

重み付き最小自乗法によるメッシュフリーFEMの一次元問題への適用

Application of Mesh Free FEM based on WLSM for One-dimensional Problem

北海道大学工学部土木工学科 ○学生員 京田康宏(Yasuhiro Kyoda)
 北海道大学大学院工学研究科 正員 蟹江俊仁(Shunji Kanie)
 北海道大学大学院工学研究科 学生員 寺田 学 (Manabu Terada)

1. 目的

90年代にメッシュレス法やグリッドレス法といった、要素や格子を用いないで、偏微分方程式を解く手法が数多く提案されてきた。これらの手法は、近似関数の生成方法と支配方程式の解法との組み合わせでいくつかに分類される。その中でも重み付き最小自乗法(Weighted Least Square Method:以下WLSMと記す)と選点法を組み合わせた本手法は、Galerkin法の積分で用いられるバックグラウンドグリッドと呼ばれる積分格子を必要としないだけでなく、分担領域も必要とせず、本当の意味でのメッシュレス法といえる。本研究は、一次元 Poisson 方程式と Bernoulli-Euler 梁に本手法を適用し、影響範囲と解の精度との関係等の分析や不連続問題への適用性を調べるものである。

2. WLSMと選点法による定式化

2.1 WLSMによる形状関数の決定

WLSMを用いて形状関数 N_k を決定する。まず、領域 $x \in \Omega$ で定義される関数 $u = f(x)$ に対して、領域内の任意の評価点 x_k における関数 u は次式を用いて近似的に表されるものとする。

$$u(x_k) \approx \hat{u}(x_k) = \{p(x_k)\}^T \{a(x_k)\} \quad (1)$$

ここに、 $\hat{u}$ は近似解、 p は基底関数ベクトル、 m は基底関数の次数、 a は未定係数ベクトルである。ちなみに、

$$\{p(x)\}^T = \{1, x, x^2, x^3, \dots\} \quad (2)$$

$$\{a(x)\} = \{a_k, b_k, c_k, d_k, \dots\} \quad (3)$$

となる。

WLSMでは、次式で定義される誤差関数 Π を最小にするように未定係数 a_i を決定する。

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \sum_{j=1}^{NP} \phi(x_j - x_k) (u(x_k) - \hat{u}(x_j))^2 \\ &= \sum_{j=1}^{NP} \phi(x_j - x_k) (u(x_k) - \{p(x_k)\}^T \{a(x_k)\})^2 \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 NP, x_j はそれぞれ評価点 x_k の近傍に位置する節点数、節点座標である。 $\phi(x)$ は重み関数である。ここで、

$$[P] = [\{p(x_1)\}, \{p(x_2)\}, \dots, \{p(x_{NP})\}] \quad (5)$$

$$[F] = \text{diag}(\phi(x - x_1), \phi(x - x_2), \dots, \phi(x - x_{NP})) \quad (6)$$

$$\{U\}^T = \{u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_{NP})\} \quad (7)$$

と表すと、式(4)は次のようになる。

$$\Pi_k = ([P]^T \{a\} - \{U\})^T [F] ([P]^T \{a\} - \{U\}) \quad (8)$$

この式に最小化の条件である次式を付与すると、

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial a_k} = \frac{\partial \Pi_k}{\partial b_k} = \frac{\partial \Pi_k}{\partial c_k} = \dots = 0 \quad (9)$$

$$[P][F][P]^T \{a\} - [P][F]\{U\} = 0 \quad (10)$$

$$\therefore \{a\} = [P][F][P]^T]^{-1} [P][F]\{U\} \quad (11)$$

また、式(1)と式(11)より、

$$\hat{u}(x_k) = \{p(x_k)\}^T [M]^{-1} [B]\{U\} \quad (12)$$

ここに、

$$[M] = [P][F][P]^T \quad (13)$$

$$[B] = [P][F] \quad (14)$$

以上より

$$\hat{u}(x_k) = N_k \{U\} \quad (15)$$

$$N_k = \{p(x_k)\}^T [M]^{-1} [B] \quad (16)$$

となり、形状関数 N_k が得られる。

2.2 選点法による定式化

微分方程式を以下のように定義する。

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f \text{ in } \Omega \quad (17)$$

$$u = g \text{ on } \Gamma_s, \quad \frac{du}{dx} = h \text{ on } \Gamma_n \quad (18)$$

