

Timoshenko beam 座屈問題への Finite Point Method 適用について

Application of Finite Point Method to buckling problem of a Timoshenko beam

北海道大学大学院工学研究科 ○学生員 京田康宏(Yasuhiro Kyoda)
 北海道大学大学院工学研究科 正員 蟹江俊仁(Shunji Kanie)
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 三上 隆 (Takashi Mikami)

1. 序論

近似関数の生成に重み付き最小自乗法(Weighted Least Square Method: 以下 WLSM)を、支配方程式の解法に選点法を用いた Finite Point Method(以下 FPM)は、要素・格子を必要とせず、計算負荷が小さいという利点を有している。これまで[1], [2]において静的曲げ問題や自由振動値問題へ適用し、基底関数と節点数・影響範囲等の関係を明らかにしてきた。今回、本論文では、初期応力を考慮した Timoshenko beam(以下 TB)の座屈問題に適用することで、固有値問題に対する高次基底関数の妥当性について検証することを目的とする。

2. WLSM による近似関数の設定

領域 $x \in \Omega$ で定義される関数 $u = f(x)$ に対して、領域内の任意の評価点 x_k における関数 u は次式を用いて近似的に表されるものとする。

$$u(x_k) \cong \hat{u}(x_k) = \{\mathbf{p}(x_k)\}^T \{\mathbf{a}(x_k)\} \quad (1)$$

ここに、 \hat{u} は近似解、 \mathbf{p} は基底関数ベクトル、 \mathbf{a} は未定係数ベクトルである。ちなみに、 $\{\mathbf{p}(x)\}^T = \{1, x, x^2, \dots, x^m\}$ 、 $\{\mathbf{a}(x)\} = \{a_k, b_k, c_k, \dots\}$ となる。 m は基底関数の最大次数である。また、WLSM では、次式で定義される評価関数 Π を最小にするように未定係数 a_i を決定する。

$$\Pi = \sum_{j=1}^{NP} \varphi(z_j) (u(x_j) - \{\mathbf{p}(x_j)\}^T \{\mathbf{a}(x_j)\})^2 \quad (2)$$

$$z_j = \frac{x_j - x_k}{\rho_k} \quad (3)$$

ここに、 NP は節点数、 x_j は節点座標、 $\varphi(z)$ は重み関数であり、4 次スプライン関数を使用している。また、 ρ_k (サポート台)は重み関数の範囲を示しており、これを変化させることによって重み関数中に含まれる節点数 n も変化する。本解析では、節点配置の疎密に関らず重み関数の範囲内に含まれる節点数 n が一定に保たれる可変式サポート台を用いている。さらに、基底関数 \mathbf{p} 中の変数 x を ρ_k で正規化した(式(4))。基底関数 \mathbf{p} は $\{\mathbf{p}(\xi)\}^T = \{1, \xi, \xi^2, \dots\}$ となる。

$$\xi = \frac{x - x_k}{\rho_k} \quad (4)$$

正規化を行うことで解析領域や基底関数の次数に関らず、対称性を保持した安定的な形状関数が得られる。

次に、式(2)に最小化条件を付与すると式(5)が得られる。

$$\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{P}][\Phi][\mathbf{P}^T]^{-1} [[\mathbf{P}][\Phi]]\{U\} \quad (5)$$

上式において

$$[\mathbf{P}] = [\{\mathbf{p}(\xi_1)\}, \{\mathbf{p}(\xi_2)\}, \dots, \{\mathbf{p}(\xi_{NP})\}] \quad (6)$$

$$[\Phi] = \text{diag}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \dots, \varphi(z_{NP})) \quad (7)$$

$$\{U\}^T = \{u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_{NP})\} \quad (8)$$

である。また、式(1), (5)より、形状関数 N_k が得られる。

$$\hat{u}(x_k) = \{\mathbf{p}(\xi_k)\}^T [[\mathbf{P}][\Phi][\mathbf{P}^T]^{-1} [[\mathbf{P}][\Phi]]\{U\} = [N]\{U\} \quad (9)$$

3. 選点法による支配方程式の定式化

一次元問題で微分方程式を以下のように定義する。

$$L(u) = f \text{ in } \Omega, u = g \text{ on } \Gamma_g, \frac{du}{dx} = h \text{ on } \Gamma_h \quad (10)$$

ここに、 L は微分演算子である。式(10)はそれぞれ支配方程式、ディリクレ境界条件、ノイマン境界条件である。近似解 $\hat{u}(x_k)$ によって近似される未知関数 $u(x)$ に重み付き残差法を用いると、次式が得られる。

$$\int_{\Omega} \left(\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - f \right) w d\Omega + (\hat{u} - g) \bar{w} + \left(\frac{d\hat{u}}{dx} - h \right) \bar{\bar{w}} = 0 \quad (11)$$

