

ピーク流量算出法に関する研究

The method of computing the peak discharge

北海道大学大学院工学研究科 ○学生員 岡田博至(Hiroyuki Okada)
北海道大学大学院工学研究科 正員 田中岳(Gaku Tanaka)

1. はじめに

治水計画を設定するうえで重要なデータとなるのは洪水を発生させると考えられるピーク流量の値である。それを求めるための方法としては降雨から流出ハイドログラフを算定し、ピーク流量を推定する方法が最も明確な方法と考えられる。しかし、そのためには降雨開始から流量を追跡しなければならない。そのため、簡潔にピーク流量を算出するための方法としてこれまでピーク流量を発生させる降雨が斜面を伝達する時間である洪水到達時間を kinematic wave モデルの特性曲線法を適用して考え、合理式によってピーク流量を推算する方法が検討されている。^{1) 2)}

ピーク流量やそれを発生する時刻または洪水到達時間は降雨強度や降雨継続時間または地形特性量などの数多くの複雑な要因が絡み合っている。これらの要因についての関係を満足させるような方法でなければ実現象において意味をなさなくなってしまう。

今回は、それらの要因についての関係を考慮し、さらに簡潔にピーク流量を算出する方法として kinematic wave モデルの周波数応答特性を用いて流出量を算出するモデルを検討していった。

2. インパルス応答関数を用いた流出量算出モデル

斜面流に対する kinematic wave モデルの基礎方程式は(1)、(2)式のように表わされる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \quad (1)$$

$$h = \varepsilon q^p \quad (2)$$

ただし、 $0 \leq x \leq l$ の区間で適用でき、 h : 水深、 q : 単位幅流量、 t : 時間、 x : 斜面の長さ、 r : 有効降雨強度、 ε, p : 斜面係数、 l : 斜面長とする。

田中ら³⁾は流出モデルの周波数応答特性の検討を行っている。Kinematic wave モデルについて流出量を算出する式は $p=1$ の場合は次の(3)、(4)のように与えられる。

$$q(x, t) = \int_0^t r(\tau) J(x, t - \tau) d\tau \quad (3)$$

$$J(x, t) = \frac{1}{\varepsilon} (U(t) - U(t - \varepsilon x)) \quad (4)$$

ここで、 $U(t)$: ステップ関数、 $J(x, t)$: インパルス応答関数である。

しかし、 $p \neq 1$ のときにはこのように容易に流出量を算出することはできない。そのため、 $p \neq 1$ のときは以下のような方法で流出量の計算を行なう。

いま、降雨量 $r(t)$ を(5)式、流出量 $q(x, t)$ を(6)式のように平均値 $\bar{r}, \bar{q}$ 、平均値からの変動 $\tilde{r}e^{i\omega t}, \tilde{q}e^{i\omega t}$ を用いた複素正弦状波で表わした。

$$r(t) = \bar{r} + \tilde{r}e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$q(x, t) = \bar{q} + \tilde{q}e^{i\omega t} \quad (6)$$

ただし、 ω : 角振動数とする。

(1)式に(2)式を代入すると(7)式ようになる。

$$\frac{\partial(\varepsilon q^p)}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad (7)$$

q^p は展開した際に高次の $(\frac{\tilde{q}}{\bar{q}})$ を含む項は微小な値となるので省略して(8)式のように近似している。

$$q^p \cong \bar{q}^p (1 + p \frac{\tilde{q}}{\bar{q}} e^{i\omega t}) \quad (8)$$

(7)式に(5)、(6)、(8)式を代入して計算を行なう。

$$\frac{\partial \left[\varepsilon \bar{q}^p \left(1 + p \frac{\tilde{q}}{\bar{q}} e^{i\omega t} \right) \right]}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{q} + \tilde{q}e^{i\omega t})}{\partial x} = \bar{r} + \tilde{r}e^{i\omega t} \quad (9)$$

(9)式を平均値に関する式と変動に関する式に分けると(10)、(11)式となる。

$$\frac{d\bar{q}}{dx} - \bar{r} = 0 \quad (10)$$

$$(i\varepsilon \omega p \bar{q}^{p-1} \tilde{q} + \frac{d\tilde{q}}{dx} - \tilde{r})e^{i\omega t} = 0 \quad (11)$$