式(17)は式(18)のディリクレ境界条件、あるいはノイマン境界条件により規定される。近似解 $\hat{u}(x_k)$ によって近似される未知関数 $u(x_k)$ に重み付き残差法を用いると、次式が得られる。

$$\int_{\Omega} W \left(\frac{d^2 \hat{u}(x_k)}{dx^2} - f \right) d\Omega + \int_{\Gamma_n} \bar{W} (\hat{u}(x_k) - g) d\Gamma_n + \int_{\Gamma_s} \bar{\bar{W}} \left(\frac{d\hat{u}(x_k)}{dx} - h \right) d\Gamma_s = 0 \quad (19)$$

ここで、重み関数を $W = \bar{W} = \bar{\bar{W}} = \delta$ とする。 δ はディラックデルタである。式(19)より式(20)が得られる。

$$K u = F \quad (20)$$

K は剛性マトリックスであり、 $K \in \mathbb{R}^{NP \times NP}$ 、 $u \in \mathbb{R}^{NP \times 1}$ 、 $F \in \mathbb{R}^{NP \times 1}$ となる。一般に剛性マトリックスの対称性は得られない。領域内の点を I 、ディリクレ境界上の点を M 、ノイマン境界上の点を N とすると、剛性マトリックスは次のようになる。

$$K_{ij} = \frac{d^2 N_j(x_i)}{dx^2}, \quad K_{mj} = N_j(x_m), \quad K_{nj} = \frac{dN_j(x_n)}{dx}, \quad j = 1, 2, \dots, NP \quad (21)$$

3. 正規化座標による形状関数の比較

3.1 基底関数と節点数

一次元 Poisson 方程式に本手法を適用し、基底関数と節点数の関係を図-1に示す。解析条件は表-1に示す通りである。2次近似では節点数 $NP = 161$ で厳密解に一致するが、4次近似では節点数 $NP = 5$ で厳密解に一致する。2次近似における計算量を考慮すると、基底関数の次数を上げることが望ましいと言える。

4次近似では節点数 $NP = 5$ で厳密解に一致するので、節点数 NP を5以上に増加させても厳密解に一致するはずである。しかし、図-1から明らかなように $NP = 160$ の時、厳密解から大きくずれている。

この原因として式(13)の性質の悪さが考えられる。 $m = 2$ の時、式(13)は次式のようになる。

$$[M] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{NP} 1 \cdot \phi(x - x_1) & \sum_{j=1}^{NP} x_1 \cdot \phi(x - x_1) & \sum_{j=1}^{NP} x_1^2 \cdot \phi(x - x_1) \\ \sum_{j=1}^{NP} x_1 \cdot \phi(x - x_1) & \sum_{j=1}^{NP} x_1^2 \cdot \phi(x - x_1) & \sum_{j=1}^{NP} x_1^3 \cdot \phi(x - x_1) \\ \sum_{j=1}^{NP} x_1^2 \cdot \phi(x - x_1) & \sum_{j=1}^{NP} x_1^3 \cdot \phi(x - x_1) & \sum_{j=1}^{NP} x_1^4 \cdot \phi(x - x_1) \end{bmatrix} \quad (22)$$

式(22)の対角成分には、4乗の違いが生じている。4次近似なら8乗の違いが生じることになる。つまり、節点数を増やすことで x_i が小さくなり、その結果対角成分に極端に桁数の異なる成分が入ってしまい、解の精度が低下したものと考えられる。

表-1 解析条件

支配方程式	$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{105}{2}x^2 - \frac{15}{2}, (-1 < x < 1)$
境界条件	$u(x=-1)=1, \frac{du}{dx}(x=1)=10$
解	$u = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$
節点数 (NP)	5, 21, 161
基底関数次数 (m)	2, 4
重み関数 ϕ	$\phi(z_i) = 1 - 6z_i^2 + 8z_i^3 - 3z_i^4$, $z_i = \frac{ x - x_i }{dx}$
サポート台 (dx)	$2dx = 1.17\Delta x \cdot m$

