

水中係留浮体の係数励振振動による主不安定領域の解析

Analysis of dynamic instability of the submerged floating structure

北海道大学工学部土木工学科
北海道大学大学院工学研究科
北海道大学大学院工学研究科
北海道大学大学院工学研究科

○学生会員 小室達明(Tatsuaki Komuro)
正会員 佐藤太裕(Motohiro Sato)
正会員 蟹江俊仁(Shunji Kanie)
フェロー 三上 隆(Takashi Mikami)

1. まえがき

水中係留浮体の代表的な構造物として水中浮遊式トンネルがあげられる。水中係留浮体とは重力よりも大きな浮力をもつ浮体を、係留索を用いて水中に引き込み安定させるといふ新しい考え方の構造物である。この発想の大きな利点として大水深の地域、大規模な基礎構造物建設の難しい地域、厳しい自然条件のために今まで利用できなかった地域の新しい物流、交通手段のための構造物として大変有効な手段であるといえる。

しかしながらこの構造物は橋梁やトンネルとは違い今まで利用されなかった、水中を利用することとなる。安全かつ有効的に利用するためにも、その安全性について十分な研究が求められる。

本研究は、係留索に作用する周期変動張力による浮体の動的安定性の問題について検討していく。周期変動張力により生じる不安定領域の中でも第2, 3不安定領域に比べ広い領域を持つ主不安定領域について、図-1の解析モデルに示す傾角 α 、連結角 β の変化が与える影響を考察する。

2. 解析モデル

本研究に用いる水中係留浮体のモデルを図-1に示す。水中浮体の変位は水平変位(x)、鉛直変位(y)、および回転変位(θ)を微小変形の範囲で考える。浮体は円形で半径 r 、内空半径 r_2 の中空円とし、二本のレグが一つの連結点に傾角 α をなして、二つの連結点 A, B に繋がれている。各連結点と浮体の中心を結ぶ線のなす角度をここで連結

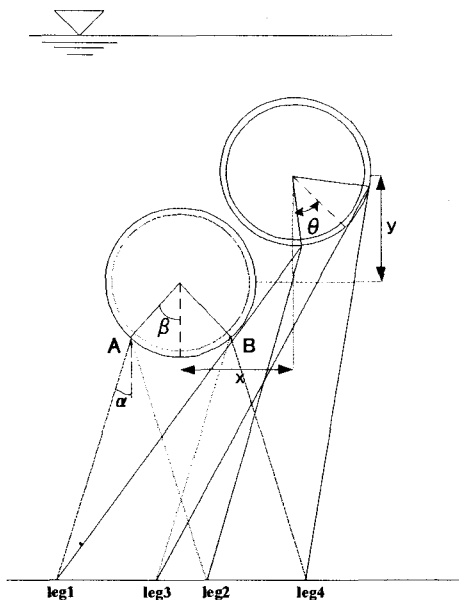


図-1 水中浮遊式トンネルの変位の様子

角と呼び β とする。係留索は伸び剛性を EA 、長さを L_s とし質量は係留浮体に比べ非常に小さいものとして無視する。周期振動を係留索に作用する軸方向周期変動張力を $T_0 \cos \omega t$ 、浮体の浮力を $U > 0$ と仮定する。この時静的な力の釣り合いより $4T_p \cos \alpha - U = 0$ が成り立ち、係留索には軸力 $T_s = T_p + T_0 \cos \omega t$ が成り立つ。

水平・回転方向は連成振動を起こすが、鉛直方向はその他の方向と非連成の振動を起こす。このため本研究は水平・回転方向の連成による不安定領域に焦点を当てていく。

3. 支配方程式の定式化

図-1における四本のレグによる水中係留浮体の復元力は

$$F_{x\theta} = \begin{bmatrix} 4K_x & -4rK_x \cos \beta \\ -4rK_x \cos \beta & 4r^2(K_y \sin^2 \beta + K_x \cos^2 \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$K_x = \frac{1}{L_s}(EA \sin^2 \alpha + T_s \cos^2 \alpha)$$

$$K_y = \frac{1}{L_s}(EA \cos^2 \alpha + T_s \sin^2 \alpha)$$

$$K_\theta = 4r^2(K_y \sin^2 \beta + K_x \cos^2 \beta)$$

である。水平、回転方向の運動方程式は

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [K_1] \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} + [K_2] \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} \cos \omega t = 0 \quad (2)$$