(10)、(11)式を積分すると(12)、(13)となる。

$$\bar{q} = rx \quad (12)$$

$$\tilde{q} = e^{-i\varepsilon \omega r^{p-1} x^p} \int_0^x \tilde{r} e^{i\varepsilon \omega r^{p-1} x_1^p} dx_1 \quad (13)$$

(13)式を用いて(1)、(2)式の周波数伝達関数 H を表わした。また、次元を合わせるために斜面長 x を分母にかけたものが H_x であり、以下の(14)式で表わされる。

$$H_x = \frac{H}{x} = \left| \frac{\tilde{q}}{\tilde{r}x} \right| = \frac{1}{x} e^{-i\varepsilon \omega r^{p-1} x^p} \int_0^x e^{i\varepsilon \omega r^{p-1} x_1^p} dx_1 \quad (14)$$

インパルス応答関数と周波数伝達関数とは Fourier 変換対をなすので、周波数伝達関数を Fourier 逆変換行なうことによってインパルス応答関数を求めることができる。(14)式について Fourier 逆変換を表わす式は(15)式のように表わされる。

$$J_x(x, t) = \frac{J}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-i\varepsilon \omega r^{p-1} x^p} \int_0^x e^{i\varepsilon \omega r^{p-1} x_1^p} e^{i\omega t} dx_1 d\omega \quad (15)$$

(15)式を計算することによって $p \neq 1$ のときのインパルス応答関数を求めることができる。その結果が(16)式である。

$$J_x(x, t) = \frac{1}{x} m \alpha r^{-m-1} (t_{cx} - t)^{m-1} (U(t) - U(t - t_{cx})) \quad (16)$$

また、 $m = \frac{1}{p}$ $\alpha = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}$ であり t_{cx} とは到達時間と呼ばれ、

平均降雨 $\bar{r}$ が時間的に変化しないときに $t=0$ のとき $x=0$ の地点を出発した特性曲線が斜面長 x に到達した時間のことであり、(17)式で求めることができる。

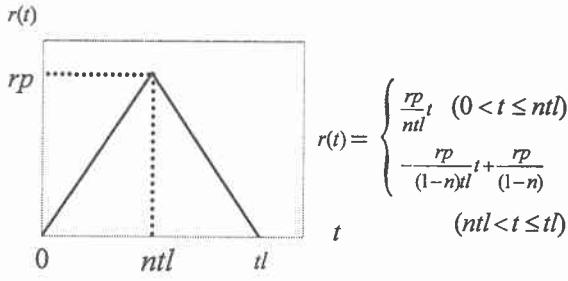


図-1 降雨強度の時間変化
 t_l : 降雨継続時間 n : ピーク雨量に達する時間 降雨継続時間
 r_p : ピーク雨量

図-1 降雨強度の時間変化

$$t_{cx} = \left(\frac{-m-1}{\alpha} x_1 \right)^{1/m} \quad (17)$$

このように $p \neq 1$ のとき(3)、(16)式を用いると流出量を求めることができる。また、(16)式に $p=1$ を代入すると(4)式と一致することから $p=1$ の場合でも成立することがわかる。

3. ピーク流量とピーク流量発生時刻の算出法

3.1 降雨強度の時間変化

降雨強度の時間変化を表わす式については、降雨波形を簡単な図形として表わすために三角波形に仮定して解析を行なった。その詳細は図-1 で示すとおりであるが、ピーク雨量を発生させる時刻は降雨継続時間 t_l との比 n を用いて表わしている。