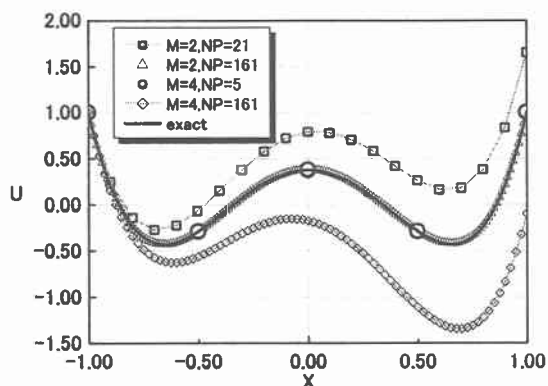


図-1 近似解の比較

3.2 線形写像の導入

式(13)が原因の精度低下を防ぐために、形状関数を求める際に線形写像を用いる。重み関数 ϕ は正規化座標系を用いて図-2のように表現される(mapping)。

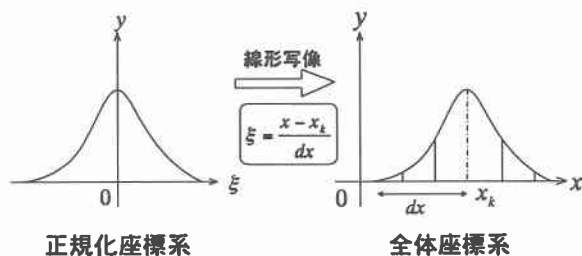


図-2 線形写像

写像関数は式(23)である。

$$\xi = \frac{x - x_i}{dx} \quad (23)$$

線形写像を用いて表-1と同様の解析条件で、 $M=5, NP=161$ として解析を行った(図-3)。4次近似、節点数 $NP=161$ でも厳密解に一致している。解析領域を $20 < x < 22$ として計算した時も、厳密解と一致している(図-4)。この時の形状関数を比較すると、両端でその対

称性が損なわれていたのに対し(図-5)、線形写像を導入することにより著しく改善されることが分かる(図-6)。その結果、節点数や解析領域によらず常に安定した解が得られるようになったと考えられる。