ここに

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}$$

$$[K_1] = \frac{4}{L_s} \begin{bmatrix} k^{(1)}_{11} & k^{(1)}_{12} \\ k^{(1)}_{21} & k^{(1)}_{22} \end{bmatrix}$$

$$k^{(1)}_{11} = T_p \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha$$

$$k^{(1)}_{21} = k^{(1)}_{12} = -(T_p \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha) r \cos \beta$$

$$k^{(1)}_{22} = (T_p \cos^2 \alpha + EA \sin^2 \alpha)^2 \cos^2 \beta + (T \sin^2 \alpha + EA \cos^2 \alpha)^2 \sin^2 \beta$$

$$[K_2] = \frac{4}{L_s} \begin{bmatrix} k^{(2)}_{11} & k^{(2)}_{12} \\ k^{(2)}_{21} & k^{(2)}_{22} \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)}_{11} = T_0 \cos^2 \alpha$$

$$k^{(2)}_{21} = k^{(2)}_{12} = -T_0 r \cos^2 \alpha \cos \beta$$

$$k^{(2)}_{22} = T_0 r^2 (\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)$$

m : 水中浮体の質量

I_G : 水中浮体の質量の慣性モーメント

とあらわされる。(2)式において $[K_2] = 0$ とすると $\mathbf{x} = X e^{i p t}$, $\theta = \Theta e^{i p t}$ を仮定し(2)式に代入して整理すると振動数方程式(3)式が得られる。これを解き無次元固有振動数 Ω_1^* (一次), Ω_2^* (二次)が導かれる。

$$\begin{vmatrix} k^{(1)}_{11} - m p^2 & k^{(1)}_{12} \\ k^{(1)}_{21} & k^{(1)}_{22} - I_G p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

$$\Omega_1^* = \frac{\omega_1}{\omega_h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{e r \sin \beta}{m_0} \right)^2 + \left(\frac{r \cos \beta}{m_0} \right)^2 + \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{e r \sin \beta}{m_0} \right)^2 + \left(\frac{r \cos \beta}{m_0} \right)^2 \right\}^2 - 4 \left(\frac{e r \sin \beta}{m_0} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (4, a)$$

$$\Omega_2^* = \frac{\omega_2}{\omega_h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{e r \sin \beta}{m_0} \right)^2 + \left(\frac{r \cos \beta}{m_0} \right)^2 - \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{e r \sin \beta}{m_0} \right)^2 + \left(\frac{r \cos \beta}{m_0} \right)^2 \right\}^2 - 4 \left(\frac{e r \sin \beta}{m_0} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (4, b)$$

$$\text{このとき } \omega_h = \sqrt{k^{(1)}_{11}/m}, \quad e = \sqrt{K_v/K_h}, \quad m_0 = \sqrt{I_G/m}$$

である。また(3), (4, a), (4, b)より, 各固有モード比は各モードの水平振幅(X_j), 回転振幅(Θ_j)を用いて次式で表せる。

$$\frac{X_1}{\Theta_1} = \frac{r \cos \beta}{1 - \Omega_1^2}, \quad \frac{X_2}{\Theta_2} = \frac{r \cos \beta}{1 - \Omega_2^2}$$

さてここで(2)式の変位ベクトル $\{\mathbf{u}\}$ を次式のように $[K_2] = 0$ における基準振動系の $\{X_1\}, \{X_2\}$ に分解する。式で表すと

$$\{\mathbf{u}\} = q_1 X_1 + q_2 X_2 = q_1 \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{Bmatrix} + q_2 \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

(2)式に(5)式を代入して基準振動系の直交性を用いて変換すると

$$q_j^* + [K^{**1}] q_j + \frac{2\mu \cos \alpha}{K(\alpha)} \omega_h^2 [K^{**2}] q_j \cos \omega t = 0 \quad (6)$$

$$\text{ここで } \omega_h = \sqrt{k^{(1)}_{11}/m}, \quad \mu = \sqrt{T_0/2T_p}$$

$$K(\alpha) = (\cos \alpha + B \sin^2 \alpha), \quad B = EA/T_p \cos \alpha$$

$$[K^{**1}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

$$[K^{**2}] = \begin{bmatrix} k^{**2}_{11} & k^{**2}_{12} \\ k^{**2}_{21} & k^{**2}_{22} \end{bmatrix}$$