ここで、重み関数を $w = \bar{w} = \bar{\bar{w}} = \delta$ とする。 δ は Dirac delta である。式(11)より式(12)が得られる。

$$\mathbf{K}u = \mathbf{F} \quad (12)$$

\mathbf{K} は剛性マトリックスであり、 $\mathbf{K} \in \mathfrak{R}^{NP \times NP}$ 、 $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^{NP \times 1}$ 、 $\mathbf{F} \in \mathfrak{R}^{NP \times 1}$ となる。一般に剛性マトリックスの対称性は得られない。領域内の点を I 、ディリクレ境界上の点を M 、ノイマン境界上の点を N とすると、剛性マトリックスは次のようになる。

$$\mathbf{K}_{I,I} = \frac{\partial^2 N_I(x_I)}{\partial x^2}, \mathbf{K}_{M,J} = N_J(x_M), \mathbf{K}_{N,J} = \frac{\partial N_J(x_N)}{\partial x}, \quad j = 1, 2, \dots, NP \quad (13)$$

4. Timoshenko beam の座屈問題への適用

TB の座屈方程式は多くの場合、初期応力を考慮しないポテンシャルエネルギーに $A\sigma^0/2 \cdot (\partial w/\partial x)^2$ の項を加えたものから導かれている。一方、Sun は[3]で Trefftz の理論に基づいた初期応力作用下の方程式を導いている。これは軸方向応力の $(d\theta/dx)^2$ に与える影響も考慮したものである。図-1 のような圧縮荷重を受ける両端単純支持梁に本手法を適用するために、まず x, z 軸方向の変位を図-1 のように仮定する。

$$\bar{u}(x, z) = u(x) - z\theta(x), \quad \bar{w}(x, z) = w(x) \quad (14)$$

式(14)によって、ひずみ成分は

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (15)$$

$$\gamma_{xz} = -\theta + \frac{dw}{dx} + \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} \right) (-\theta) \quad (16)$$

となる。また、 $\sigma_x = E\varepsilon_x$ 、 $\tau_{xz} = \kappa G\gamma_{xz}$ の関係より内部ひずみエネルギー密度は

$$W = \left(\sigma^0 + \frac{1}{2} \sigma_x \right) \varepsilon_x + \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} \quad (17)$$

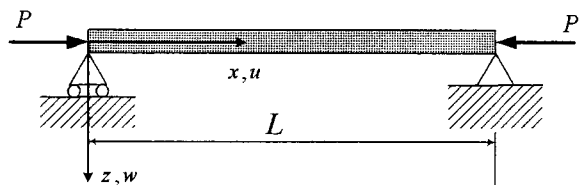


図-1 モデル図

よって、単位長さあたりのひずみエネルギーは

$$U = A\sigma^0 \frac{du}{dx} + \frac{A\sigma^0}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{aI\sigma^0}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{A\sigma^0}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{EA}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{EI}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{\kappa GA}{2} \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right)^2 \quad (18)$$

となる。ここで、 a は1または0の値をとり、 θ'' の項を考慮するかどうかを決定するパラメーターである。式(18)より、全ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = \int_0^L \left(U - A\sigma^0 \frac{du}{dx} \right) dx \quad (19)$$

次に、 $P = -A\sigma^0$ 、また、 $x = L\xi$ 、 $w = Lw^*$ 、 $\theta = \theta^*$ なる無次元量を導入する。さらに $r = \sqrt{I/A}$ 、 $\lambda = L/r$ と置き、式(19)の第一変分を零とし、その3次、4次の高次の項を無視することで式(20)、(21)が得られる。

$$\frac{d^2 w^*}{d\xi^2} - \lambda^2 \theta^* = \frac{P}{\kappa GA} \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} \quad (20)$$

$$\lambda^2 \frac{dw^*}{d\xi} - \lambda^2 \theta^* + \frac{E}{\kappa G} \frac{d^2 \theta^*}{d\xi^2} = \frac{aP}{\kappa GA} \frac{d^2 \theta^*}{d\xi^2} \quad (21)$$

初期応力を考慮することで式(21)の右辺の項が加わる。ここで、式(20)、(21)をまとめると、式(22)、(23)となる。

$$\frac{d^4 w^*}{d\xi^4} + \frac{\kappa GA}{(\kappa GA - P)(EA - P)} \lambda^2 \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} = 0 \quad (a=1) \quad (22)$$

$$\frac{d^4 w^*}{d\xi^4} + \frac{\kappa GAP}{EA(\kappa GA - P)} \lambda^2 \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} = 0 \quad (a=0) \quad (23)$$

両端単純支持の場合、 $a=1$ 、 $a=0$ では式(24)、(25)となる。

$$\frac{P_{cr}}{\kappa GA} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2} + \frac{E}{\kappa G} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2} + \frac{E}{\kappa G} \right)^2 - 4 \frac{E}{\kappa G}} \right\} \quad (24)$$

$$\frac{P_{cr}}{\kappa GA} = \left(\frac{E}{\kappa G} \right) \cdot \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2} + \frac{E}{\kappa G} \right)^{-1/2} \quad (25)$$

