

無限領域問題のためのハイラーキ無限要素

Hierarchical Infinite Elements for Modeling Unbounded Domain Problems

函館工業高等専門学校 ○正員 渡辺 力 (Chikara WATANABE)
 長岡技術科学大学名誉教授 正員 林 正 (Masa HAYASHI)
 函館工業高等専門学校 高松弘一 (Kohichi TAKAMATSU)

1. まえがき

構造物と地盤や水との連成問題¹⁾や大型浮体構造物²⁾などの有限要素解析において、半無限領域を効率的にモデル化するために無限要素が用いられている。有限要素法では写像関数に分数関数、指数関数、対数関数などを用いた種々の無限要素が開発されているが³⁾、 C^0 級の変位関数を用いた要素を無限遠に写像する無限要素が簡便で最も効率的であるとされている⁴⁾。

無限領域問題の有限要素解析では、無限要素を有限要素と結合し、無限に広がる領域を合理的にモデル化できる。しかし、解を所望する領域は有限要素により細分割され、無限要素は無限領域を表現する目的だけのために用いられているようである。そのため、無限要素自体の解析精度はあまり議論されていない。

本研究では、大型要素を用いた粗い要素分割で、無限領域問題の解析を高精度かつ効率的に行うことができるハイラーキ無限要素を開発する。ハイラーキ無限要素は、階層型形状関数を用いたハイラーキ有限要素において、写像関数に半無限関数を使用して、多方向に無限遠写像が可能な要素である。さらに、中間写像点を用いて任意の方向への曲線写像や、応力集中問題に対する特異写像も可能である。

本論文では、内圧を受ける無限円孔板と線荷重が作用する無限帯板の計算にハイラーキ無限要素を用いて、解の精度と中間節点の配置方法を検討した結果を報告する。

2. 半無限写像

(1) 半無限関数

図-1に示す◎印の節点1(または0)で無限大になる半無限関数の級数は、有限側の節点0(または1)と中間節点2($\xi=0$)の間で級数展開して次式が得られる。

$$h_0 = \frac{-2\xi}{1-\xi}, \quad h_m = \frac{1+\xi}{1-\xi} \xi^{m-2} \quad (m \geq 2) \quad (1)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{2\xi}{1+\xi}, \quad \bar{h}_m = \frac{1-\xi}{1+\xi} (-\xi)^{m-2} \quad (m \geq 2) \quad (2)$$

ここに $m(\geq 2)$ は級数項、 ξ は自然座標である。なお、

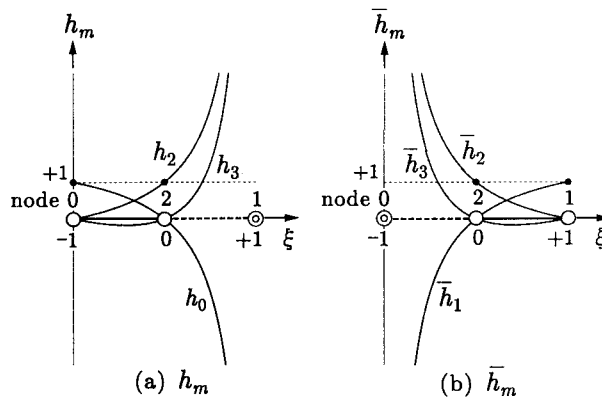
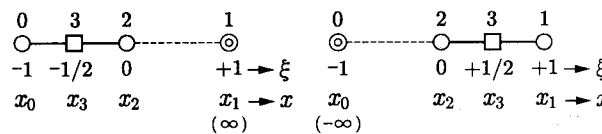


図-1 半無限関数



(a) 節点1が無限遠 (b) 節点0が無限遠

図-2 1次元無限写像

無限遠の一般化変位はゼロであるので、◎印の節点の関数 h_1, \bar{h}_0 は不要である。

(2) 1次元写像

図-2に示す□印の中間写像点3を用いて節点1または節点0を無限遠点に写像する1次元写像は、式(1)、(2)により次式で与えられる。

$$x = h_0 x_0 + h_2 x_2 + h_3 \hat{x}_3 \quad (3-a)$$

$$x = \bar{h}_1 x_1 + \bar{h}_2 x_2 + \bar{h}_3 \hat{x}_3 \quad (3-b)$$

ここで、式(3)の右辺第3項は曲線に写像する場合に用いる。式(3)の左辺に写像点3の座標値 x_3 を代入して、ハイラーキ座標値 \hat{x}_3 ⁵⁾ が得られる。