$$k_{11}^{**2} = \frac{X_{11}^{(2)} + 2 \frac{k^{(2)}_{12}}{k^{(2)}_{11}} X_{11} X_{21} + \frac{k^{(2)}_{22}}{k^{(2)}_{11}} X_{21}^2}{X_{11}^2 + m_0 X_{21}^2}$$

$$k_{22}^{**2} = \frac{X_{12}^2 + 2 \frac{k^{(2)}_{12}}{k^{(2)}_{11}} X_{12} X_{22} + \frac{k^{(2)}_{22}}{k^{(2)}_{11}} X_{22}^2}{X_{12}^2 + m_0 X_{22}^2}$$

$$k_{21}^{**2} = \frac{k'}{X_{11}^2 + m_0 X_{21}^2}$$

$$k' = X_{11} X_{12} + \frac{k^{(2)}_{21}}{k^{(2)}_{11}} X_{12} X_{21} + \frac{k^{(2)}_{12}}{k^{(2)}_{11}} X_{11} X_{22} + \frac{k^{(2)}_{22}}{k^{(2)}_{11}} X_{21} X_{22}$$

ここで二自由度系振動体の構造物の動的安定性は(7)式の Mathieu 型の方程式から不安定領域(構造物の振幅が増幅, 発散してしまう)と安定領域(周期的な振動を繰り返す)の境界関数は(8)式で表される。

$$[C] q_j^* + [E] q_j + 2\varepsilon [A^{**j}] q_j \cos \omega t = 0 \quad (7)$$

$$[E] \mp \varepsilon [A^{**j}] - \frac{1}{4} \omega^2 [C] = 0 \quad (8)$$

(4)式を(6)式に代入して整理すると $\omega \approx 2\omega_1$, $\omega \approx 2\omega_2$ の近傍における主不安定領域の境界関数は以下のように求められる。¹⁾

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \pm \varepsilon \mu \left(\frac{k^{**2}_{11}}{\omega_1^2} + \frac{k^{**2}_{22}}{\omega_1^2} \right) \right)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{1}{\gamma} \pm \frac{\varepsilon \mu k^{**2}_{22}}{\omega_1^2} - 1 \mp \frac{\varepsilon \mu k^{**2}_{11}}{\omega_1^2} \right\}^2 + \frac{4\varepsilon^2 \mu^2 k^{**2}_{12} k^{**2}_{21}}{\omega_1^4} \right]} \quad (9, a)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \pm \varepsilon \mu \left(\frac{k^{**2}_{11}}{\omega_1^2} + \frac{k^{**2}_{22}}{\omega_1^2} \right) \right)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{1}{\gamma} \pm \frac{\varepsilon \mu k^{**2}_{22}}{\omega_1^2} - 1 \mp \frac{\varepsilon \mu k^{**2}_{11}}{\omega_1^2} \right\}^2 + \frac{4\varepsilon^2 \mu^2 k^{**2}_{12} k^{**2}_{21}}{\omega_1^4} \right]} \quad (9, b)$$

$$\text{この時 } \gamma = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2, \quad \Omega_{1,2} = \left(\frac{\omega}{2\omega_1} \right), \quad \varepsilon = \frac{\cos \alpha}{K(\alpha)} \omega_h^2$$

4. 結果および考察

縦軸 $\Omega_{1,2}$, 横軸 μ の不安定領域の分布を図-2 から図-10 に示す。ここで $\Omega_{1,2}$ は係留索に作用する軸方向周期変動張力を $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$, $\mu = 0$ の場合の ω_1, ω_2 で無次元化したものである。本解析モデルにおける構造諸元は $r_1 = 10[m]$ (半径) $r_2 = 9[m]$ (内空半径) $B = 10$ とする。各グラフの上方のグラフは $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域, 下方のグラフは $\omega \approx 2\omega_2$ に相当する不安定領域を示している。この条件下でレグ傾角 $\alpha = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ のそれぞれについて連結角 $\beta = 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ と変化させた時, 不安定領域が変化しているのがわかる。

まず β 固定で α を増加させた時, $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域は減少しているのが分かる。例えば $\beta = 90^\circ$ で $\alpha = 0^\circ$ から $\alpha = 20^\circ$ に変化する場合を見ると $\mu = 0.5$ での不安定領域の幅は 0.51 から 0.08 と大きく減少している。その他の β についても同じような傾向が見られる。

