

モーメント法に基づく遅れ系パラメータの同定とその解析

Analysis of the Delay System Based on Moment Method

北海道大学工学部土木工学科 ○学生員 眞島健治 (Kenji Mashima)

北海道大学大学院 フェロー 藤田睦博 (Mutsuhiro Fujita)

1 はじめに

一般に、伝達関数や周波数伝達関数の手法が線形系における系の動特性を記述するために広く用いられていることはよく知られている。しかし、非線形系になると線形系の解析に威力を発揮したこれらの手法は全く無力である。唯一、非線形系の動特性を解析するために等価周波数伝達関数を用いている例として挙げられるのは、制御工学の分野における不動帯要素、飽和要素や履歴要素などの非線形要素の動特性解析である。これは、入力信号を周期関数に限定して得られた出力信号を介して、非線形要素の特性を記述するものであるが、藤田ら¹⁾は等価周波数伝達関数の概念を拡張して降雨～流出系を記述する各種の非線形分布定数系の微分方程式の等価周波数伝達関数を求める手法を提示している。その手法とは、降雨・流出量間の等価周波数伝達関数を誘導し、得られた等価周波数伝達関数が2～3次遅れ系で近似できることを示し、任意の形状の河道網流域における遅れ系パラメータを求めるというものであり、ここではそれをモーメント法と呼んでいる。

以上を踏まえて本研究では、実流域における流出解析を行う。まず、降雨・流出量の実測データを基に等価周波数伝達関数を導出する。それをモーメント法を用いた再現計算結果と比較検討し、その精度を確認する。

2 基礎理論(モーメント法)による係数の同定

$$Z(j\omega, \bar{r}) = \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (1)$$

$$Q(j\omega) = \int_0^{\infty} q(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

$$R(j\omega) = \int_0^{\infty} r(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

j : 虚数単位 ω : 周波数

$q(t)$: 直接流出量 $r(t)$: 有効雨量

式(1)は線形流出系の周波数伝達関数の定義式に類似している。藤田・Luai によると、非線形系の場合には等価周波数伝達関数が入力である降雨量の平均値にも依存している。そのため式(1)のように $Z(j\omega, \bar{r})$ と記述している。

すなわち、降雨～流出系が非線形の場合 $Z(j\omega, \bar{r})$ は ω と $\bar{r}$ (平均降雨量) の関数であり、式(4)の周波数伝達関数により近似できると仮定し、係数 G_1, G_2, G_3 を同定する。

$$G_1 \frac{d^3 q}{dt^3} + G_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + G_3 \frac{dq}{dt} + q = r(t) \quad (4)$$

$$\left[\frac{d^n q}{dt^n} \right]_{t=0} = 0 \quad n = 0, 1, 2 \quad (5)$$

式(4)の周波数伝達関数は次式(6)で定義される。

$$Z_q(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega^2 G_2 - j\omega \cdot (\omega^2 G_1 - G_3)} \quad (6)$$

$Z_q(j\omega)$ が等価周波数伝達関数 $Z(j\omega, \bar{r})$ を近似していると仮定する。そしてまた、 $Z_q(j\omega)$ のインパルス応答関数 $z_q(t)$ が $Z(j\omega, \bar{r})$ のインパルス応答関数 $z(t)$ を近似しているとする。

ここで、次式(7)で表されるモーメント定理を考慮する。

$$\left[\frac{d^n Z_q(j\omega)}{d\omega^n} \right]_{\omega=0} = (-j)^2 m_n \quad m_n = \int_0^{\infty} t^n z_q(t) dt \quad (7)$$

上式(7)の m_n はインパルス応答関数 $z_q(t)$ の n 次モーメントを表している。

式(6)、(7)より、次の式(8)、(9)、(10)を導出できる。

$$\left[\frac{dZ_q(j\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=0} = -jG_3 \quad (8)$$

$$\left[\frac{d^2 Z_q(j\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} = 2(G_2 - G_3^2) \quad (9)$$

$$\left[\frac{d^3 Z_q(j\omega)}{d\omega^3} \right]_{\omega=0} = 6j \cdot (G_1 - 12G_2G_3 + 6G_3^2) \quad (10)$$

