

Kinematic wave モデルの確率応答特性 —分解能が斜面流定数に与える影響—

The probability response characteristic of a Kinematic wave model
-Influence which resolution has on a slope runoff constant-

北海道大学大学院工学研究科 ○学生員 里見佑三(Yuzoh Satomi)
北海道大学大学院工学研究科 正員 田中岳(Gaku Tanaka)

1. はじめに

近年,国土数値情報のメッシュデータを用いた模擬河道網による流出解析が頻繁に行われている.しかし,分解能を変化させることによって地形特性量にも変化が生じ,流出計算の結果に少なからず影響を与えてしまう.これに関しては,どの程度の分解能の流出計算結果までが妥当であるかという研究は多くなされているが,地形特性量の考慮まではなされていない.

そこで本研究では,豊平川上流部定山溪ダム流域の 10m メッシュの標高データを用いて,落水線をそれぞれの分解能において描き(図-1: 定山溪ダム流域, 春香沢川) 降雨の流出方向を決定し,落水線の勾配を確率変数と仮定することで,流出データを統計的に扱うことを可能にする.その上で,標高値のメッシュ分解能の変化による勾配分布の変動が流出特性に与える影響について検討する.

2. 落水線の決定方法

1. でも述べたように,流出計算をするために各分解能において落水線図を作成する.定山溪ダム流域の 10m メッシュの標高データを用いて,流域に落ちた雨水が周囲のメッシュ点 8 方向のうち最急勾配方向に流れることにし,そのメッシュ点間を結ぶ線を落水線とする.分解能を変更する場合,その流域の出口となるメッシュ点を標高が小さくかつその流域を脱出する点に設定し,その点を中心として各分解能に合わせて標高データを抽出し落水線を描く.

3. 定山溪ダム流域における各分解能の地形特性量

2. で作成した,定山溪ダム流域内の 11 の小流域における 10~100m 分解能の落水線図から得られる地形特性量(勾配の平均・分散,勾配の分布形)について比較した.

まず,勾配の平均・分散について検討する.勾配 i は次の式から求める.

$$i = \frac{(\text{標高差})}{l} \quad (1)$$

$$\text{斜面長: } l = \sqrt{(\text{地点間距離})^2 + (\text{標高差})^2}$$

その結果得られた全流域における勾配の平均・分散の比較が図-2である.ほぼ一定の割合で変化していくことがわかる.

次に勾配の分布形について,図-3で検討した.ここで,分布形を求めるために用いる統計量 β_1, β_2 は,次の式から求められる.

$$\beta_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} \quad \beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \quad (2)$$

m_n : 勾配の n 次モーメント

β_1, β_2 平面上で取る値によって,その分布がどのような分布であるか推定することができる.勾配の分布形は分解能の変化による違いがあまり大きくなく,10~100m で分布形は変わらずベータ分布となっている.

また,図-4は各流域の出口となる点の標高を全て 0m

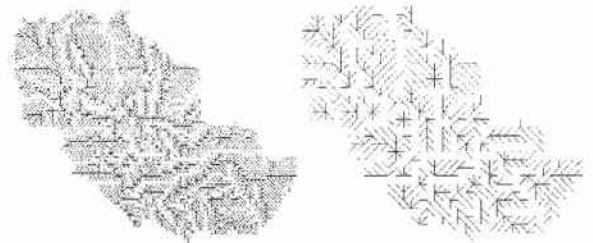


図-1 (春香沢川, 左: 100m, 右: 200m メッシュ)