3.2 流量を算出する式

3.1 章で定義した降雨の時間変化を表わす式と(16)式で示されているインパルス応答関数とをたたみこみ積分を行うことによって以下の(18)～(25)式によって流出量を算出することができる。

$$\text{i) } t \leq n t_l \quad t \leq t_{cx} \text{ の場合} \quad q(t) = r_1 \{ (m+1)t_2 - t_1 + t_4 \} \quad (18)$$

$$\text{ii) } t \leq n t_l \quad t_{cx} < t \text{ の場合} \quad q(t) = r_1 \{ (m+1)t_2 - t_1 \} \quad (19)$$

$$\text{iii) } n t_l < t \leq t_l \quad t \leq t_{cx} \text{ の場合} \quad q(t) = r_3 \{ n(m+1)t_3 + n t_1 + (1-n)t_4 - t_5 \} \quad (20)$$

$$\text{iv) } n t_l < t \leq t_l \quad t_{cx} < t \leq n t_l + t_{cx} \text{ の場合} \quad q(t) = r_3 \{ n(m+1)t_3 + n t_1 - t_5 \} \quad (21)$$

$$\text{v) } n t_l < t \leq t_l \quad n t_l + t_{cx} < t \text{ の場合} \quad q(t) = r_2 \{ (m+1)t_3 + t_1 \} \quad (22)$$

$$\text{vi) } t_l < t \quad t \leq t_{cx} \text{ の場合} \quad q(t) = r_3 \{ n t_6 + (1-n)t_4 - t_5 \} \quad (23)$$

$$\text{vii) } t_l < t \quad t_{cx} < t \leq n t_l + t_{cx} \text{ の場合} \quad q(t) = r_3 \{ n t_6 - t_5 \} \quad (24)$$

$$\text{viii) } t_l < t \quad n t_l + t_{cx} < t \text{ の場合} \quad q(t) = r_2 t_6 \quad (25)$$

また、

$$r_1 = \frac{\bar{\alpha}^{m-1} r_p}{n(m+1)t_l} \quad (26)$$

$$r_2 = \frac{\bar{\alpha}^{m-1} r_p}{(1-n)(m+1)t_l} \quad (27)$$

$$r_3 = \frac{\bar{\alpha}^{m-1} r_p}{n(1-n)(m+1)t_l} \quad (28)$$

$$t_1 = t_{cx}^{m+1} \quad (29)$$

$$t_2 = t t_{cx}^{m+1} \quad (30)$$

$$t_3 = (-t + t_l) t_{cx}^m \quad (31)$$

$$t_4 = (t_{cx} - t)^{m+1} \quad (32)$$

$$t_5 = (t_{cx} - t + n t_l)^{m+1} \quad (33)$$

$$t_6 = (t_{cx} - t + t_l)^{m+1} \quad (34)$$

とする。

3.3 ピーク流量とピーク流量発生時刻

次に、ピーク流量とそれが発生する時刻を検討するため(27)～(34)式をそれぞれ微分することによって t の範囲による流出量 q の増減を調べた。

その結果、(21)式が当てはまる場合は $dq/dt=0$ となる t の値が存在する。このときの t がピーク流量発生時刻 t_p となり、(35)式で表わされる。そして、(35)式を $t=t_p$ として(21)式に代入すると(36)式によりピーク流量 q_p を算出することができる。さらにピーク雨量発生時刻とピーク流量発生時刻との差 t_{lp} は(35)式を用いると(37)式のように表わされる。

$$t_p = (1 - n^{1/m}) t_{cx} + n t_l \quad (35)$$

$$q_p = \frac{\bar{\alpha}^{m-1} r_p}{n(1-n)(m+1)t_l} \{ n(m+1)(-t_p + t_l) t_{cx}^m + n t_{cx}^{m+1} - (t_{cx} - t_p + n t_l)^{m+1} \} \quad (36)$$

$$t_{lp} = (1 - n^{1/m}) t_{cx} \quad (37)$$

4. パラメータによるピーク流量とピーク流量発生時刻への影響

4.1 kinematic wave モデルの無次元化

ピーク流量発生時刻 t_p とピーク流量 q_p は(35)、(36)式を用いて求めることができるが、それらの式の中には幾つかのパラメータが存在する。

パラメータの比較を容易に行うために(1)、(2)式の kinematic wave 方程式を無次元化し、パラメータの数を減らした。無次元化は以下の方法によって行う。

$$(1), (2) \text{ 式を無次元化する際に以下の関係を用いた。} \quad t = t_* T \quad x = x_* X \quad h = h_* H \quad q = q_* Q \quad r = r_* R \quad (38)$$