一方、 $z_q(t)$ が $z(t)$ を近似しているとしたのであるから、 $z_q(t)$ の n 次モーメントも同様に $z(t)$ の n 次モーメントを近似していると考ええる。

$$\left[\frac{d^n Z_q(j\omega)}{d\omega^n} \right]_{\omega=0} = \left[\frac{d^n Z(j\omega)}{d\omega^n} \right]_{\omega=0} \quad n = 1, 2, 3 \quad (11)$$

式(8)～(11)より式(12)、(13)、(14)を得る。

$$G_3 = -\frac{1}{j} \left[\frac{dZ(j\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=0} \quad (12)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 Z(j\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} + G_3^2 \quad (13)$$

$$G_1 = \frac{1}{6j} \left[\frac{d^3 Z(j\omega)}{d\omega^3} \right]_{\omega=0} + 2G_2G_3 - G_3^3 \quad (14)$$

ここで、式(1)の等価周波数伝達関数 $Z(j\omega, \bar{r})$ を $Z(j\omega)$ であると考えるならば下記の式(15)～(19)を誘導できる。

$$\left[\frac{dZ(j\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=0} = -j \cdot (I_{r,1} - I_{q,1}) \quad (15)$$

$$\left[\frac{d^2 Z(j\omega)}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} = I_{r,2} - 2I_{r,1}^2 + 2I_{r,1}I_{q,1} - I_{q,2} \quad (16)$$

$$\left[\frac{d^3 Z(j\omega)}{d\omega^3} \right]_{\omega=0} = j \cdot (I_{q,3} - 3I_{q,2}I_{r,1} + 6I_{q,1}I_{r,1}^2 - 6I_{r,1}^3 - 3I_{q,1}I_{r,2} + 6I_{r,1}I_{r,2} - I_{r,3}) \quad (17)$$

$$I_{r,n} = \int_0^{\infty} \frac{t^n r(t)}{S_q} dt \quad I_{q,n} = \int_0^{\infty} \frac{t^n q(t)}{S_q} dt \quad n = 1, 2, 3 \quad (18)$$

$$S_q = \int_0^{\infty} r(t) dt = \int_0^{\infty} q(t) dt \quad (19)$$

式(19)において $r(t)/S_q$, $q(t)/S_q$ は正值で、区間 $[0, \infty]$ の積分値は 1 になっているため $I_{r,n}$, $I_{q,n}$ は確率密度関数における原点の回りの n 次モーメントに相当している。

式(12)~(17)より次式(20), (21), (22)を得る。

$$G_1 = \frac{1}{6} G_3^3 \left\{ 1 + \frac{J_{q,3} - J_{r,3}}{G_3^2} - \frac{3(J_{q,2} - J_{r,2})}{G_3^2} \right\} \quad (20)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} G_3^2 \left\{ 1 + \frac{J_{q,2} - J_{r,2}}{G_3^2} \right\} \quad (21)$$

$$G_3 = I_{q,1} - I_{r,2} \quad (22)$$

$$J_{r,n} = \frac{1}{S_q} \int_0^{\infty} (t - I_{r,1})^n r(t) dt \quad n = 1, 2, 3 \quad (23)$$

$$J_{q,n} = \frac{1}{S_q} \int_0^{\infty} (t - I_{q,1})^n q(t) dt \quad n = 1, 2, 3 \quad (24)$$

式(23), (24)に関して, $J_{r,n}$, $J_{q,n}$ は規格化されたハイドログラフ, ハイエトグラフの重心時間回りの n 次モーメントを示している。 G_3 は時間の次元を有する係数で、降雨量と流出量の重心時間差になっている。 G_2 は時間の 2 乗の次元を持つ係数で、降雨量と流出量の重心時間差以外に 2 次モーメントが関与し、 G_1 は更に降雨量と流出量の 3 次モーメントが関与していることがわかる。すなわち、 G_3 は降雨量と流出量の図心時間を表わすパラメータで、 G_2 は降雨量と流出量の広がりや扁平度を表わすパラメータになっている。また、 G_1 は降雨量と流出量の非対称性や歪を表わすパラメータになっている。

