, T_1, T_2) \quad (10)$$

ここで,  $T_n = \varepsilon^n t$  である。これを式(8)に代入し、

$$D_0^2 q_{n0} + \omega_n^2 q_{n0} = 0 \quad (11a)$$

$$D_0^2 q_{n2} + \omega_n^2 q_{n2} = -(2D_0 D_2 + D_1^2 + 2\gamma_n D_0) q_{n0} - 2(D_0 D_1 - \gamma_n D_0) q_{n1} - \sum_{s=1}^2 k_{ns}^* q_{s1} (e^{i\omega T_0} + e^{-i\omega T_0}) \quad (11b)$$

$$D_0^2 q_{n2} + \omega_n^2 q_{n2} = -(2D_0 D_2 + D_1^2 + 2\gamma_n D_0) q_{n0} - 2(D_0 D_1 - \gamma_n D_0) q_{n1} - \sum_{s=1}^2 k_{ns}^* q_{s1} (e^{i\omega T_0} + e^{-i\omega T_0}) \quad (11c)$$

ここで

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial}{\partial T_2} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 \quad (12a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) \quad (12b)$$

$$\gamma_n = \frac{\omega_n h_n}{\varepsilon} \quad (13)$$

である。式(12)の一般解は次式で表すこととする。

$$q_{n0} = A_n(T_1, T_2) e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}_n(T_1, T_2) e^{-i\omega_n T_0} \quad (14)$$

上式において  $A_n$  は  $T_0$  に依存しない複素数定数であり、

$\bar{A}_n$  は  $A_n$  の共役複素数であることを表す. 式(18)を式(14)に代入すると, 次式となる.

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{n1} + \omega_n^2 q_{n1} = & -2i\omega_n(D_1 + \gamma_n)A_n e^{i\omega_n T_0} \\ & + 2i\omega_n(D_1 + \gamma_n)\bar{A}_n e^{-i\omega_n T_0} \\ & - \sum_{m=1}^2 k_{nm}^* A_m \{e^{i(\omega_m + \omega)T_0} + e^{i(\omega_m - \omega)T_0}\} \quad (15) \\ & - \sum_{m=1}^2 k_{nm}^* \bar{A}_m \{e^{-i(\omega_m + \omega)T_0} + e^{-i(\omega_m - \omega)T_0}\} \end{aligned}$$

ここでは結合共振の主不安定領域を求めるため,  $\omega \approx \omega_1 + \omega_2$  であるときを考える. まず  $\omega$  を次式で表す.

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \varepsilon\sigma \quad (16)$$

この式(16)と式(15)より,  $q_{n1}$  の解に永年項を含まない条件として次の2式が得られる.

$$2i\omega_1(D_1 + \gamma_1)A_1 + k_{12}^* \bar{A}_2 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (17)$$

$$k_{21}^* \bar{A}_1 e^{i\sigma T_1} + 2i\omega_2(D_1 + \gamma_2)A_2 = 0 \quad (18)$$

式(21), (22)より  $A_1, A_2$  を次式と仮定する.

$$A_1 = a_1(T_2) e^{-i\lambda T_1} \quad (19a)$$

$$A_2 = a_2(T_2) e^{i(\bar{\lambda} + \sigma)T_1} \quad (19b)$$

ここで  $a_1, a_2, \lambda$  は  $T_1$  に依存しない複素数の定数 ( $T_2$  の関数),  $\bar{\lambda}$  は  $\lambda$  の共役複素数である. これらを式(17), (18)に代入すると, 自明でない解を持つ条件として次式が得られる.

$$\lambda^2 + \{\sigma + i(\gamma_1 + \gamma_2)\}\lambda + (i\gamma_1\sigma - \gamma_1\gamma_2 + \frac{k_{12}^* k_{21}^*}{4\omega_1\omega_2}) = 0 \quad (20)$$

式(20)を解くと,  $\lambda$  は以下となる.

$$\begin{aligned} \lambda = & -\frac{1}{2}\{\sigma + i(\gamma_1 + \gamma_2)\} \\ & \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 - (\gamma_2 - \gamma_1)^2 - \frac{k_{12}^* k_{21}^*}{\omega_1\omega_2} + 2i(\gamma_2 - \gamma_1)} \quad (21) \end{aligned}$$

式(19a), (19b)より,  $\lambda$  が実数もしくは虚数の虚部が正であれば  $A_1, A_2$  は  $T_1$  について周期的であり, 安定解が得られる. このことから  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  のとき, すなわち無減衰時においては式(25)より挙動が不安定となる条件は次式である.

$$\sigma^2 - \frac{k_{12}^* k_{21}^*}{\omega_1\omega_2} < 0 \quad (22)$$

これと式(9a), (9b), (16)の関係より, 結合共振の動的な主不安定領域は  $\omega_0$  で除した無次元振動数  $\Omega$  が次の2つの曲線で囲まれた部分である.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_h} = \Omega_1 + \Omega_2 \pm \frac{\mu \cos \alpha}{K_x} \sqrt{\frac{k_{12}^* k_{21}^*}{\Omega_1 \Omega_2}} \quad (23)$$

ここで

$$K_x = \cos \alpha + 4 \frac{EA}{B} \sin^2 \alpha \quad (24)$$

である. 次に  $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$  の場合,  $\lambda$  は少なくとも1つ虚数となる. このことから挙動が不安定となる条件は次式となる.

$$\sigma < (\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{\frac{k_{12}^* k_{21}^*}{4\omega_1\omega_2} - 1} \quad (24)$$

これより結合共振の動的な主不安定領域は次式で囲まれた部分である.

