

地下水の逆問題に関する基礎的研究

Fundamental Study on the Inverse Analysis of Grand Water

北海道大学工学部土木工学科 ○学生員 藤光梨香 (Rika Fujimitsu)
 北海道大学工学部土木工学科 F 会員 藤田睦博 (Mutsuhiro Fujita)
 北海道大学工学部土木工学科 正員 田中岳 (Gaku Tanaka)

1. はじめに

本研究は、地下水の測定値より境界条件を逆推定する手法について、基礎的な解析を行った。なお、解析の対象としては、式形の簡単な被圧地下水とした。基本的な解析方法は、境界条件と、任意地点の地下水位間の周波数伝達関数を求め、周波数領域で境界条件をもとめた。これをフーリエ逆変換することによって、時間関数に変換した。

2. 基礎理論

式(1)の非定常被圧地下水を解析の対象とした¹⁾。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad 0 \leq x \leq lx, 0 \leq y \leq ly \quad (1)$$

lx, ly は、 x, y 方向の解析区間である。また、 K は水頭拡散率である。

境界条件として、式(2)~(5)を考える。

$$h(t, x, 0) = h_{0,1}(t) \quad (2)$$

$$h(t, 0, y) = h_{0,2}(t) \quad (3)$$

$$h(t, x, ly) = h_{0,3}(t) \quad (4)$$

$$h(t, lx, y) = h_{0,4}(t) \quad (5)$$

又、初期条件として、次式を与える。

$$h(0, x, y) = h_0 \quad (6)$$

式(1)を満足する $h(t, x, y)$ が既知である時、境界条件式(2)~(5)を推定することが目的である。

まず、 $h_{0,1}(t)$ と $h(t, x, y)$ 間の周波数伝達関数 $Z_1(i\omega, x, y)$ を求めるために、次の境界条件式、初期条件を設定する。

$$h_{0,2}(t) = h_{0,3}(t) = h_{0,4}(t) = 0 \quad (7)$$

$$h_0 = 0 \quad (8)$$

更に、 $h_{0,1}(t)$ として、藤田らの手法を参考に式(9)を与える²⁾。

$$h_{0,1}(t) = \bar{h}_{0,1} + A e^{i\alpha t} \quad i; \text{虚数単位} \quad (9)$$

$$h(t, x, y) = B(x, y) + C(x, y) e^{i\alpha t} \quad (10)$$

式(9),(10)で ω は周波数を表している。 $A, \bar{h}_{0,1}$ は定数である。 $B(x, y)$ は、 $\bar{h}_{0,1}$ に対応する定常状態における水位である。 $C(x, y)$ は未知の複素関数である。

式(7)~(10)より、次式を誘導できる。

$$B(x, 0) = \bar{h}_{0,1}, B(x, ly) = B(0, y) = B(lx, y) = 0 \quad (11)$$

$$C(x, 0) = A, C(x, ly) = C(0, y) = C(lx, y) = 0 \quad (12)$$

式(10)を式(1)に代入し、次式を得る。

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = i \frac{\omega}{K} C \quad (14)$$

$Z_1(i\omega, x, y)$ は、次式で定義される。

$$Z_1(i\omega, x, y) = \frac{C(x, y)}{A} \quad (15)$$

式(14)に関して新しい変数 E を導入する。

$$E = \frac{C(x, y)}{A} \quad (16)$$

式(12),(14),(15)は、式(16)よりそれぞれ、次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = i \frac{\omega}{K} E \quad (17)$$

$$E(x, 0) = 1, E(x, ly) = E(0, y) = E(lx, y) = 0 \quad (18)$$

$$Z_1(i\omega, x, y) = E(x, y) \quad (19)$$

図-1は、式(18)を用いた $Z_1(i\omega, 450, 450)$ の計算例である。

(A),(B),(C)は、それぞれ $Z_1(i\omega, 450, 450)$ のベクトル軌跡、ゲイン、時間遅れを示している。ここで、特徴的なことは、 $G(0) = 1$ とならないことである。これは、4個の境界条件があることに関係している。