式(20)~(22)で与えられる G_1, G_2, G_3 の同定法を、ここではモーメント法と呼ぶ。この手法で同定された係数 G_1, G_2, G_3 は 2, 3 階微分方程式の共通の係数になっている。2 階微分方程式は式(26)の通りである。また 2, 3 階微分方程式の Gain, 時間遅れは式(27), (28)に表わす。

$$G_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + G_3 \frac{dq}{dt} + q = r(t) \quad \left[\frac{d^n q}{dt^n} \right]_{t=0} = 0 \quad n = 0, 1 \quad (26)$$

$$G(\omega) = |Z(j\omega, \bar{r})| \quad (27)$$

$$T_L(\omega) = -\frac{\text{Arg}\{Z(j\omega, \bar{r})\}}{\omega} \quad (28)$$

3 等価周波数伝達関数に基づく実測資料の評価

モーメント法では、式(1)の等価周波数伝達関数を計算することなく係数 G_1, G_2, G_3 を同定することが出来る。

しかし、式(1)の等価周波数伝達関数には $r(t), q(t)$ に含まれる全ての誤差が集約されているため、まず式(1)の等価周波数伝達関数を求め、 $r(t) \sim q(t)$ の対応関係の良否を確認することが必要である。含まれる誤差としては、観測誤差、直接流出量の分離に伴う誤差、流域平均雨量の推定誤差、有効雨量算定時の誤差、そしてさらに、これらの誤差が出水ごとに異なることなどが考えられている。

実測値を用いた計算では、等価周波数伝達関数のベクトル軌跡が高周波数領域で乱れるものがある。すなわち、高周波数領域の挙動を解析することによって $r(t) \sim q(t)$ の対応関係に含まれる誤差の程度を検知できる可能性が

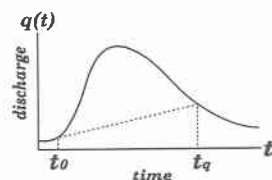
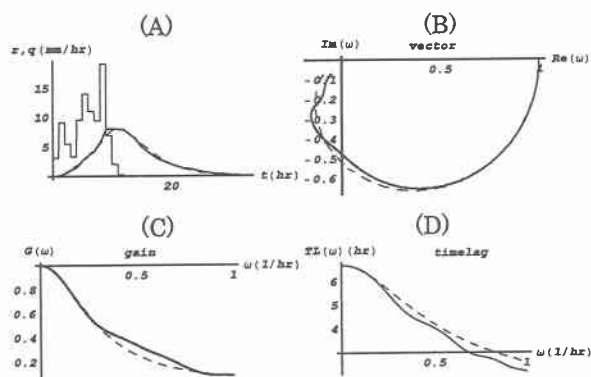


図-1 直接流出量の分離



実線：実測資料 点線：2 階微分方程式による結果

図-2 1992/08/09 鶴川水系稲里

あると考えられる。河川の特値としては Gain, 時間遅れなどがあるが、本研究では高周波数領域の挙動を解析、判断するために、主に Gain の挙動に注目してみる。

下記の式は Gain と時間遅れを表わしたものである。

3. 1 評価方法

まず、直接流出量は図-1 に示すように流出の立ち上がり時刻 t_0 と減水部の第 2 折曲点 t_q を結んで分離した。しかし、実測データの解析では、この t_q を 1 点に決めることが難しいため、16 時間の幅を持たせて計算した。取り出した各 t_q により多少ベクトル軌跡の形状に違いは出るものの、誤差が多く含まれているとされるデータでは、どの t_q を取り出してもベクトル軌跡に乱れが出ることが分かった。ここで、もう一つ注目したいことは、 t_q を可能な限り完全降雨終了後で取り出したことである。