また、小文字：実際の量、*印：無次元化基準量、大文字：無次元量を表わす。

ここでは、降雨の無次元化基準量を平均降雨 ($r_* = \bar{r}$)、時間の基準量を到達時間 ($t_* = t_{cx}$) とおいた。また、今回は降雨波形を三角形と仮定しているため、ピーク雨量は平均降雨の2倍とおくことができる。

その他のパラメータも降雨と時間の基準量を踏まえて無次元化基準量を設定した。これらの基準量をまとめたものが(39)式である。

$$t_* = t_{cx} \quad x_* = \bar{\alpha}^{m-1} t_{cx}^m \quad h_* = \bar{r} t_{cx} \quad q_* = \bar{\alpha}^m t_{cx}^m \quad r_* = \bar{r} \quad (39)$$

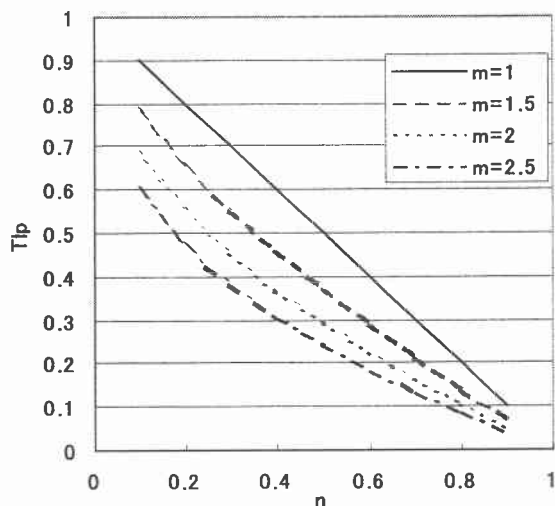


図-2 n と T_{lp} との関係

(38)、(39)式を用いて(1)、(2)式を無次元化した式が以下の(40)、(41)式である。

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R(T) \quad (40)$$

$$Q = H^m \quad (41)$$

そして、ピーク流量発生時刻やピーク流量、さらにピーク雨量発生時刻とピーク流量発生時刻との差を算出する式である(35)～(37)式も同様に無次元化を行なうと(42)～(44)式で表わされる式となる。

$$T_p = (1 - n^{1/m})T_{cx}^m + nT_l \quad (42)$$

$$Q_p = \frac{\bar{R}^{m-1}R_p}{n(1-n)(m+1)T_l} \{ n(m+1)(-T_p + T_l)T_{cx}^m + nT_{cx}^{m+1} - (T_{cx} - T_p + nT_l)^{m+1} \} \quad (43)$$

$$T_{lp} = (1 - n^{1/m})T_{cx}^m \quad (44)$$

また、無次元化を行なった結果、 $T_{cx} = 1$ 、 $\bar{R} = 1$ 、 $R_p = 2$ と表わすことができる。

4.2 n との関係

降雨継続時間とピーク雨量の発生する時刻との比である n は降雨波形の形状を決める際に重要なパラメータである。ここでは n と T_{lp} や Q_p との関係を検討していった。また、 m の値を $m=1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ として比較を行なった。図-2 は n と T_{lp} との関係を表したものである。また、 T_{lp} の値は降雨継続時間 T_l の条件に関わらず同じ値をとることを確認している。

この図から、いずれの m の場合も n の値が増加するにつれ T_{lp} の値は減少することがわかる。これは、ピーク雨量の発生時刻が降雨の開始よりも遅くなるにつれピーク雨量発生時刻からピーク流量発生時刻までの時間が短くなるということである。また、 m の値が大きくなるにつれ、いずれの n の場合でも T_{lp} の値が小さくなることもわかる。

次に、 n と Q_p との関係を $T_l=2.0, 5.0, 10.0$ の場合について比較を行なった。それを示したものが図-3 である。

この図からわかることは、 T_l の値が大きくなるにつれていずれの n の場合でも Q_p の値が大きくなっていることがわかる。また、いずれの T_l の場合でも $m=1$ の場合は n