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \pm (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2) \sqrt{\frac{\mu^2 k_{12}^* k_{21}^* \cos^2 \alpha}{4\Omega_1^2 \Omega_2^2 K_x^4 h_1 h_2} - 1} \quad (25)$$

## 5. 解析結果および考察

Fig.2 は  $\beta = 60^\circ$  における, Fig.3 は  $\beta = 45^\circ$  における結合共振の動的な不安定領域を示したものである (いずれの図も線で囲まれた内部が動的な不安定領域を表す.).

まず無減衰の場合, 単純共振 ( $\omega \approx 2\omega_1, \omega \approx 2\omega_2$  に対応する共振) においては,  $\alpha$  の増加により不安定領域の幅, すなわちある変動張力振幅において係数励振振動を引き起こす  $\omega$  の範囲を大きく減少させる傾向を示すことが著者らの研究<sup>9)</sup>により明らかにされている. 一方結合共振の不安定領域も Fig.2, Fig.3 より  $\alpha$  の増加により減少する傾向はみられるものの, その影響は単純共振に比べ非常に小さい. ただし減衰の影響を考慮すると,  $\alpha$  の影響が顕著に現れている.

次に  $\beta$  についてはいずれの場合も  $\beta$  の減少に伴い不安定領域の幅が広がっている.  $\beta$  は水平一回転振動の連成項の大きさを決定するパラメータであり,  $\beta$  の減少は連成の度合いが強くなることを意味する. このことは  $\beta$  の減少による結合共振における不安定領域の広がりに対応するものである.

また Fig.2, Fig.3 のいずれにおいても, 減衰の存在により結合共振の発生する限界の  $\mu$  が存在することとなる. これは単純共振においても同様のことがいえるが<sup>8)</sup>, 結合共振では式(25)より

$$\mu > \sqrt{\frac{4\Omega_1^2 \Omega_2^2 K_x^4 h_1 h_2}{k_{12}^* k_{21}^* \cos^2 \alpha}} \quad (26)$$

となる場合に結合共振が発生するといえる. 例えば  $\beta = 60^\circ$  の場合をみると,  $(h_1, h_2) = (0.01, 0.03)$  または  $(0.03, 0.01)$  では  $\alpha = 10^\circ$  で不安定領域が完全に消失している一方,  $\beta = 45^\circ$  では  $\alpha = 15^\circ$  でも依然として不安定領域が存在する.

しかし, 不安定領域の幅という観点でみると, 減衰定数の組み合わせにより, 無減衰時よりも逆に広がってしまう可能性が指摘される. 不安定領域の存在範囲を示す条件式である式(26)より  $\mu$  の下限値は  $h_1$  と  $h_2$  の積の関数であることから, これと減衰定数比  $h_1/h_2$  による影響は Fig.2, Fig.3 より非常に大きいといえる. この減衰の付加による不安定化は非連成の係数励振振動においてはみられない現象であり, 特徴的なものである.