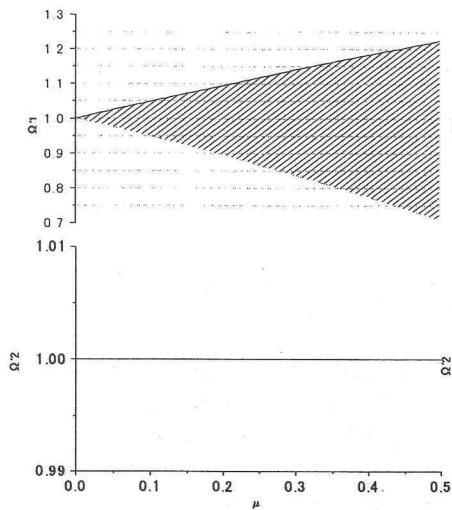


図-2 $\alpha=0, \beta=90$ の時

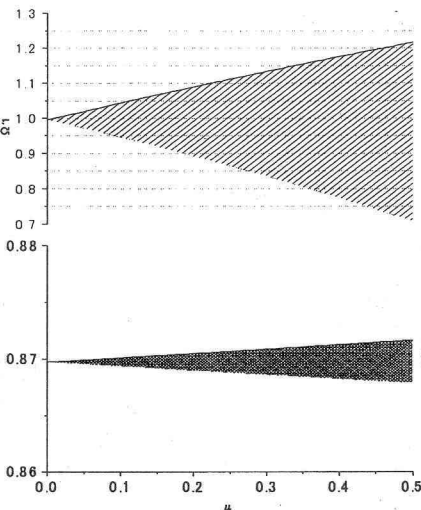


図-3 $\alpha=0, \beta=60$ の時

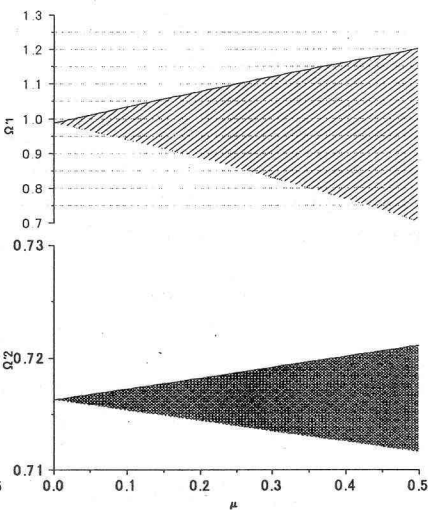


図-4 $\alpha=0, \beta=45$ の時

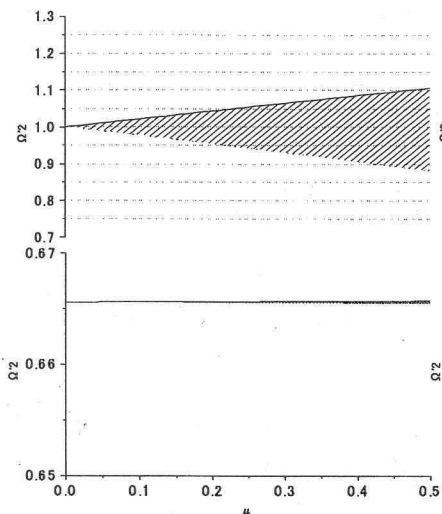


図-5 $\alpha=10, \beta=90$ の時

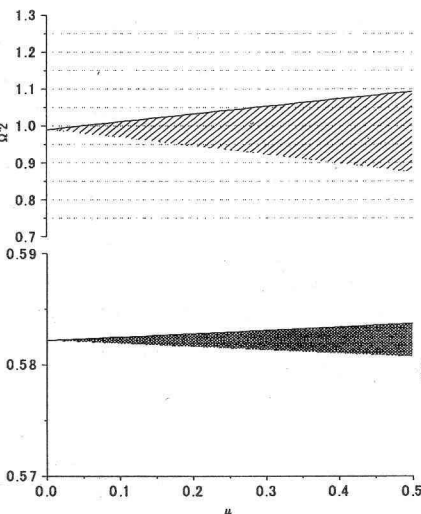


図-6 $\alpha=10, \beta=60$ の時

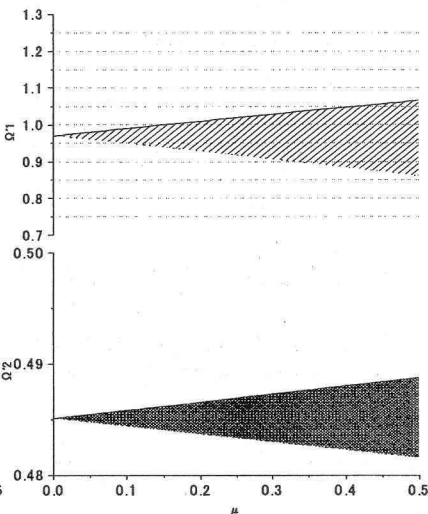


図-7 $\alpha=10, \beta=45$ の時

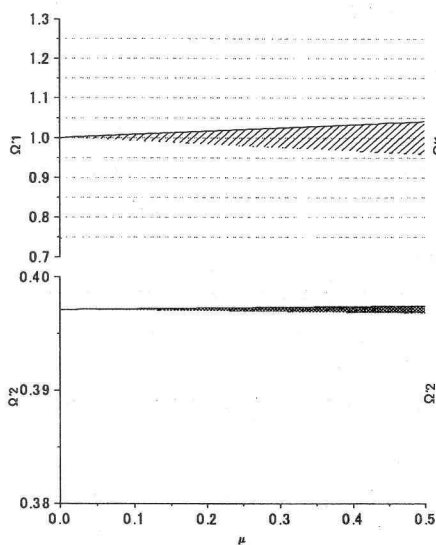


図-8 $\alpha=20, \beta=90$ の時