また、有効雨量に関しては $t_0 \sim t_q$ 間の降雨量に一定の流出率を乗じて求めた。

図-2 では解析結果の 1 例を示している。(A)の実線は実測資料を示している。また、(B),(C),(D)の実線は実測資料より求めたベクトル軌跡, Gain, 時間遅れを表わしている。破線は式(21),(22)より計算される係数 G_2, G_3 を式(26)に適用して求めたベクトル軌跡, Gain, 時間遅れを示している。すなわち、図-2 では式(26)によって実測資料を説明できることを表わしている。

3. 2 Gain による評価

先に述べたように、本研究ではまず Gain の挙動に注目して解析を進めている。

周知のように、2 階微分方程式の Gain は図-3 に示すように、 $G_2 \leq 0.5G_3^2$ のとき(a)の低域フィルターの特性を示し、 $G_2 > 0.5G_3^2$ のとき(b)に示すように共振現象を示す。

また、3 階微分方程式になると、Gain が図-4 (a.1) に示すような低域フィルターの特性を示すためには

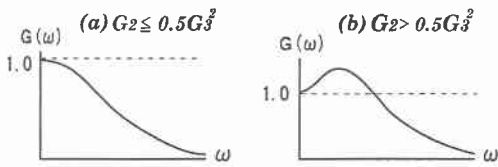


図-3 Gainの挙動 (理論-2階)

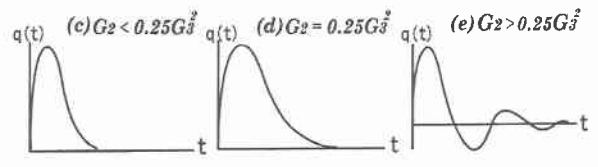


図-6 インパルス応答関数の挙動 (理論-2階)

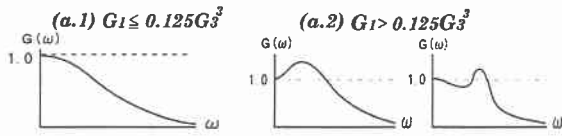
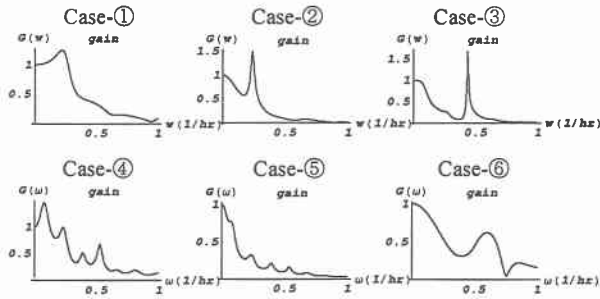


図-4 Gainの挙動 (理論-3階)



- ①-1981/08/23 鶴川水系鶴川(1228.0 km²)
- ②-1981/08/06 網走川水系本郷(1120.4 km²)
- ③-1986/09/04 網走川水系美幌(824.4 km²)
- ④-1979/10/20 渚滑川水系ウツツ橋(1198.2 km²)
- ⑤-1979/10/20 渚滑川水系上渚滑(1050 km²)
- ⑥-1988/06/10 後志利別川水系住吉(206.2 km²)

図-3 Gainの不規則挙動 (実測例)

(a) $G_2 \leq 0.5G_3^2$ に加え、さらに $G_1 \leq 0.125G_3^2$ が必要になる。

ここで、誤差が含まれているため使用が難しいと考えられるデータを抽出するため、実測値から求められた特徴的なGainの挙動例を図-5に示し、図-3,4と比較する。

この比較においてまず明らかなことは、図-5-Case-①、④の現象が(b)の条件に当てはまることである。そして反対に、判断が難しいのは高周波数領域でGainの共振現象が見られる残りの図-3-Case-②,③,⑤,⑥である。しかし、Gainが1を越えて共振現象を示すような現象が、実際の降雨～流出系に存在しているとは考えられないため、本研究ではGainが(b)の条件下にある①や④のような挙動を示すデータだけでなく、②,③のように $\text{Gain} > 1$ となるデータも棄却する対象として考えることにし、 $\text{Gain} \leq 1$ のデータのみを解析の対象とした。また、図-3では取り上げていないが、 $\omega > 0.5$ の高周波数領域における急激な変化は1 hr 単位のデータによる判断は不可能と考え、棄却は見送ることにした。