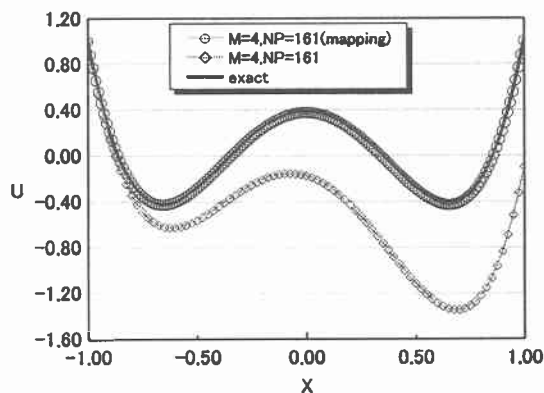


図-3 解の精度の比較

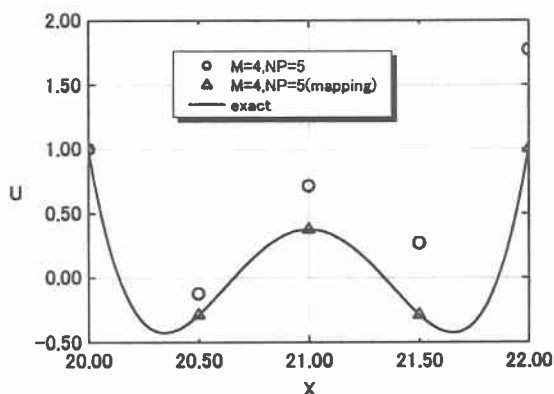


図-4 解析領域を移動した場合の比較

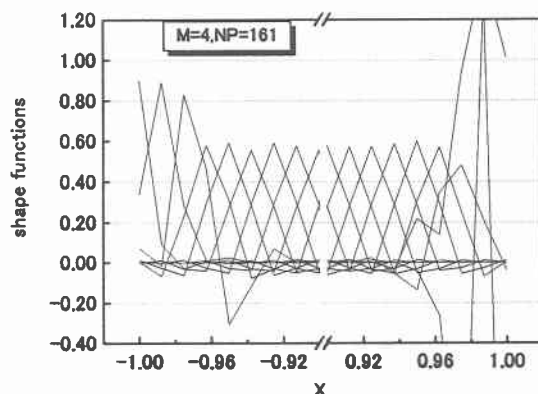


図-5 写像を用いない場合の形状関数

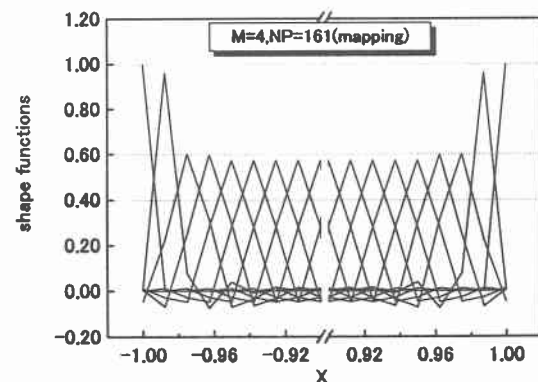


図-6 写像を用いた場合の形状関数

4. 不連続問題への適用

4.1 節点の均等配置

次に、本手法を Bernoulli - Euler 梁に適用した。解析条件は表-2 に示す通りである。 $EI = 1, q_0 = 1$ で計算している。曲げモーメント M 、たわみ w 共に 4 次近似を用いているので、分布荷重 q が 2 次以下であるならば、 q が連続関数である時、節点数 5 以上で厳密解を得ることが出来る。実際に、モデル 1~3 に適用した場合、厳密解と等しい値が得られている。しかし、不連続荷重であるモデル 4 の場合、節点数 $NP = 21$ でも、曲げモーメント、たわみ共に振動性状を示し(図-8、図-9)。厳密解と一致させるためには、更に節点数を増やさなければならないことが分かる(図-10)。不連続点で梁を分割した上で接続条件を適用することは、一つの有利な方法である。しかし、不連続点毎に要素分割を行うことで、FEM との違いが失われてしまう。そこで、4.2 では不連続点付近で節点数を増やし、解の精度向上を試みた。

表-2 解析条件

支配方程式	$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} & -\frac{1}{EI} \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q(x) \end{Bmatrix}, (-1 < x < 1)$
分布荷重	$q(x) = q_0, q_0 \left(\frac{x+1}{2} \right), q_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ $q(x) = \begin{cases} q_0 & (-1 < x < 0) \\ 0 & (0 < x < 1) \end{cases}$
境界条件	$M(x=-1) = 0, M(x=1) = 0$ $w(x=-1) = 0, w(x=1) = 0$
解	$w = \begin{cases} -\frac{x^4}{240} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} + \frac{x^2}{8} - \frac{7}{720}x - \frac{5}{48} \\ -\frac{q_0 l^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \end{cases}$ $w = \begin{cases} -\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{48} - \frac{5}{48}, (-1 < x < 0) \\ -\frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{48} - \frac{5}{48}, (0 < x < 1) \end{cases}$
節点数 (NP)	21
基底関数次数 (m)	4
サポート台 (dx)	$2dx = 1.17\Delta x \cdot m$