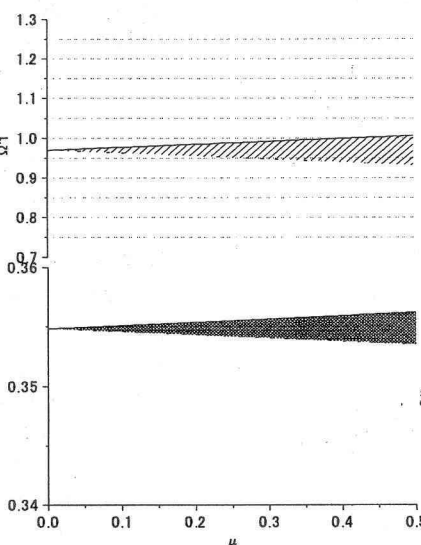


図-9 $\alpha=20, \beta=60$ の時

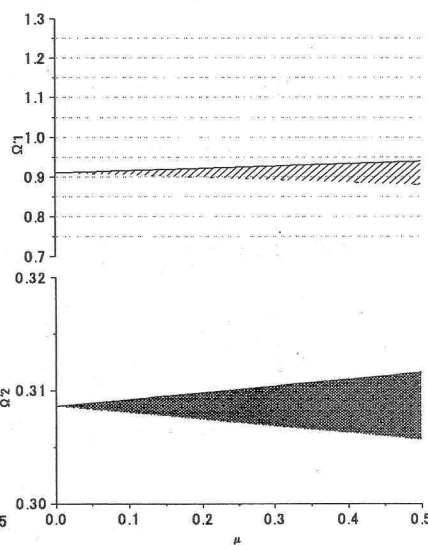


図-10 $\alpha=20, \beta=45$ の時

$\omega \approx 2\omega_2$ に相当する不安定領域も一次に比べると割合は小さいものの若干ながら減少していることから傾角の増加は単純パラメトリック共振による不安定領域の解消に有効であるといえる。次に α 固定で β を小さくした時を

見ると、 $\omega \approx 2\omega_2$ に相当する不安定領域は若干ではあるが広がり、連成が強くなり不安定領域の振動数域が低いものになっている。これは β の増加で連成が強くなり固有振動数が下がったためである。このとき不安定領域の広がり

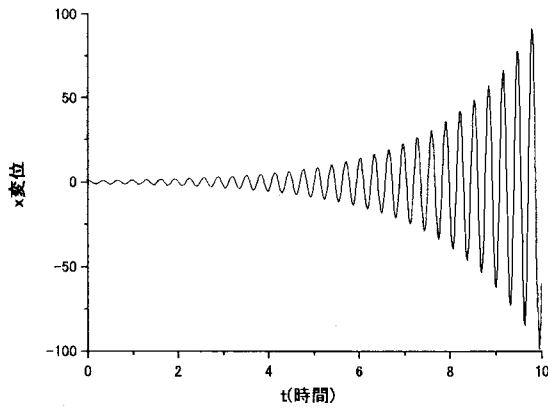


図-11 振幅の増幅，発散の様子 ($\omega = 40$)