5. 解析結果

支配方程式(20)、(21)に対し、節点数は $NP=11$ 点、基底関数の次数は $m=6$ とした。その他の解析に用いたパラメーターは以下のとおりである。

$$\kappa = 5/6, \quad \nu = 1/3, \quad E/G = 8/3, \quad \rho = 1$$

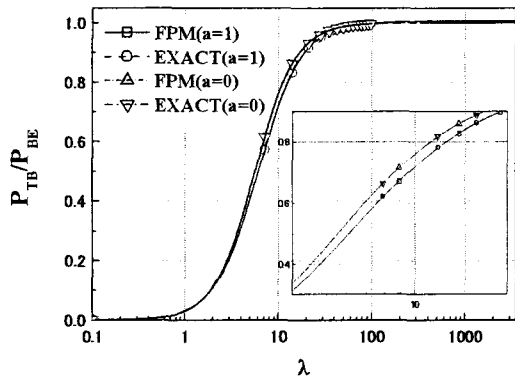


図-2 座屈荷重と細長比

図-2の縦軸はTBの座屈荷重をBernoulli-Euler beamの座屈荷重で割ったものであり、横軸は細長比である。図-2より $a=1$ のとき、梁せいが比較的大きいときに座屈荷重がより小さくなっていることが分かる。また、 $\lambda = L/r$ で示すと0.1から3500まで精度の良い結果が得られている。

次に、基底関数の次数と節点数の関係について考察するため(図-3)、ここでは、 $\lambda=1000$ において4次、6次、

8次近似を用いて解析を行った。4次近似では60点程度で誤差1%以下になっている、一方、6次近似では最小節点数8点、8次近似では10点で誤差1%以下になっている。このことから、固有値問題に対しては、ある程度大きな基底関数の次数を設定することが有効である。

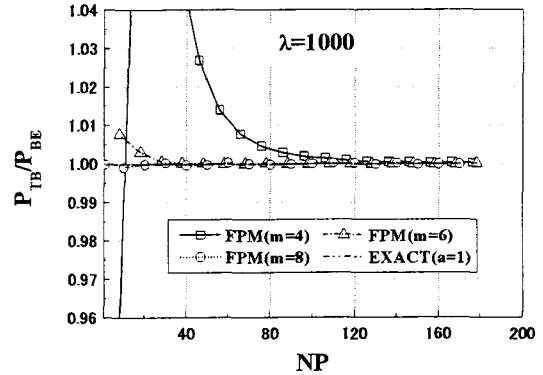


図-3 基底関数の次数と節点数

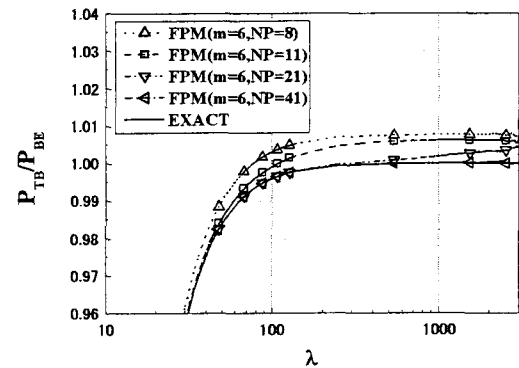


図-4 節点数と誤差

最後に、最低限の次数と考えられる6次近似における節点数ごとの精度を比較した(図-4)。細長比が1000と非常に大きな時でも、節点数8で0.7%程度の誤差しかなく節点数に対して十分な精度が得られていると考えられる。

6. まとめ

本研究では、Trefftzの理論に基づく初期応力を考慮したTBの座屈問題にFPMを適用し、せん断変形の影響、基底関数の次数と節点数について検証した。その結果、次のような結論が得られた。6次近似でも少ない節点数で良好な精度と収束性を示している。本手法で得られた解は、細長比の広い範囲にわたって良好な結果を示している。 $A\sigma^0 d^2\theta/dx^2$ の項を考慮することにより細長比が約100以下の場合の座屈荷重がより小さくなることを確認した。

参考文献

- 1)京田康宏, 蟹江俊仁, 寺田学: 重み付き最小自乗法によるメッシュフリーFEMの一次元問題への適用 土木学会北海道支部論文報告集, Vol59, pp.128-131, 2003
- 2)京田康宏, 蟹江俊仁, 寺田学: Finite Point Methodの一次元問題適用について, 土木学会第58回年次学術講演会, p445-446, 2003
- 3)Sun, C.T On the equations for a Timoshenko beam under initial stress. Journal of applied mechanics, :pp282-285, 1972
- 4)E. Onate, F. Perazzo, J. Miquel, "A finite point method for elasticity problems", Computers & Structures, 79 :pp2151-2163, 2001