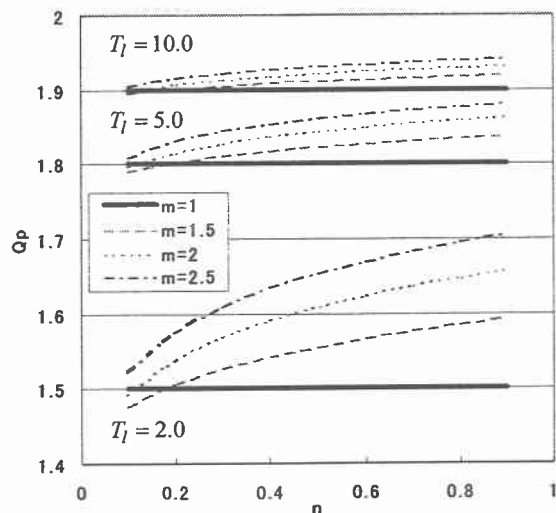


図-3 n と Q_p との関係

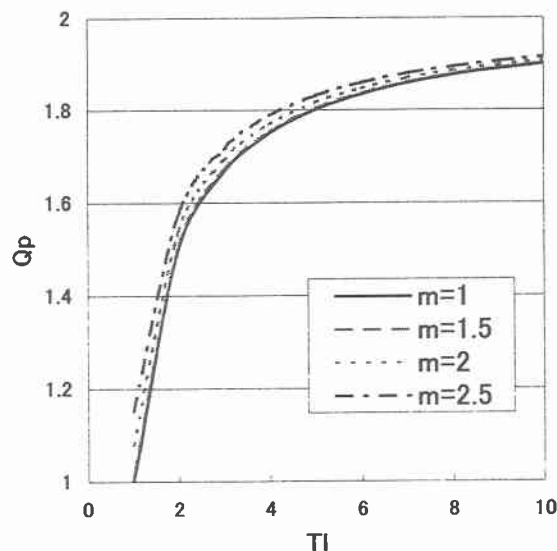


図-4 T_l と Q_p との関係 ($n=0.2$ の場合)

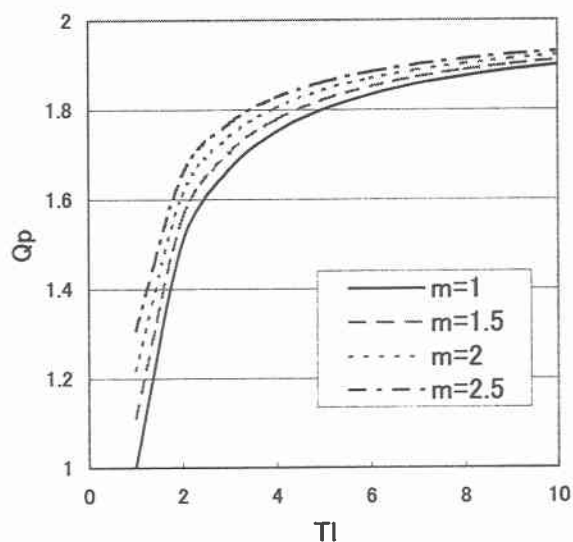


図-5 T_l と Q_p との関係 ($n=0.5$ の場合)

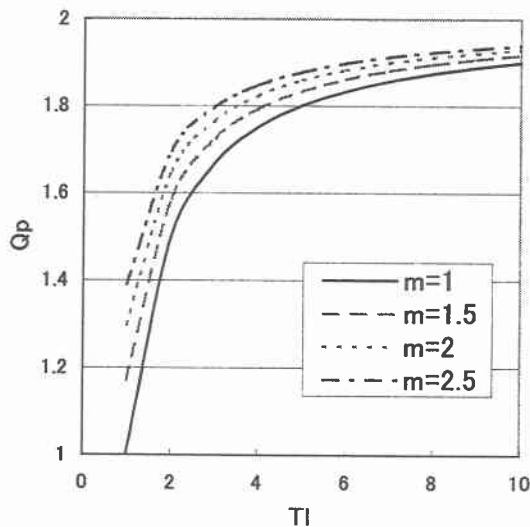


図-6 T_l と Q_p との関係 ($n=0.8$ の場合)