## 6. まとめ

本研究は波浪作用などによる係留索の周期変動張力発生により励起される可能性のある係数励振振動のうち, 結合共振の特性について検討を行ったものであ

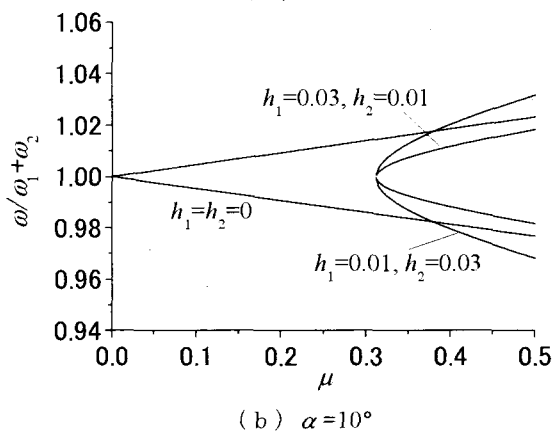
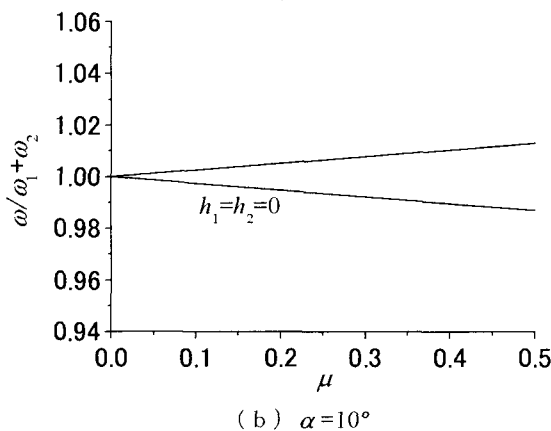
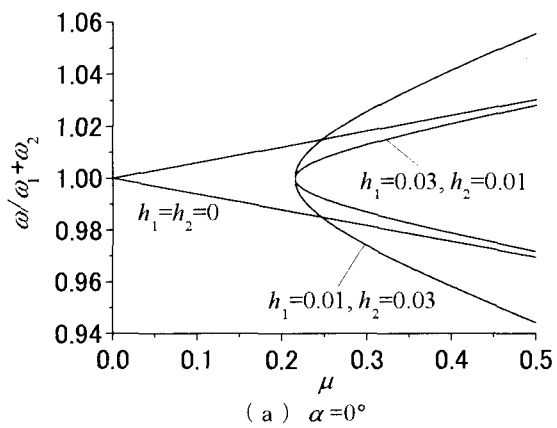
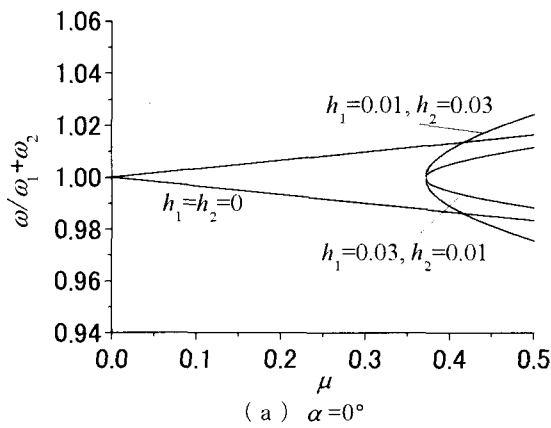


Fig.2 Regions of dynamic instability ( $\beta=60^\circ$ )  
(The inner area surrounded by the lines express the regions of dynamic instability.)

る。具体的には支配方程式を変形し、結合共振による動的不安定領域を求め、それに及ぼす傾角  $\alpha$ 、取り付け角度  $\beta$ 、減衰定数の影響について考察した。

今後は係留索の非線形性が係数励振振動の応答に及ぼす影響について解析するとともに、本研究で直線ケーブルと仮定した係留索そのものの運動を考慮した動的不安定性の検討を行う予定である。

参考文献

- 1) Bolotin, V.V. : The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc., 1964.
- 2) A.H.Nayfeh, and D.T.Mook, : Parametric excitations of linear systems having many degrees of freedom, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.62, No.2, 1977.
- 3) A.H.Nayfeh, and D.T.Mook, : Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- 4) 土木学会：ケーブル・スペース構造の基礎と応用, 1999.
- 5) K.Takahashi : Dynamic stability of cables subjected to an axial periodic load, Journal of Sound and Vibration, **144**(2), pp.323-330, 1991.
- 6) T.C.Lee : A study of coupled Mathieu equations by using of infinite determinants, Journal of Applied Mechanics, Vol.43, pp.349-352, 1976.

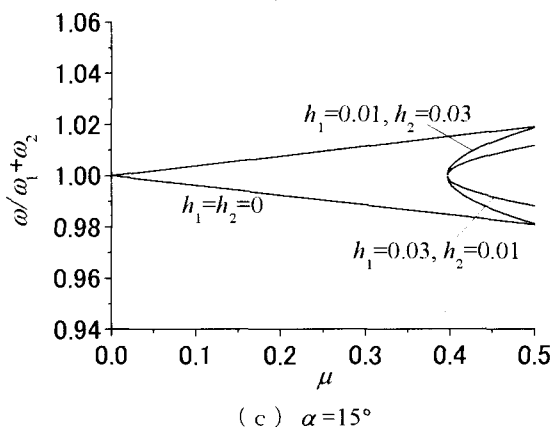


Fig.3 Regions of dynamic instability ( $\beta=45^\circ$ )  
(The inner area surrounded by the lines express the regions of dynamic instability.)

- 7) T.Yamamoto and A.Saito : On the vibrations summed and differential types under parametric excitation, Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, 22, pp.54-123, 1970.
- 8) M.Sato, S.Kanie, T.Mikami, H.Gunawan and K.Sato : Dynamic Instability Characteristics of Submerged Floating Tunnel, Proceedings of the Ninth East-Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, paper no.379, 2003.
- 9) 小室達明, 佐藤太裕, 蟹江俊仁, 三上 隆 : 水中係留浮体の動的支不安定領域に関する考察, 土木学会北海道支部論文報告集, 第60号, 2003 (掲載予定)