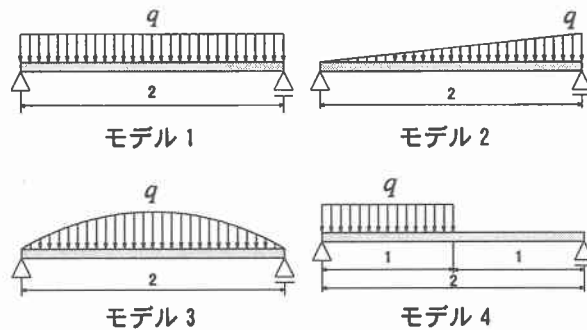


図-7 モデル図

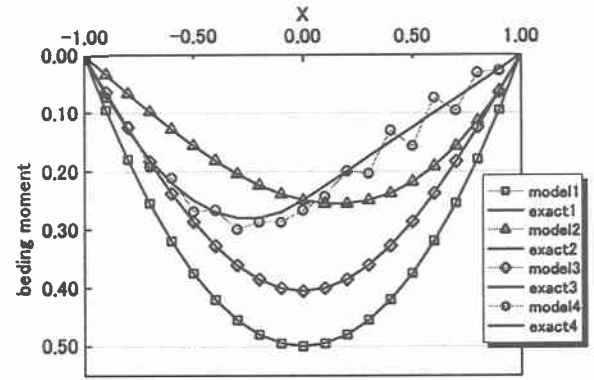


図-8 曲げモーメント

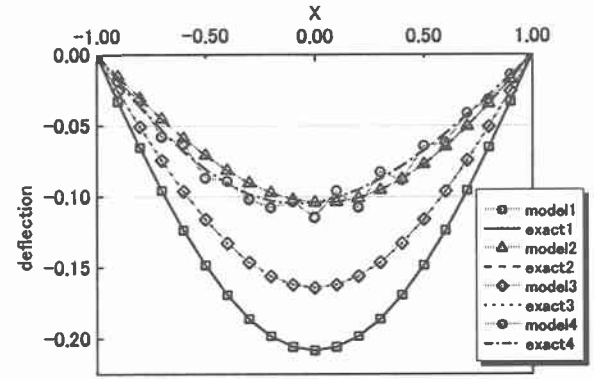


図-9 たわみ

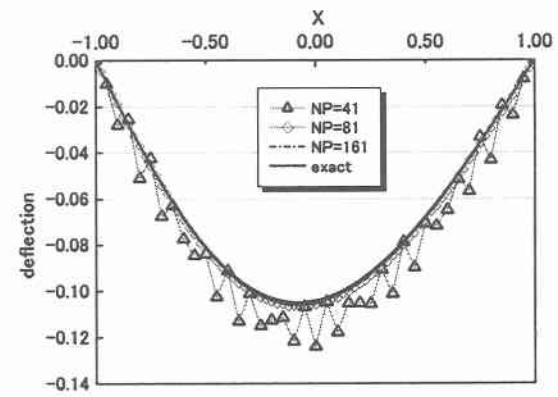


図-10 不連続荷重のたわみ

4.2 密な節点配置

節点を不連続点付近で密になるように配置した。これまでの大きさが固定されているサポート台では、不連続点付近で計算点数が多くなり、大きな振動性状を示してしまう。そこで、サポート台に、常に 4 次近似の計算に必要な最低節点数である 5 点を含むように変化させる「可変サポート台」を採用した。表-2 のモデル 4 の解析は図-11、図-12 に示す通りである。図から明らかなように、節点数 $NP = 21$ で曲げモーメント、たわみ共に厳密解にほぼ一致している。