の値に関係なく一定の値をとるのに対して、 $m \neq 1$ の場合は n の値が増加するにつれ Q_p の値が増加することがわかる。また、 m の値が大きくなるにつれ同じ n の値の場合での Q_p の値が大きくなることもわかる。

T_p との比較の結果からをあわせると降雨のピークが遅くなるにつれピーク雨量を示した後に早い時刻で大きなピーク流量を発生するという状態を発生させるということがわかる。

4.3 T_l との関係

次は、降雨継続時間 T_l との関係を検討していった。4.2 章で T_p の値は T_l の条件に問わず一定であるということが明らかになっているので、ここでは T_l と Q_p との関係を検討していった。その結果を示したものが図-4~6 である。

この結果から、いずれの m の場合も Q_p の値は T_l の値の増加するにつれ対数関数的に増加して $Q_p=2.0$ に近似するように見える。また、 m の値が大きくなるにつれ Q_p の値は大きくなることがわかる。また、 n の値が小さいと同じ T_l の場合での Q_p の値は m の変化の影響を受けないが n の値が大きくなると m の値によって Q_p の値に影響を与える。

5. ピーク流量算出法の応用

(36)式によるピーク流量算出法を応用して斜面・降雨条件から直接ピーク流量を求める方法について検討を行なう。

ピーク流量発生時刻を算出する(35)式を(36)式に代入すると(45)式のように表わされる。また、降雨波形を三角形とれているのでピーク雨量は $r_p = 2\bar{r}$ とおくことができる。

$$q_p = \frac{2\alpha \bar{r}^m}{n(1-n)(m+1)t_l} t_{cx}^m \left\{ m(n^{1/m} - 1)t_{cx} + (1-n)(m+1)t_l \right\} \quad (45)$$

(45)式に到達時間を求める式である(17)式を代入すると(46)式のように表わされる。

$$q_p = \frac{2\bar{r}x}{(1-n)(m+1)t_l} \left\{ m(n^{1/m} - 1) \frac{\bar{r}^{1-m} x^m}{\alpha^m} + (1-n)(m+1)t_l \right\} \quad (46)$$

(46)式を斜面に関する項を S 、時間に関する項を T とまとめると(47)式のようにまとめられる。

$$q_p = 2\bar{r}^{1/m} (ST + r^{\frac{m-1}{m}} x) \quad (47)$$

ただし、 $S = \frac{m}{m+1} \left(\frac{x^{m+1}}{\alpha} \right)^{1/m}$ $T = \frac{n^{1/m} - 1}{(1-n)t_l}$ とする。

このように(47)式を用いると平均降雨、斜面長や斜面係数、降雨継続時間といった条件を直接用いてピーク流量を算出することができる。

6. まとめ

今回は、kinematic wave モデルについての周波数応答特性を用いて流出量を算出する方法からピーク流量を求める方法について検討していった。

その結果、ピーク流量やそれを発生させる時刻を算出する式を求めることが出来た。また、式に含まれるパラメータの影響を検討することによって降雨継続時間が長いあるいは降雨のピークが降雨の終わりに近づくにつれピーク降雨発生時刻からピーク流量発生時刻までの時間が短くなり、ピーク流量も大きくなるということがわかった。

しかし、このピーク流量算出法は降雨強度や降雨継続時間といった降雨条件や斜面地形量などの斜面条件の関係を考慮した方法であるが実際の河川で用いるためにはまだ検討すべき課題も少なくない。

そのため、今回は1斜面の場合のみについて検討を行ってきたが、2斜面1河道で構成された流域さらにはそれらが組み合わさった流域モデルについても適用できるようにピーク流量を算出する方法の検討を行っていきたい。

7. 参考文献

- 1) 石原藤次郎、高棹琢馬：単位図法とその適用に関する基礎的研究、土木学会論文集、第60号別冊3-3、1959
- 2) 神田徹、前田徹哉：非定常降雨による斜面流の伝播時間、第30回水理講演会論文集、pp49-54、1986
- 3) 田中岳、藤田陸博、Luai Hamouda、工藤睦矩：拡張された周波数応答法の流出モデルへの応用、水工学論文集第42巻、pp181-186、1998