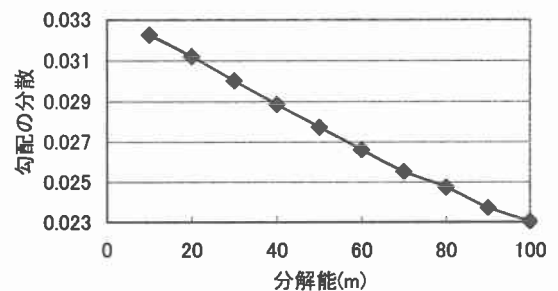
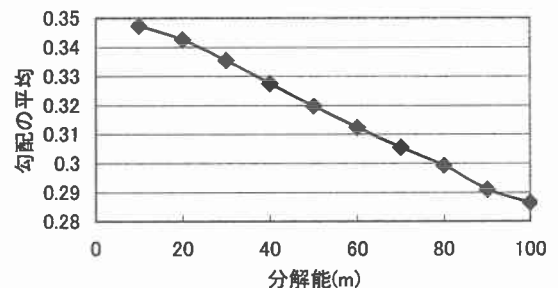


図-2 (上: 全流域の勾配の平均, 下: 勾配の分散)

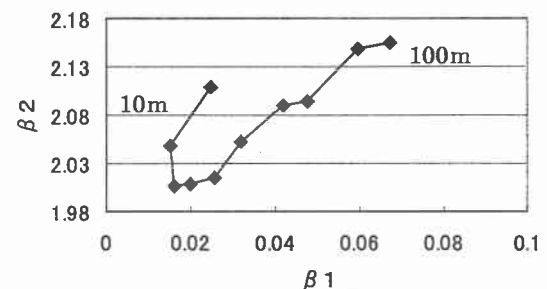


図-3 (全流域の勾配の分布形)

になるように流域全体の標高を基準化し,標高と勾配の平均・分散の関係について示したグラフである.勾配の平均は分解能の変化にそれほど大きな影響を受けず,高い標高

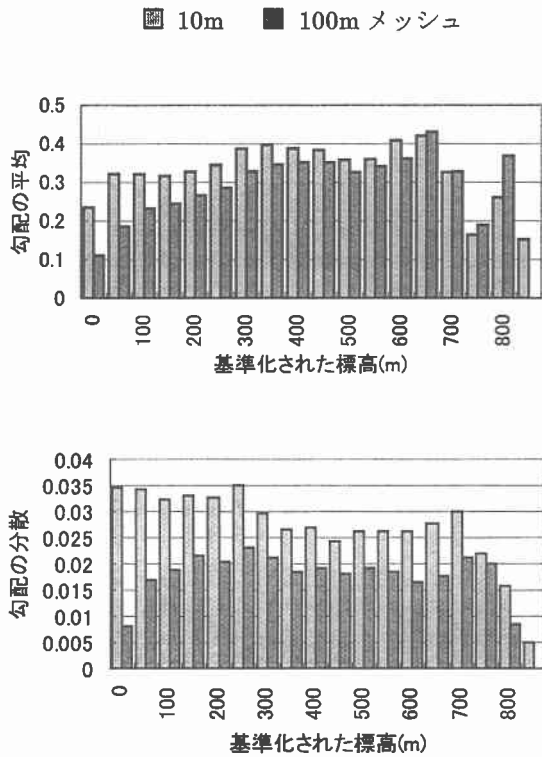


図-4 (標高と勾配の関係, 上: 平均, 下: 分散)

地点では勾配も大きくなっている。勾配の分散は、分解能の違いによるデータ数（標本数）の差から、全標高において10m 分解能の方が大きい結果になっている。また、分解能が粗くなると複雑な勾配を的確に抽出できない²⁾ため、100m 分解能では10m 分解能より分散が小さくなっている。

4. 基礎式

2. で作成した落水線に沿って、降雨が流れ出るものとして、幅、勾配、粗度とも一様な斜面における地表流に対する Kinematic wave 方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial h_i}{\partial t} = r(t) \quad (4)$$

$$(i-1)\Delta x \leq x \leq i\Delta x \quad (i=1,2,\dots,n)$$

q_i : 単位幅流量, h_i : 水深, x : 斜面上流端からの距離

t : 時間, $r(t)$: 降雨の時間関数

また、運動方程式である Manning の抵抗則を用いた流量公式より、

$$q_i = \alpha_i h_i^m \quad (5)$$

α_i, m : 斜面流定数

初期条件、境界条件は次の通りである。

初期条件 : $h_i(x, 0) = 0$

境界条件 : $h_i((i-1)\Delta x, t) = h_{i-1}, h_0 = 0$

$$(i-1)\Delta x \leq x \leq i\Delta x \quad (i=1,2,\dots,n)$$

特性曲線法で求める理論解は、式(4),(5)より、

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i m h_i^{m-1} \quad (6)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = r(t) \quad (7)$$