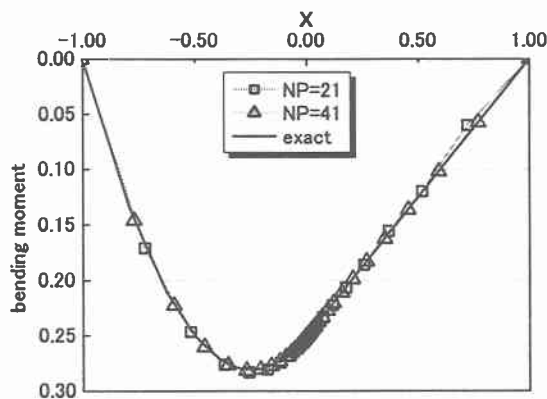


図-11 曲げモーメント

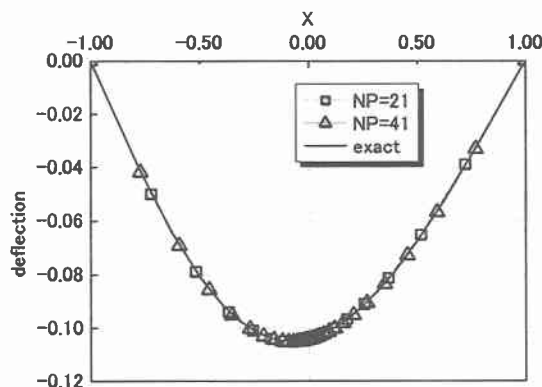


図-12 たわみ

4.3 Reproducing Kernel Method(RKM)との比較

次に、WLSMとRKMとの比較を行った。RKMは近似関数生成の際に積分を用いるので、分担領域 ΔV を考慮しなければならない。図-13は2つの手法を比較したものである。節点を均等に配置した場合、両端点において ΔV が半分になるだけで、ほとんど精度に差はない。不連続点付近で節点を密に配置した場合も、RKMとWLSMとの差はほとんどない。誤差の計算には次の式を用いている。

$$\varepsilon = \frac{1}{|u^{(c)}|_{\max}} \sqrt{\frac{1}{NP} \sum_{i=1}^{NP} [u_i^{(c)} - u_i^{(c)}]^2} \quad (23)$$

ここに、 NP は節点数、 $u^{(c)}$ は厳密解、 $u^{(c)}$ は本計算で求めた解を表している。

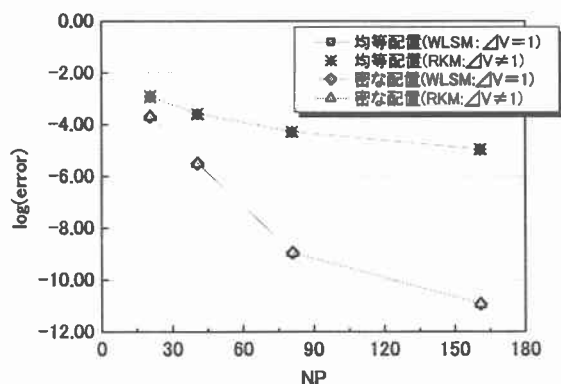


図-13 解の精度の比較

5. まとめ

本研究において次のような結論を得た。

- ・節点数や解析領域に関係なく安定した解を得るためには、形状関数の対称性を保つ線形写像の導入が必要であることを示した。
- ・不連続問題において不連続点に節点を密に配置した場合、可変式サポート台にしなければならないことを確認した。
- ・少なくとも次元問題において、 ΔV を考慮するRKMと ΔV を考慮しないWLSMに大きな差がないことを確認した。

今後は本手法を二次元問題(Kirchhoff plate等)に適用しその精度を明らかにしていく考えである。

参考文献

- 1) Aluru, N.R and Gang, L. "Finite cloud method: a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50:pp.2373-2410, 2001
- 2) Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., "A finite point method in computational applications to convective transport and fluid flow", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 39: pp.3839-3866, 1996
- 3) Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Sacco, C., "A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problem", Computer methods in applied mechanics and engineering, 139:pp.315-346, 1996
- 4) Onate, E., Perazzo, F., Miquel, J., "A finite point method for elasticity problems", Computers & Structures, 79:pp.2151-2163, 2001
- 5) Liu, W.K., Sukky, Jun., Li, Shaofan., Adee, Jonathan. and Belytschko, Ted., "Reproducing kernel particle method for structural dynamics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38:pp.1655-1679, 1995
- 6) 長嶋・奥田・矢川：エレメントフリー Galerkin 法に関する基礎的検討(第一報 常微分方程式への適用), 日本機械学会論文集 61-590, A(1995), pp.194-200.
- 7) 長嶋・奥田・矢川：エレメントフリー Galerkin 法に関する基礎的検討(第二報 二次元ポテンシャル問題への適用), 日本機械学会論文集 62-599, A(1996), pp.218-225.