$$\hat{x}_3 = 2(2x_0 + x_2 - 3x_3) \quad (4-a)$$

$$\hat{x}_3 = 2(2x_1 + x_2 - 3x_3) \quad (4-b)$$

3. ハイラーキ無限要素

(1) 写像関数

2次元要素の写像関数を考える。写像には座標をハイラーキ多項式で級数展開した次のハイラーキ写

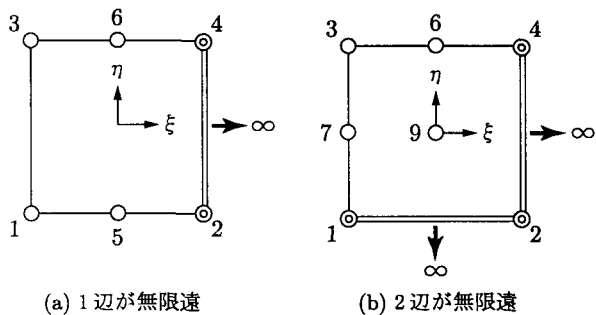


図-3 四辺形無限要素

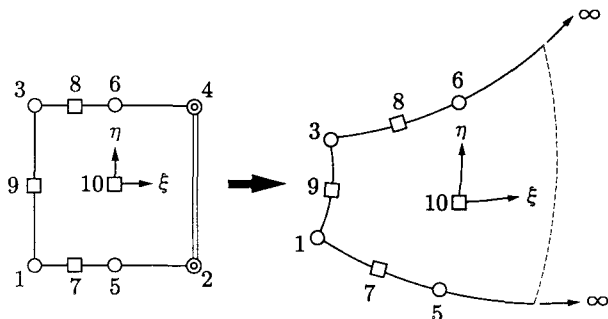


図-4 曲線四辺形要素

像⁵⁾を用いる。

$$x = \sum_{i=1}^I N_i \hat{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^I N_i \hat{y}_i \quad (5)$$

ここに、

$$N_{mn}(\xi, \eta) = f_m(\xi) \cdot f_n(\eta) \quad (6)$$

$$f_m(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \xi_0) & (m = 0, 1) \\ (1 - \xi^2) \xi^{m-2} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (7)$$

式(5)の N_i は、式(6)の二重級数 N_{mn} を1次元に並べ換えたものがある。 $m=0, 1$ は両端の節点、 $m \geq 2$ は節線項、 $\xi_0 (= \mp \xi)$ は変数で、 \hat{x}_i などの中間写像点のハイラーキ座標値は曲線要素や特異要素に写像する場合に用いる。式(5)の I は写像点数で、式(6)を1次元の番号に並べた数である。

半無限写像では、式(6)において無限遠に写像する ξ, η 方向の多項式 f_m に式(1), (2)の半無限関数を用いる。曲線要素に写像する場合には、2節点間に設けた中間写像点に式(1), (2)の $h_m, \bar{h}_m (m \geq 3)$ を使用する。