と求められる。降雨は時間に関係なく一定としているので、

$$r(t) = \bar{r}$$

$\bar{r}$: 降雨強度

と置き換える。 α_i は分解能の変化に影響を受ける確率変数であるので、式(6),(7)から、 x 座標軸を n 分割し、それぞれにおいて α が変化すると、分割された斜面の i 番目の水深は次式で表すことができる。

$$h_i = \left(\frac{\bar{r}l}{n\alpha_1} + \frac{\bar{r}l}{n\alpha_2} + \dots + \frac{\bar{r}l}{n\alpha_i} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (8)$$

よって、 n 分割の場合、定常状態の斜面末端水深は次の式で表される。

$$h_l = \left(\frac{\bar{r}l}{n} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (9)$$

ここで、 $z = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}$ という確率変数の変換を行うと、次の式が得られる。

$$h_l = \left(\frac{\bar{r}l}{n} \right)^{\frac{1}{m}} z^{\frac{1}{m}} \quad (10)$$

さらに、 $\alpha_i = \bar{\alpha} + \tilde{\alpha}_i$ ($\bar{\alpha}$: 平均, $\tilde{\alpha}_i$: α_i の平均との偏差), $z = \bar{z} + \tilde{z}$ ($\bar{z}$: 平均, $\tilde{z}$: z の平均との偏差), $h_l = \bar{h}_l + \tilde{h}_l$ ($\bar{h}_l$: 平均, $\tilde{h}_l$: h_l の平均との偏差) とおくと、Bras らに

よって提案された近似式 $z^{\frac{1}{m}} = a\bar{z} + b\tilde{z}$ と式(10)より、

$$\bar{h}_l + \tilde{h}_l = \left(\frac{\bar{r}l}{n} \right)^{\frac{1}{m}} (a\bar{z} + b\tilde{z}) \quad (11)$$

となる。一般に、 a, b は、

$$a = \bar{z}^{p-1} \left\{ 1 + p \frac{\tilde{z}}{\bar{z}} + \frac{1}{2} p(p-1) \frac{\tilde{z}^2}{\bar{z}^2} + \dots \right\} \quad (12)$$

$$b = \frac{\bar{z}^p}{E(\tilde{z}^2)} \left\{ p \frac{E(\tilde{z}^2)}{\bar{z}} + \frac{1}{2} p(p-1) \frac{E(\tilde{z}^3)}{\bar{z}^2} + \dots \right\} \quad (13)$$

$$p = \frac{1}{m}$$

と表される。式(11)より、

$$\bar{h}_l = \left(\frac{\bar{r}l}{n} \right)^{\frac{1}{m}} a\bar{z} \quad (14)$$

$$\tilde{h}_l = \left(\frac{\bar{r}l}{n} \right)^{\frac{1}{m}} b\tilde{z} \quad (15)$$

となる。水深の2～4次モーメントは、それぞれ $\tilde{h}_l$ の2～4乗の期待値であるから、式(15)より、

$$\sigma_h^2 = E(\tilde{h}_l^2) = \left(\frac{\bar{r}l}{n} \right)^{\frac{2}{m}} b^2 \sigma_z^2 \quad (16)$$

$$\mu_{h3} = E(\tilde{h}_l^3) = \left(\frac{\bar{r}l}{n} \right)^{\frac{3}{m}} b^3 \mu_{z3} \quad (17)$$

$$\mu_{h4} = E(\tilde{h}_l^4) = \left(\frac{\bar{r}l}{n} \right)^{\frac{4}{m}} b^4 \mu_{z4} \quad (18)$$

