

造波水路における波高減衰

Wave attenuation in wave flumes

北海道技術コンサルタント

○正 員 野村圭司 (Keiji Nomura)

パブリックコンサルタント

正 員 大橋正臣 (Masami Ohashi)

北海道東海大学工学部海洋環境学科 正 員 濱中建一郎 (Ken-ichiro Hamanaka)

1. はじめに

通常、実験に用いられる造波水路において、構造物等が何もない状態では波の進行に伴う波高減衰は無視できるものとして実験を行う。しかしながら実際にはエネルギー損失は起こっており、水路の規模、水深、波の条件によっては無視できない波高減衰が生ずる可能性があると考えられる。

今、造波水路が丁寧に作られているとし、底面や側壁の凹凸が無視できると仮定すると、エネルギー損失は底面と側壁の境界層内で発生するものと、波動運動の流れにより発生するものとに分ける事が出来る。

本研究では、底面と側壁の境界層に対しては境界層方程式を解いて流速分布を求め、波動運動に対しては微小振幅波の理論を適用し、各々について、エネルギー損失を求める。得られたエネルギー損失から波高減衰を求めると同時に実験値との比較により理論解の妥当性を検討する。

2. エネルギーフラックスとエネルギー損失

動粘性係数を ν とすると、運動方程式の一般表示は以下のように示される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3)$$

連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

流体の単位体積あたりの運動エネルギーの時間的变化は

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) = \rho u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} + \rho w \frac{\partial w}{\partial t} \quad (5)$$

(5)式の右辺に(1)、(2)、(3)式を代入し(4)式を考慮しながら変形すると

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\text{div} \left\{ \rho \mathbf{V} \left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \eta \mathbf{A} \right\} - E_l \quad (6)$$

ここで、 η は粘性係数で、さらに、

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$A_x = u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$A_y = u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$A_z = u \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$E_l = 2\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\eta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\eta \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \quad (7)$$

(6)式の右辺第1項はエネルギーフラックスの出入りを表し、第2項はエネルギー損失を表す。

3. 底面境界層内の流れと損失

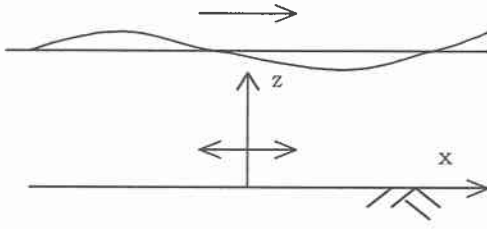


図1 底面境界層での座標系

境界層の厚さは波長に比べ十分薄いと考えると、境界層内では局所的に

$$v = w = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

と仮定しても良い。

(8)、(9)式の仮定のもとに運動方程式を簡略化すると、 x 方向では

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (10)$$

(10)式に対する境界条件は底面で、

$$u = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad (11)$$

境界層外縁で

$$u = U_0 e^{-i\sigma t} + c.c. \quad (U_0 \text{ は実数}) \quad \text{on} \quad z \rightarrow \infty \quad (12)$$

(10)式を(11)、(12)式のもとで解くと

$$u = 2U_0 \{ \cos \sigma t - e^{-\beta z} \cos(\beta z - \sigma t) \} \quad (13)$$

(13)式を(7)に代入し、エネルギー損失を求めると

$$E_l = 4\eta\beta^2 U_0^2 e^{-2\beta z} \{ (1 + \sin 2(\beta z - \sigma t)) \} \quad (14)$$

境界層全厚で一周期平均のエネルギー損失を $\overline{E}_l$ とすると

$$\overline{E}_l = 2\eta\beta U_0^2 \quad (15)$$

次に、波動運動に伴う底面境界層でのエネルギー損失を求める。(15)式の底面境界層外縁での流速 U_0 は境界層上部の波動運動によって決まる。波動運動を微小振幅波理論で与えると水面変位を ζ 、速度ポテンシャルを ϕ とすると

$$\zeta = \frac{a}{2} e^{i(kx - \sigma t)} + c.c. \quad (16)$$

$$\phi = -i \frac{a}{2} \frac{g \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} e^{i(kx - \sigma t)} + c.c. \quad (17)$$

さらに流速は

$$u = \frac{ak}{2} \frac{g \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} e^{i(kx - \sigma t)} + c.c. \quad (18)$$

$$w = -i \frac{ak}{2} \frac{g \sinh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} e^{i(kx - \sigma t)} + c.c. \quad (19)$$