(2) 四辺形無限要素

図-3(a)の1方向無限要素では、二重線で示した節線上の点(節点2と4)を無限遠に写像して次式で与えられる。 y も同様に表す。

$$x = N_{00} x_1 + N_{20} x_5 + N_{01} x_3 + N_{21} x_6 \quad (8)$$

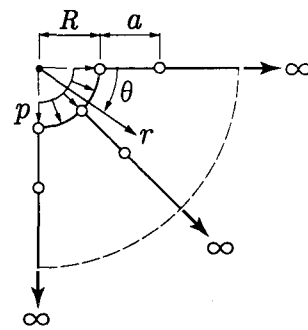


図-5 無限円孔板の要素分割

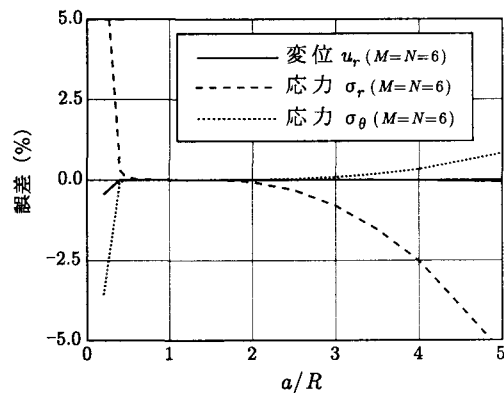


図-6 中間節点の配置距離 a/R の影響

ここに、

$$N_{mn} = h_m f_n \quad (9)$$

図-3(b)の2方向無限要素では、二重線で示した節線上の点(節点1, 2と4)を無限遠に写像して次式で与えられる。

$$x = N_{02} x_7 + N_{22} x_9 + N_{01} x_3 + N_{21} x_6 \quad (10)$$

ここに、

$$N_{mn} = h_m \bar{h}_n \quad (11)$$

(3) 曲線四辺形無限要素

曲線要素に写像するときには、図-4に示す□印の中間写像点を用いる。例えば、図-3(a)の一方無限要素を曲線要素に写像する場合の写像の式は次式で与えられる。

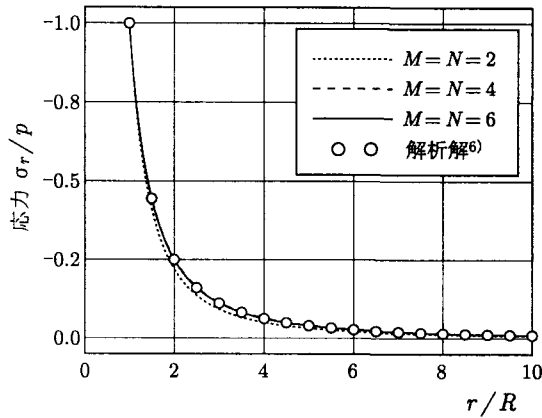
$$x = \text{Eq.}(8) \text{の右辺} + N_{30} \hat{x}_7 + N_{31} \hat{x}_8 + N_{02} \hat{x}_9 + N_{22} \hat{x}_{10} \quad (12)$$

ここに、 N_{mn} は式(9)と同じである。 \hat{x}_9, \hat{x}_{10} は通常のハイラーキ座標値⁵⁾で、 \hat{x}_7, \hat{x}_8 には式(4-a)を用いる。