モーメント法により同定される係数を用いた再現計算では高周波数領域の乱れを判断することが難しかったためこの棄却作業は必要不可欠である。

3. 3 インパルス応答関数による評価

3. 2 のGainによる評価では共振現象が大きな障害となっていた。ここでは何故そのような現象が起ってしまうのか検討する。

まず、2階微分方程式の周波数伝達関数に対するインパルス応答関数の形状は理論上、微分方程式の特性方

式により得られた条件 $G_3^2 - 4 \cdot G_2$ に影響を受ける。

ここで、図-3に示したGainの条件と形状を、図-6のインパルス応答関数の条件と形状と比較してみる。これにより、図-6(c),(d)の条件下では、Gainは図-3(a)に示したような低域フィルターを示し、図-6(e)の条件下では図-3(a),(b)のどちらの形状もあり得ることが分かった。

すなわち、図-6(e)の $G_2 > 0.25 \cdot G_3^2$ の範囲におけるインパルス応答関数の振動の程度によりGainが共振現象を示すか否かの違いが表れると考えられる。

図-6(e)の条件におけるインパルス応答関数の式は次式で表わされる。

$$h(t) = \frac{2 \cdot e^{-\left(\frac{G_3}{2G_2}\right)t} \cdot \left\{ \sin \left(\frac{\sqrt{G_3^2 - 4G_2}}{2G_2} t \right) \right\}}{\sqrt{G_3^2 - 4G_2}} \quad (29)$$

この式(29)の成分 $G_3/2G_2$ (i) と $\left(\sqrt{G_3^2 - 4G_2} / 2G_2 \right)$ (ii)

を考慮して、振動系である(e)の条件下において、Gainが共振現象を示す条件と示さない条件を検討する。まず成分(i)であるが、この値が大きいと $e^{-(G_3/2G_2)t}$ に急激な減衰を与えることが出来る。また、 $e^{-(G_3/2G_2)t}$ と $e^{-(G_3/2G_2)t} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{G_3^2 - 4G_2}}{2G_2} t \right)$ の接点となる時間

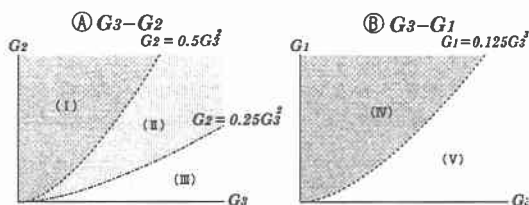
$$t = \frac{\pi}{2} \cdot \left(2G_2 / \sqrt{G_3^2 - 4G_2} \right) \text{ が } e^{-(G_3/2G_2)t} \text{ の減衰する時間に対}$$

して相対的に大きい値となっていれば、すなわち(ii)が比較的小さい値となっていれば、図-6(e)に示したようなインパルス応答関数の振動を抑えることができ、さらには、Gainが低域フィルターの特性を示すようになると考えられる。

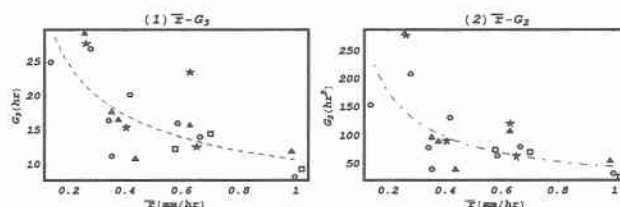
4 実流域における解析

採用した実測資料は、北海道の3つの水系のデータである。本研究は、出水ごとの有効雨量と直接流出量を対象とするものであり、モーメント法により同定された係数 G_1, G_2, G_3 と有効雨量を2, 3階微分方程式である式(4),(26)に代入し再現計算を行い、得られた流出量がどの程度実測の直接流出量を近似できているか判断することを目的とした解析である。したがって、解析の対象としては、同一の地点で数多くの出水資料を入手できる河川流域を可能な限り多く用いることにした。それにより、流域面積の規模に依らない結果を導き出せると判断した。