底面境界層外縁での流速(12)式は波動場にとっての底面での流速と一致するから

(一般性を損なうことなく $x = 0$ として)

$$U_0 = \frac{ak}{2} \frac{g}{\sigma \cosh kh} \quad (20)$$

従って(15)より

$$\overline{E}_l = \frac{1}{2} \eta \beta \left(\frac{a\sigma}{\sinh kh} \right)^2 \quad (21)$$

ただし、微小振幅波の分散関係

$$\sigma^2 = gk \tanh kh$$

4. 側壁境界層内の流れとエネルギー損失

側壁に原点を置き水路幅方向に y 軸を考える。底面境界層の場合と同様、境界層の厚さは波長に比べ十分薄いと考えると、境界層内では局所的には

$$v = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

と仮定しても良い。

(22)、(23)式の仮定のもとに運動方程式を簡略化すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g \quad (25)$$

(24)、(25)式に対する境界条件は側壁上で

$$u = w = 0 \quad \text{on} \quad y = 0 \quad (26)$$

境界層外縁では

$$u = U_0 e^{-i\sigma t} + c.c. \quad (27)$$

$$w = iW_0 e^{-i\sigma t} + c.c. \quad \text{on} \quad y \rightarrow \infty$$

(24)、(25)式を(26)、(27)式のもとで解くと

$$u = 2U_0 \{ \cos \sigma t - e^{-\beta y} \cos(\beta y - \sigma t) \} \quad (28)$$

$$w = 2W_0 \{ \sin \sigma t + e^{-\beta y} \sin(\beta y - \sigma t) \} \quad (29)$$

(28)、(29)式を(7)式に代入しエネルギー損失を求めると

$$E_l = 4\eta\beta^2 U_0^2 e^{-2\beta y} \{ 1 + \sin 2(\beta y - \sigma t) \} + 4\eta\beta^2 W_0^2 e^{-2\beta y} \{ 1 - \sin 2(\beta y - \sigma t) \} \quad (30)$$

境界層全厚で一周期平均のエネルギー損失は

$$\overline{E}_l = 2\eta\beta(U_0^2 + W_0^2) \quad (31)$$

となる。

(18)、(19)式から境界層外縁の流速を定め、(31)、(32)式に代入すると

$$\bar{E}_l = \frac{1}{2} \eta \beta \left(\frac{a\sigma}{\sinh kh} \right)^2 \cosh 2k(z+h) \quad (32)$$

となる。

5. 波動場内でのエネルギー損失

波動場内でのエネルギー損失は、(18)、(19)式を(7)式に代入し

$$E_l = \frac{2\eta a^2 k^2 \sigma^2}{\sinh^2 kh} \{ \cosh 2k(z+h) - \cos 2(kx - \sigma t) \} \quad (33)$$

さらに、水底から水面まで積分し、一周平均を求めると、

$$\bar{E}_l = 2g\eta k^2 a^2 \quad (34)$$
 となる。

6. 造波水路におけるエネルギー損失と波高減衰

水路断面あたりのエネルギー損失を考える。水路幅を B とすると底面境界層の全幅でのエネルギー損失は

$$\bar{E}_{LB} = \frac{1}{2} \eta \beta B \left(\frac{a\sigma}{\sinh kh} \right)^2 \quad (35)$$

側壁境界層の全水深でのエネルギー損失は側壁が 2 枚あることを考慮し

$$\bar{E}_{LW} = \eta \beta g a^2 \quad (36)$$

波動場内の全幅でのエネルギー損失は

$$\bar{E}_{li} = 2g\eta k^2 a^2 B \quad (37)$$

従って、断面全体のエネルギー損失は

$$\begin{aligned} \bar{E}_l &= \bar{E}_{LB} + \bar{E}_{LW} + \bar{E}_{li} \\ &= \left(\frac{B}{2} \frac{\eta \beta \sigma^2}{\sinh^2 kh} + \eta \beta g + 2B g \eta k^2 \right) a^2 \equiv C_1 a^2 \end{aligned} \quad (38)$$

となる。

7. 水路断面でのエネルギーフラックスと波高減衰

今、定常波動場を考えると、ある断面の一周平均の運動エネルギーは時間的に変化しない。従って、(6)式を断面全体で考えれば

$$\frac{\partial \bar{F}_x}{\partial x} = -\bar{E}_l \quad (39)$$

$\bar{F}_x$ は断面の x 方向のエネルギーフラックスで、境界層内でのエネルギーフラックスは無視しうるとし波動運動によるエネルギーフラックスを求めると

$$\bar{F}_x = \frac{B}{4} \rho g a^2 \frac{\sigma}{k} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \equiv C_2 a^2 \quad (40)$$