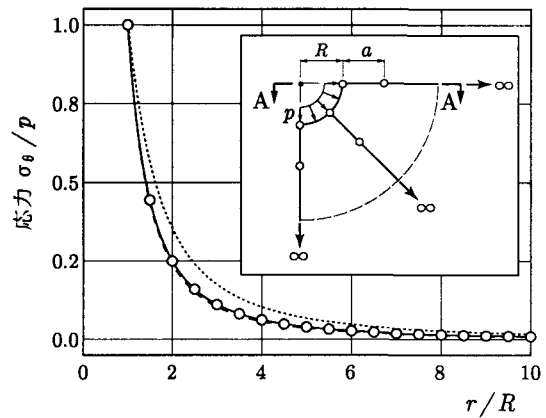
4. 数値計算例

(1) 内圧を受ける無限円孔板

内圧 p を受ける無限円孔板の平面応力問題を計算し、中間節点の配置位置が解に与える影響とハイラーキ

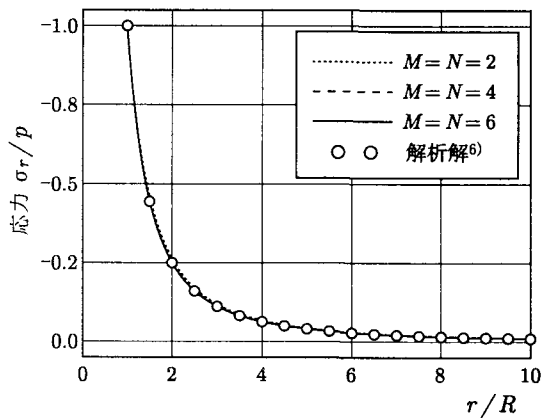


(a) 半径方向応力 σ_r/p

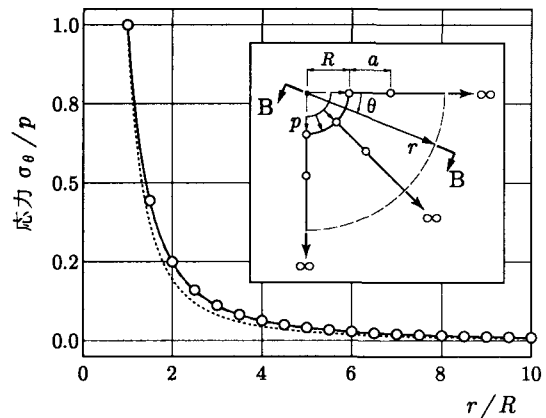


(b) 節線方向応力 σ_θ/p

図-7 要素境界 A-A 線上 ($\theta=0$) の応力



(a) 半径方向応力 σ_r/p



(b) 節線方向応力 σ_θ/p

図-8 要素中央線 B-B 線上 ($\theta=\pi/8$) の応力

無限要素の精度を調べる。

計算モデルは、円孔の半径 R 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、図-5 に示すように無限板の $1/4$ 領域を 2 要素でモデル化して円弧は 4 次曲線で近似する。また、変位の補間関数の次数には $M=N=2\sim 6$ 次式を用いる。

図-6 は、中間節点を円孔の同心円上に配置し、距離 a を変化させたときの要素隅角点 ($r=R, \theta=0$) の変位と応力の誤差 (%) を示したものである。この例では、極の位置を円孔の中心に合わせ、 $a=R$ 程度を用いれば解析解⁶⁾と良く一致した解が得られる。図より a/R が約 $0.7\sim 2.0$ 範囲で安定した解が得られているが、 a を要素の幅 (この場合には円孔周長の $1/8$) より小さくしたり、極端に大きくとると精度を悪化させることになる。1 方向無限要素における中間節点の配置位置は、要素の端点から要素の幅程度の距離にとれば良いようである (このことは次の例などでも同様なことが言える)。

図-7 は、 $a=R$ として計算した場合の要素の節線上 ($\theta=0$)、図-8 は要素中央線上 ($\theta=\pi/8$) の応力分布を示したものである。要素のどの位置でも良好な収束性と高精度な解が得られている。なお、次数 $M=N=6$ 次

式を用いたときの誤差は、変位 u_r で $5.7\times 10^{-5}\%$ 、応力 σ_r で $4.8\times 10^{-4}\%$ 、応力 σ_θ で $2.2\times 10^{-3}\%$ と、高精度の解が得られている。

(2) 線荷重を受ける無限帯板

図-9 に示す線荷重 q が全幅に作用する単純支持無限帯板を計算し、板曲げ問題での精度を調べる。計算モデルは、幅 b 、板厚比 $t/b=1/100$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とする。要素分割は板の $1/4$ 領域に 1 要素を用いて、中間節点は $a=b/2$ (要素の幅) の位置に配置する。また、変位の補間関数の次数には $M=N=4\sim 10$ 次式を用いる。

図-10 は x 軸上の直応力 σ_x と σ_y の応力分布を示したもので、全体的に収束性は良好である。図-11 は y 軸上の直応力の分布を示したもので、線荷重の載荷位置であることから収束性は x 軸上よりも悪いが、10 次式を用いれば解析解と良く一致している。

5. まとめ

ハイラーキ無限要素を内圧を受ける無限円孔板と線荷重が作用する無限帯板の計算に用いた結果から次のようなことが言える。

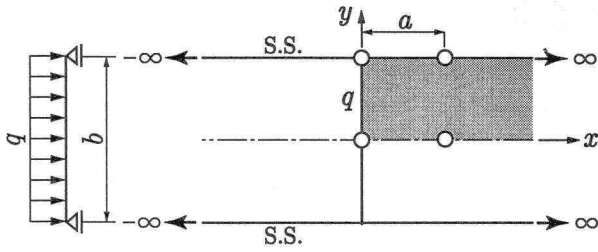
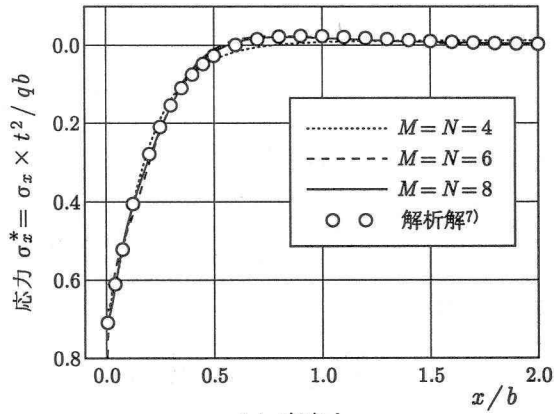
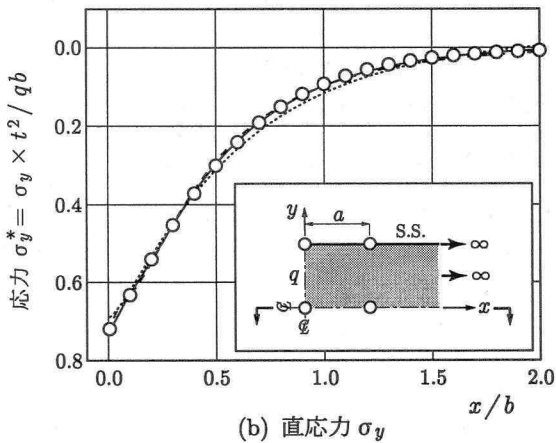