σ_h^2 : 斜面末端水深の分散

μ_{h3} : 3次モーメント, μ_{h4} : 4次モーメント

ここで、 $\beta = 1/\alpha$ と確率変数の変換を行うと、 $\tilde{z} = \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i$ とな

り, z の分散: σ_z^2 , 3～4 次モーメント: μ_{z3}, μ_{z4} を求めると, 次のように展開される.

$$\sigma_z^2 = E(\tilde{z}^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i \sum_{j=1}^n \tilde{\beta}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(\tilde{\beta}_i \tilde{\beta}_j) \quad (19)$$

同様に,

$$\mu_{z3} = E(\tilde{z}^3) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E(\tilde{\beta}_i \tilde{\beta}_j \tilde{\beta}_k) \quad (20)$$

$$\mu_{z4} = E(\tilde{z}^4) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E(\tilde{\beta}_i \tilde{\beta}_j \tilde{\beta}_k \tilde{\beta}_l) \quad (21)$$

ここで, β_i のキュムラント関数を求めなければならないので, β_i が独立であると仮定すると次のように表される.

$$E(\tilde{\beta}_i \tilde{\beta}_j) = \sigma_\beta^2 \delta(i-j) \quad (22)$$

$$E(\tilde{\beta}_i \tilde{\beta}_j \tilde{\beta}_k) = \mu_{\beta 3} \delta(i-j) \delta(j-k) \quad (23)$$

$$E(\tilde{\beta}_i \tilde{\beta}_j \tilde{\beta}_k \tilde{\beta}_l) = (\mu_{\beta 4} - 3\sigma_\beta^4) \delta(i-j) \delta(j-k) \delta(k-l) + \sigma_\beta^4 \{\delta(i-j) \delta(k-l) + \delta(i-k) \delta(j-l) + \delta(i-l) \delta(j-k)\} \quad (24)$$

$\delta(i)$: デルタ関数

よって, 式(19)～(24)より,

$$\sigma_z^2 = n\sigma_\beta^2 \quad (25)$$

$$\mu_{z3} = n\mu_{\beta 3} \quad (26)$$

$$\mu_{z4} = n\{\mu_{\beta 4} + 3\sigma_\beta^4(n-1)\} \quad (27)$$

となる. よって β , すなわち $1/\alpha$ の 1～4 次モーメントを与えれば, 斜面末端水深の 1～4 次モーメントを求めることができる.

5. 流出計算の結果・結論

式(12)～(14), 式(16)～(18), 式(25)～(27)によって求めることのできる斜面末端水深の 1～4 次モーメントは, Bras らによって提案された近似式を用いているため, 得られる値が正しいか確認する必要がある. 計算条件は $\bar{r}=1, l=1, n=10, m=1, \alpha$ の平均: $\bar{\alpha}=1, \alpha$ の分散: $\sigma_\alpha^2=0.01\sim 0.3$ とする.

近似式を用いた解法では, β の 1～4 次モーメントが必要となる. そこで, α が確率で表される自然現象の多くが従うとされる対数正規分布であるとする, その確率密度関数は,

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\alpha - \lambda}{\zeta}\right)^2\right\} \quad (0 \leq \alpha < \infty) \quad (28)$$

ζ, λ : 分布の特性を表すパラメーター

と表されるので, β の 1～4 次モーメントは次式のように表される.

$$\bar{\beta} = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta^2 - \lambda\right) \quad (29)$$

$$\sigma_\beta^2 = \bar{\beta}^2(e^{\zeta^2} - 1) \quad (30)$$

$$\mu_{\beta 3} = \bar{\beta}^3(e^{3\zeta^2} - 3e^{\zeta^2} + 2) \quad (31)$$

$$\mu_{\beta 4} = \bar{\beta}^4(e^{6\zeta^2} - 4e^{3\zeta^2} + 6e^{\zeta^2} - 3) \quad (32)$$