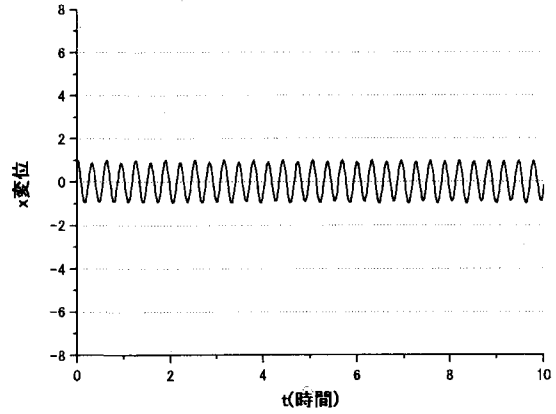


図-12 周期的振動の様子 ($\omega = 30$)

の程度は $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域に比べ非常に小さい。 $\omega \approx 2\omega_1$ に相当する不安定領域は $\alpha = 0^\circ$ 以外は多少減少しているもののほとんど変化が見られない。この場合に連結角の変化は不安定領域の振動数域には影響を与えるものの傾角に比べると分布領域の広がりにはほとんど影響がないといえる。

以上の考察よりある程度の傾角があれば連結角による影響を考えなくても本解析モデルにおける構造物の単純パラメトリック共振による不安定領域を大きく減らせることが分かる。

図 11, 図-12 は不安定領域内と領域外の水平方向の振動の様子を比較したものである。 $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$ の時で $\mu = 0.05, \Omega = 20[\text{rad/s}]$ という条件を与え、その時の主不安定領域が周期変動張力の振動数が 38.9872, 40.9878 の値を境界として存在する。

このとき、不安定領域内 $38.9872 < \omega < 40.9878$ が不安定条件、 $\omega < 38.9872, 40.9878 < \omega$ が安定条件になる。不安定条件の時の変位の時間変化を図-11, 安定条件のときを図-12 に示す。初期変位として $x = 1$ を与えてあるが、境界外では初期変位を振幅とした周期的な振動を繰り返している。しかし境界内では振幅が増幅、発散しており水平変位は無限大に発散していく。その様子が図-11 を見るとわかる。

5. あとがき

本研究においては減衰の影響のない場合における、傾角 α 、連結角 β を変化させた時の主不安定領域の検討を行った。この場合における不安定領域は、係留索の軸方向周期変動張力の振動数と連成振動の固有振動数の関係で発生する単純パラメトリック共振による影響である。得られた知見をまとめると以下のとおりである。

- (1) 傾角 α の増加により連成振動におけるいずれの不安定領域の広がりを減らすことができる。特に $\omega \approx 2\omega_1$

に相当する不安定領域に大きな効果を発揮する。

- (2) 連成振動による単純パラメトリック共振のみを考える場合に連結角 β の影響は傾角に比べ小さなものといえる。
- (3) 不安定領域内の発散振動の様子が確かめられた。

しかし連成振動における不安定領域を考える場合、結合共振による不安定領域が生じることが分かっている。結合共振は連成振動における複数の固有振動数の和、差によって発生すると考えられ、本研究の水中係留浮体モデルにおいて今後は検討していくべき課題と言える。また本研究においてはレグの復元力をを線形条件で仮定している。線形条件では不安定領域の境界内では無限大に発散するが、実際は非線形的なものになってくる。減衰の問題も無視ではない。

これらを含めてこれからの研究を進めていく予定である。

参考文献

- 1) Bolotin, V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc, 1964
- 2) A.H. Nayfeh, and D.T. Mook, : Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, Inc., 1979
- 3) T.C. Lee : A study of coupled Mathieu equations by using of infinite determinants, Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 349-352, 1976
- 4) M. Sato, S. Kanie, T. Mikami, H. Gunawan and K. Sato : Dynamic Instability Characteristics of Submerged Floating Tunnel, Proceeding of the Ninth East-Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, paper no. 379, 2003