3. 2、3. 3による評価を行い、また、 G_1, G_2, G_3 が負となるデータは棄却し、インパルス応答関数が非振動系のデータと、振動系でも $\text{Gain} \leq 1$ となるようなデータを用いて解析した。ここで解析可能と判断したデータとは、前述したように誤差の多く含まれているデータを除いたデータのことである。



①-Gain : (I) 1 以上(棄却) (ex : 図・3-Case-①, ②, ③, ④)
 (II), (III) 1 以下 (ex : 図・3-Case-⑤, ⑥, 図-2-(C))
 インパルス応答関数 : (I), (II) 振動系 (III) 非振動系
 ($G_2 = a \cdot G_3^2$ の係数 a の増加と共に振動が激しくなる)
 ②-Gain : (IV) 1 以上(棄却) (ex : 図・3-Case-①, ②, ③, ④)
 (V) 1 以下 (ex : 図・3-Case-⑤, ⑥, 図-2-(C))
 図-7 $G_3 - G_2, G_3 - G_1$ の関係 (理論)



点線 : $\bar{r} - G_3$ の近似曲線 破線 : $\bar{r} - G_2$ の近似曲線
 平均降雨量 $\bar{r}$ の増加に伴い係数 G_2, G_3 は減少する傾向がある。流域面積の規模によりグラフの傾向に多少違いが見られるが、 $\bar{r} - G_3, G_2$ には一定の関係があるようである。
 図-8 $\bar{r} - G_3, \bar{r} - G_2$ の関係 (ex. 湧別川水系)