× 数値解 (特性曲線法) ——— 理論解 (近似式)

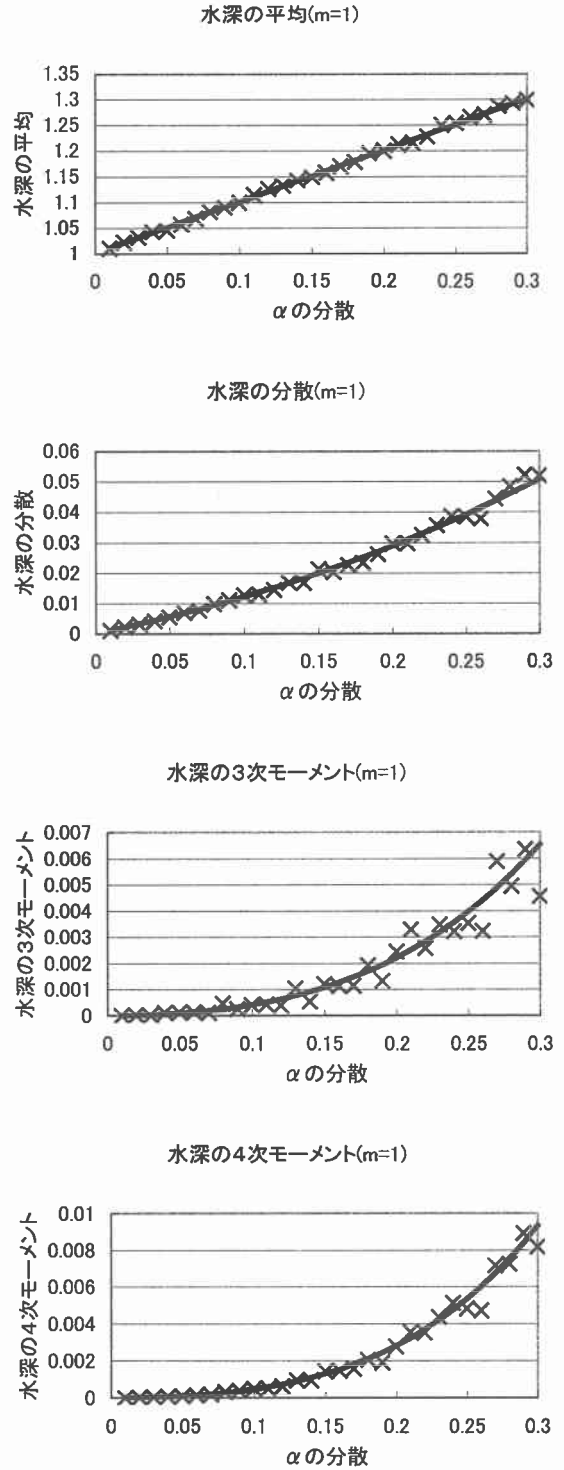


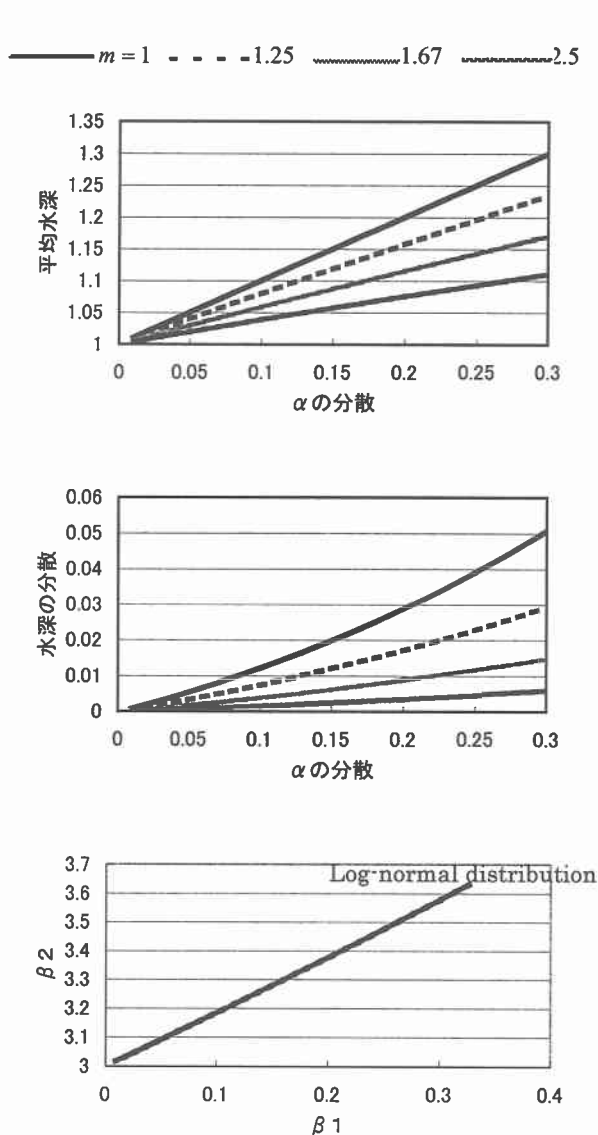
図-5 (斜面末端水深の数値解と理論解の比較)

$$\lambda = \ln \bar{\alpha} - \frac{1}{2} \quad \zeta^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_\alpha^2}{\bar{\alpha}^2}\right) \quad (33)$$

また, a は式(12)において 4 項目以降を省略, b は式(13)において 2 項目以降を省略すると,

$$a = \bar{z}^{p-1} \quad (34)$$

$$b = p\bar{z}^{p-1} \quad (35)$$



図－6（上：斜面末端水深の平均,中：分散,下：分布形）

$$p = \frac{1}{m}$$

となる。

一方、同様に対数正規分布に従う乱数として α を数値計算上で発生させて、式(9)の特性曲線法に代入して得られた数値解法を比較した結果が図－5である。1～4次モーメント全てにおいて、ほぼ一致しているという結果が得られた。

次に、計算条件($F=1, l=1, n=10, m=1, 1.25, 1.67, 2.5, \bar{\alpha}=1, \sigma_{\alpha}^2=0.01\sim 0.3$)のもとで、近似式による理論解法によって得られた結果が図－6である。 $\beta 1, \beta 2$ については、式(2)において、 m_n を水深の n 次モーメントとして求めた。