(38)、(40)式を(39)式に代入すると

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{C_1}{2C_2} a \equiv -Ca \quad (41)$$

すなわち、

$$a = a_0 e^{-Cx} \quad (42)$$

となり、振幅の変化（波高減衰）が得られる。

8. 結果と結論

図 2 は(35)、(36)、(37)式で表される各々のエネルギー損失と(38)式で表される全体のエネルギー損失を入射振幅の 2 乗で割った値を示したものである(単位は $g_r / \text{cm}^2 \text{s}$)。

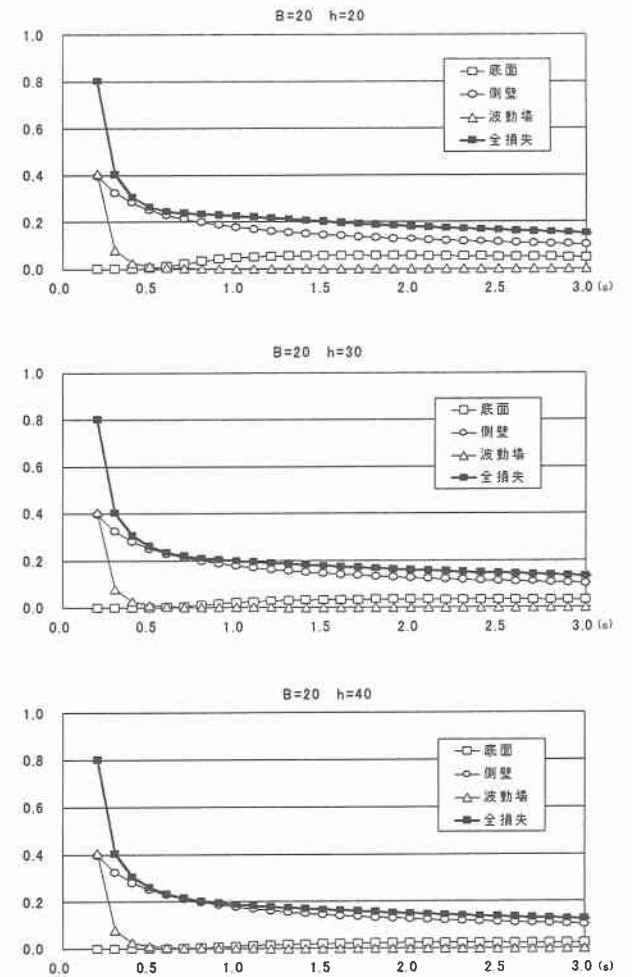


図 2 エネルギー損失 ($B = 20 \text{ cm}$)

横軸は入射周期である。水路幅は 20cm で水深は 20、30、40cm である。図 3 は水路幅を 30cm とした結果である。これらの結果から一般的に、側壁境界層でのエネルギー損

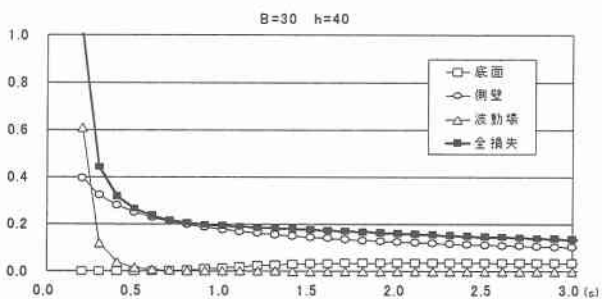
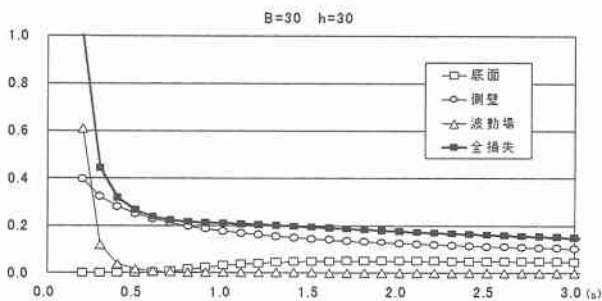
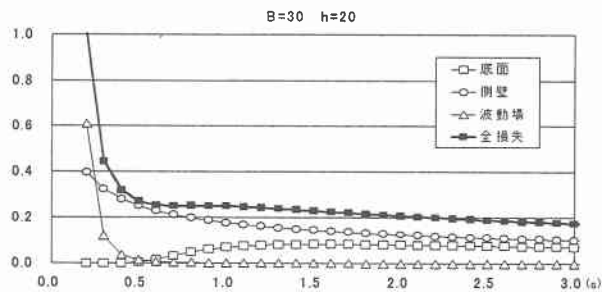