$$lx = ly = 1000(m) \quad (20)$$

以下同様に、(18)の境界条件を式(21),(22),(23)にすると、

$$E(0, y) = 1, E(x, 0) = E(x, ly) = E(lx, y) = 0 \quad (21)$$

$$E(x, ly) = 1, E(x, 0) = E(0, y) = E(lx, y) = 0 \quad (22)$$

$$E(x, ly) = 1, E(x, 0) = E(0, y) = E(lx, y) = 0 \quad (23)$$

$$h_{0,2}(t) \sim h(t, x, y), h_{0,3}(t) \sim h(t, x, y), h_{0,4}(t) \sim h(t, x, y)$$

間の周波数伝達関数は、 $Z_j(i\omega, x, y)$, $j = 2 \sim 4$ を誘導できる。

図-2に示すように、 (x_k, y_k) 地点の地下水位 $h(t, x_k, y_k)$ は、4個の境界条件境界条件 $h_{0,j}(t)$, $j = 1 \sim 4$ によって規定されている今、 $h_{0,j}(t) \sim h(t, x_k, y_k)$ 間の周波数伝達数を $Z_{k,j}(i\omega)$ と定義する。従って、式(24)を誘導できる。

$$H_k(i\omega) = \sum_{j=1}^4 Z_{k,j}(i\omega) H_{0,j}(i\omega), k = 1 \sim 4 \quad (24)$$

$$H_k(i\omega) = \int_0^{\infty} h(t, x_k, y_k) e^{-i\omega t} dt \quad (25)$$

$$H_{0,j}(i\omega) = \int_0^{\infty} h_{0,j}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (26)$$

$H_k(i\omega)$, $Z_{k,j}(i\omega)$ は既知なので、式(24)を解いて、

$H_{0,j}(i\omega)$, $j = 1 \sim 4$ を求めることができる。従って、

$h_{0,j}(t)$ は、次式によって計算できる。

$$h_{0,j}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} H_{0,j}(i\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (27)$$

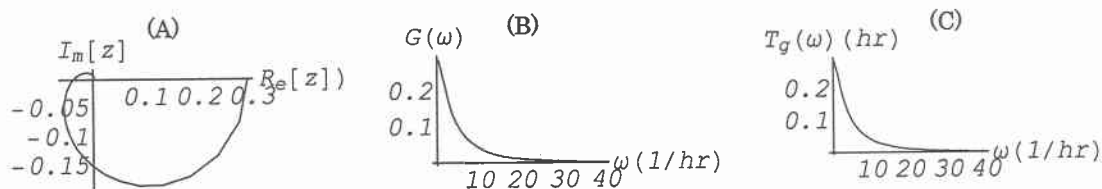


図-1 周波数伝達関数 $Z_1(i\omega, 450, 450)$ の周波数特性

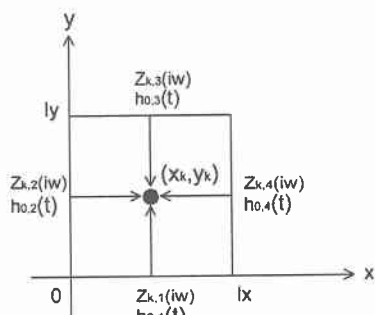
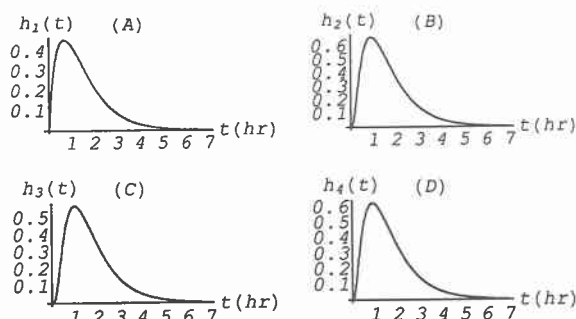