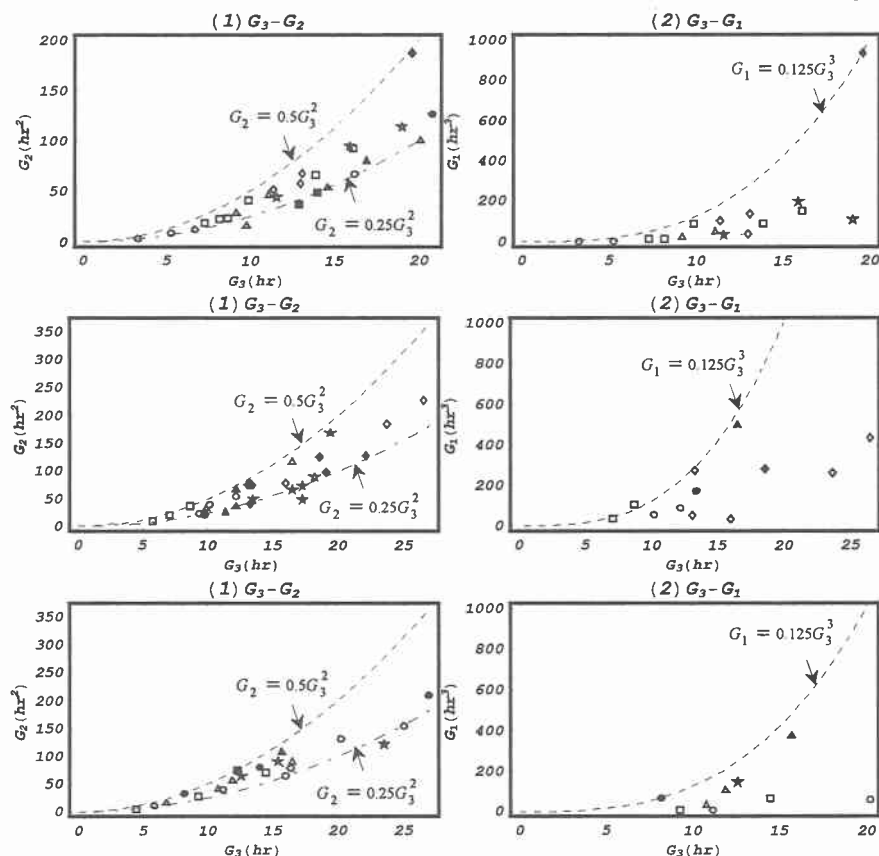


図-9 鵒川水系, 網走川水系, 湧別川水系における $G_3 - G_2, G_3 - G_1$ の関係

鵒川水系
 地点名: 流域面積,
 全データ数, 使用データ数
 ○: 稲里 : 122.7 km², 7, (1) 5 (2) 2
 △: 樺山 : 616.1 km², 8, (1) 6 (2) 2
 □: 穂別 : 949.5 km², 12, (1) 8 (2) 5
 ☆: 栄 : 1069.2 km², 5, (1) 3 (2) 3
 ◇: 鵒川 : 1228.0 km², 6, (1) 4 (2) 4
 (Filled → Gain < 1 の不規則変化)

網走川水系
 地点名: 流域面積,
 全データ数, 使用データ数
 ○: 湖南 : 115.5 km², 5, (1) 5 (2) 3
 △: 津別 : 571.0 km², 8, (1) 6 (2) 1
 □: 美幌橋 : 199.3 km², 6, (1) 3 (2) 2
 ☆: 美幌 : 824.4 km², 8, (1) 6 (2) 0
 ◇: 本郷 : 1120.4 km², 11, (1) 9 (2) 6
 (Filled → Gain < 1 の不規則変化)

湧別川水系
 地点名: 流域面積,
 全データ数, 使用データ数
 ○: 遠軽 : 958.1 km², 10, (1) 9 (2) 3
 △: 開盛 : 1334.8 km², 8, (1) 5 (2) 3
 □: 丸瀬布 : 862.0 km², 4, (1) 4 (2) 2
 ☆: 中湧別 : 1452 km², 5, (1) 3 (2) 1
 (Filled → Gain < 1 の不規則変化)

本解析に用いたグラフの例を図-7 に示す。また本解析に関係が深いと考える、 $\bar{r} - G_3, G_2$ の関係を図-8 に示す。

5 解析結果とその考察

本研究では、北海道内の 3 つの水系の合計 14 観測地点、103 出水のデータに用いて解析を行った。

モーメント法によって同定した係数を用いた 2 階微分方程式により、実測資料による降雨量と流出量の関係をほぼ近似できることが分かった。同様の解析を 3 階微分方程式でも行ったが、棄却データが予想以上に多かったため判断を下すのが困難であった。

また、図-9 に示された結果により、係数 G_1, G_2, G_3 のうち、特に G_2, G_3 間には一定の関係が存在することが示された。すなわち、係数 G_2, G_3 が平均降雨量 $\bar{r}$ に関してある一定の関係を持っていることにより (図-8)、降雨量が測定できれば係数 G_2, G_3 を導出できる、という関係を

確認出来たことにもなる。

これにより、再現計算の実用性を考えると 3 次遅れ系よりも係数 G_2, G_3 のみを用いた 2 次遅れ系の方がより実用的であることが判断出来た。

今後の課題としては、観測地点の存在しない流域にもこの理論を適用するためにも、関係を具体的に定量化することなどが挙げられる。

参考文献

- Luai Hamouda and Mutsuhiro Fujita : Application of the Equivalent Frequency Response Method to Nonlinear Runoff System -St.Venant Equations and Related Models-, 土木学会論文集 (No.677/II-55, pp.189-203, 2001)
- 藤田陸博, Surakha Wanphen, 田中岳, 清水康行 : 等価周波数応答方に基づく kinematic wave モデルの集中化に関する基礎的研究, 土木学会論文集投稿中。