m が小さいほど斜面末端水深の平均・分散が大きくなっている。また、斜面末端水深の分布形は、 m や α の分散に関係なく対数正規分布になった。

6. 今後の課題

実流域のメッシュの標高データを用いて描いた落水線から得られる勾配を、確率変数として用いて流出解析を行う際に、分解能によって勾配の確率分布は変わらなかったが平均・分散などのパラメーターに変化が生じた。

しかし、自然現象に多いとされている対数正規分布に勾配が従うものと考えていたが、得られた勾配の分布形はベータ分布であったので、今後ベータ分布について検討をしなければ、流出計算まで到達できない。

ただ、斜面流定数が確率変数の場合、流出計算結果を統計的に扱うことができ、その分布形・平均・分散がわかれば、どのような確率分布の形になるか容易に判断することができる。

今後は分解能の変化によって生じる、勾配の様々な確率分布に対応しながら、それらが流出計算結果にどのように影響を及ぼすか、統計的に解析していきたい。

参考文献

- 1) Bras, R.L. and K.P. Georgakakos : Real time non-linear filtering techniques in streamflow forecasting, a statistical linearization approach, Proc. of the third international symposium on stochastic hydraulics, Tokyo, Japan, 1980
- 2) 小口高、勝部圭一：細密 DEM を用いた地形解析、『デジタル観測手法を統合した里山の GIS 解析 ―東京大学空間情報科学研究センター公開シンポジウム―』、杉盛啓明ほか編、地域環境 GIS 研究会、15・18、2000