図-2 境界条件と周波数伝達関数



3. 計算例

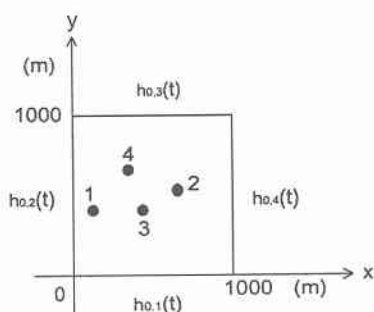
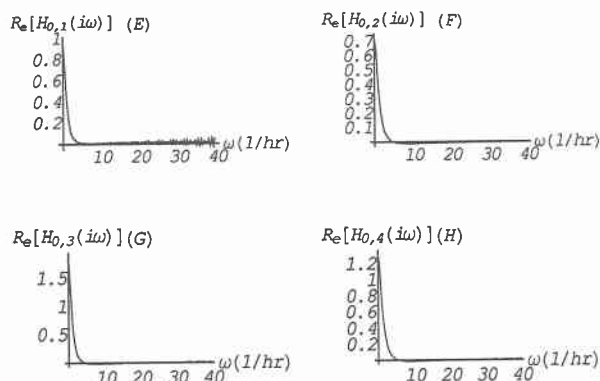


図-3 数値計算の概要



式(24)を解くためには、図-3に示すように、4ヶ所の地点での地下水位データが必要である。ここでは、式(20),(28)を用いた。 $K = 100000(m^2/hr)$ (28)

また、図-3の4ヶ所の座標値は、

$$(x_1, y_1) = (150, 450)$$

$$(x_2, y_2) = (650, 550)$$

$$(x_3, y_3) = (450, 450)$$

$$(x_4, y_4) = (350, 650) \quad \text{単位:メートル} \quad (29)$$

境界条件式として、次式を設定した。

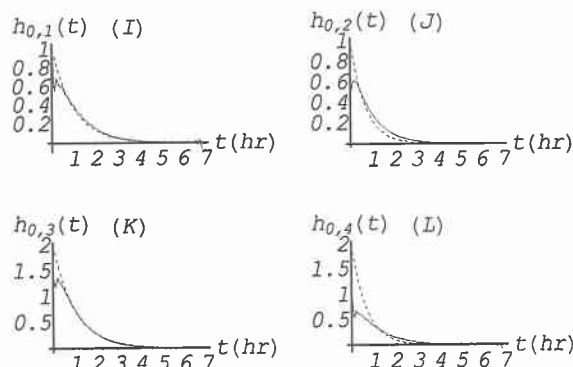
$$h_{0,1}(t) = e^{-t} \quad (30)$$

$$h_{0,2}(t) = e^{-1.5t} \quad (31)$$

$$h_{0,3}(t) = 2e^{-t} \quad (32)$$

$$h_{0,4}(t) = 2e^{-1.5t} \quad (33)$$

初期条件を0として、式(1),(28)~(33)を用いて、4地点の地下水位を計算し、これを $h_k(t)$ とした。図-4の(A)~(D)は、数値計算によって求めた $h_k(t)$ 、 $k=1\sim 4$ を示している。(E)~(F)は、式(24)より求めた $H_{0,j}(i\omega)$ の実数部を示している。また、(I)~(L)の実線は、式(27)によって、 $H_{0,j}(i\omega)$ を逆変換して、 $h_{0,j}(t)$ を表している。なお、点線は、境界条件として与えた式(30)~(33)を示している。式(27)では、 $0\sim\infty$ の積分区間であるが、数値計算上では、有限値を採用せざるを得ない。ここでは、 $\omega_{\max}$ を $40(1/hr)$ としている。



4. まとめ

一般に逆計算は、順計算と比較して、誤差を拡大する方向に進むので、困難とされている。本研究では、周波領域でのみ計算することによって、誤差の拡大を防いだが、必ずしも十分な精度で逆変換できなかった。今後、差分間隔等について検討する必要がある。

参考文献

- 1) 佐藤 邦明・岩佐義郎：地下水理学，2002
- 2) Luai Hamouda and Mutsuhiro Fujita：Application of the Equivalent Frequency Response Method to Nonlinear Runoff System -St.Venant Equations and Related Models-，土木学会論文集，No.677/Ⅱ-55, pp.189-203，2001