図3 エネルギー損失 (B = 30 cm)

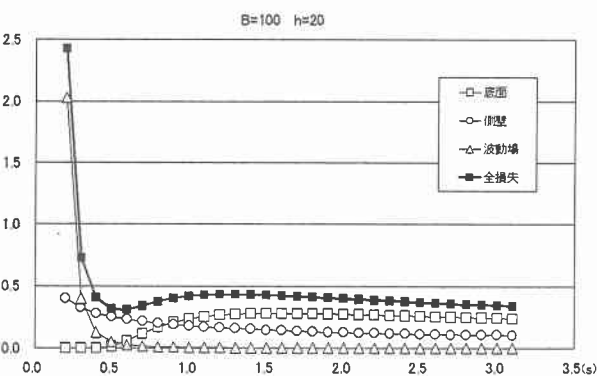


図4 エネルギー損失 (B = 100 cm)

失の寄与は、水深が深くなるほど及び周期が短くなるほど大きくなる。底面境界層での損失の寄与は周期が長くなるほど及び水路幅が広くなるほど大きくなる。さらに、波動場内でのエネルギー損失は周期が極端に小さい場合にだけ有意となる。特に、図2、図3のような幅の狭い小形の

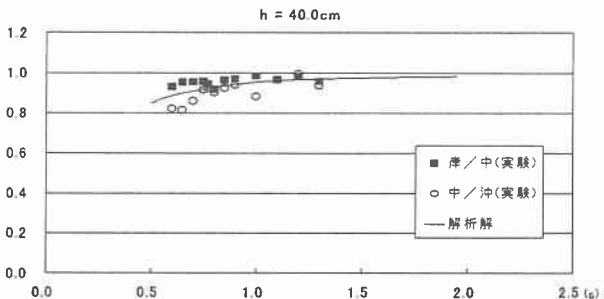
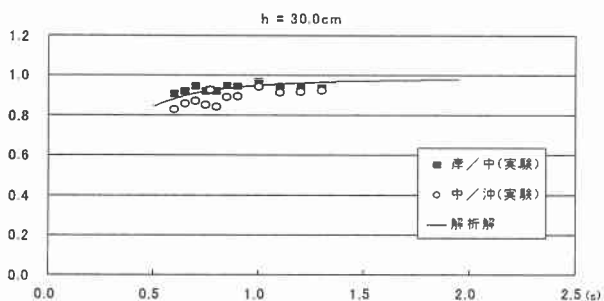
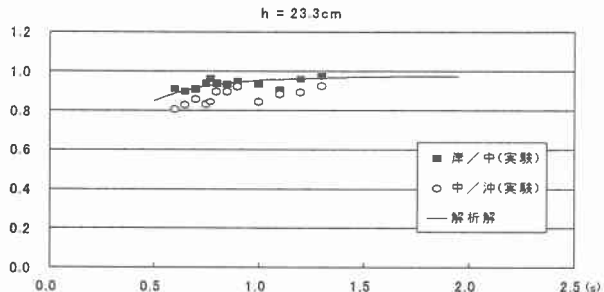


図5 波高減衰

水路で、通常実験で用いられる入射周期の範囲(0.5~1.5 s)では、大部分のエネルギー損失は側壁境界層で起こる。図4は水路幅が1 mの場合で、水路幅が広くなったため底面境界層の損失の寄与が大きくなっている。

図5は波高の減衰を実験値と比較したものである。実験水路は幅25cm、水深23.3、30、40cmである。波高の測定は3m 間隔の3箇所で行った。造波板に近いほうから沖、中、岸とし、沖と中、中と岸での波高比から波高減衰を求めている。横軸は入射周期である。実線は解析解から求めた波高減衰を表している。実験値に多少のばらつきが見られるものの、ほぼ解析値と一致しており解析の妥当性が示されている。このことから、図2、図3の結果と合わせて考えるとこの程度の水路幅の場合大部分の損失は側壁境界層で起こっていると言える。