図-9 線荷重を受ける無限帯板



(a) 直応力 σ_x



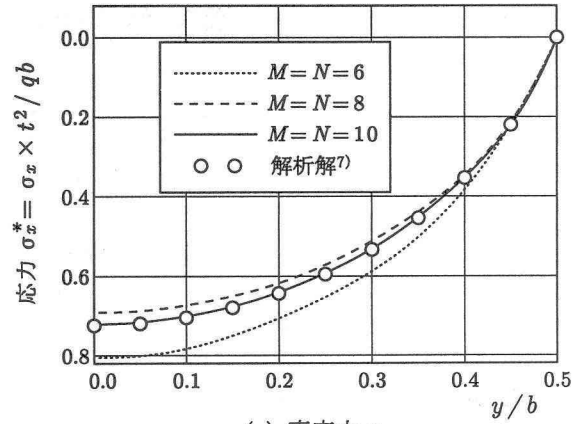
(b) 直応力 σ_y

図-10 x 軸上の直応力

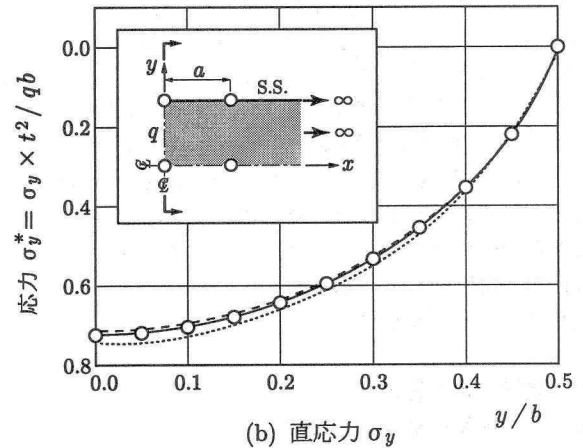
- (1) 本無限要素は極めて高精度であり、少ない要素分割で無限領域問題を効率良く計算できる。
- (2) 1方向無限要素において中間節点の配置位置が解に与える影響は大きく、端節点から要素の幅程度の距離に中間節点を配置すれば安定した解が得られる。

参考文献

- 1) Miura, F. and Wang, J. : Dynamic Response Analysis of Structure-Water-Ground System in the Time Domain Using Semi-Infinite Elements, *Proc. of JSCE*, No.471/I-24, pp.59-65, 1993.
- 2) 梶田幸秀, 宇都宮智昭, 渡辺英一 : 有限要素法による大型浮体構造物の波浪応答解析, *土木学会論文集*, No.598/I-44, pp.161-170, 1998.
- 3) Abdel-Fattah, T.T., Hodhod, H.A. and Akl, A.Y. : A novel formulation of infinite elements for static analysis, *Computers & Structures*, Vol.77, pp.371-379,



(a) 直応力 σ_x



(b) 直応力 σ_y

図-11 y 軸上の直応力

2000.

- 4) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. : *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol.1, McGraw-Hill, pp.183-189, 1987.
- 5) 林 正, 山中素直, 加瀬部弘, 佐藤敏亮 : ハイアラーキ要素による有限要素解析の効率化, *土木学会論文集*, No.591/I-43, pp.71-84, 1998.
- 6) 国尾 武 : 固体力学の基礎, 培風館, pp.183-188, 1977.
- 7) 土木学会 : 構造力学公式集, p.332, 1986.