

一厚板理論による円形厚板の非定常・非軸対称熱曲げ解析の精度について

On Precision of an Analysis of Axially Asymmetric and Transient Thermal Bending For Circular Thick Plate

by One Theory of Moderately Thick Plates

北見工業大学大学院 ○ 学生員 何 耀昌 (He Yaochang)

北 見 工 業 大 学 フェロー 大島俊之 (Toshiyuki Oshima)

1. 緒言

厚板曲げの問題は、構造力学或いは構造工学における重要なテーマであり、研究者は精力的に研究を行ってきた。しかしながら、これまでの厚板曲げの研究において、荷重としては、部分等分布荷重、全面等分布荷重或いは集中荷重などの表面荷重が多い。温度荷重或いは熱荷重を受ける厚板の熱曲げに関する研究がいくつか報告されているが、現時点においてもきわめて少ないようである。今後の厚板曲げの問題は表面荷重の代わりに、温度荷重或いは熱荷重が作用する時の熱変形および熱応力を解析する熱曲げの問題になるかと考えられる。

厚板曲げの解析方法は、従来用いられる3次元弾性論による解析と厚板理論による解析との2通りの方法がある。3次元弾性論による解析は、変位および応力に関する何らの仮定を含まず、境界条件が変位成分および応力成分によって厳密に規定され、精確性の最も高い方法であるが、解析上における複雑さおよび板厚の減少に伴う数値計算の困難さなど短所を有している。一般的には、板厚の減少に伴い数値計算の困難性は、Fourier級数の採用項数を、板厚の減少に伴って漸次低下して行くことにより一往回避されるが、必然的に、収束のよい数値計算結果を得ることを難しくし、3次元弾性論による解法の適用性を制限する大きな原因となる。そのため、簡明でしかも精度の高い解析方法を求めるために、現在見受けられる種々の厚板理論は生み出されてきた。厚板理論による解析は、近似的方法であるが、解析方法および数値計算が容易であり、その適用性は相当に広い。しかしながら、従来、厚板理論は、表面荷重を受ける厚板曲げに適用されており、温度荷重或いは熱荷重を受ける厚板の熱曲げに適用された研究は、殆ど見ることができないようである。

近似解析法である厚板理論の精確性を検証する必要があるので、さまざまな形状および境界条件における温度荷重或いは熱荷重を受ける厚板の熱曲げに関する解析を行い、厚板の熱変形および熱応力を解明すると同時に、3次元弾性論による解析の結果とを比較し、通常有限要素法などで数値解析的に実施される実務の解析結果の精度を検証することができるとともに、熱曲げに対する一つの簡明な解析方法を提案することにつながり、厚板の熱曲げ解析の意義は高いと考えられる。

本研究における厚板理論は、Love¹⁾の理論に見受けられる2つの難点を克服した一改良理論である。Loveの研究は、平面応力解、一般化平面応力解および特殊解の3つの解を重ね合わせて、板の境界条件および荷重条件を満たす方法である。しかしながら、Loveの理論には、板の表面における荷重条件を満たすための特殊解を求めることの困難さおよび同次解としての2つの解のみでは、厚板の境界条件として通常見受けられる曲げに

関する3つの条件を規定することができず、2つの条件しか規定できないという短所の2つの難点がある。本厚板理論においては、特殊解として3次元応力解の一部を用い、任意の荷重条件に対処できるようにすることにより、Loveの理論における1つの難点を解決した。さらに、同次解としての平面応力解および一般化平面応力解の2つの解に板の中央面に対して反対称の応力状態に関する解を新たに追加して、曲げに関する境界条件が3つ規定できるように、Loveの理論におけるもう1つの難点を解決した。

厚板の熱曲げに関する研究は、近年、奥村らによる長方形厚板、扇形厚板²⁾の非軸対称温度分布に関する定常熱曲げ問題、菅野らによる有限円柱、円柱孔を有する厚板³⁾の軸対称温度分布に関する非定常熱応力問題、野田らによる無限広さの平板⁴⁾、円板の軸対称温度分布に関する非定常熱応力問題、著者および奥村による円形厚板⁵⁾の非軸対称温度分布に関する非定常熱曲げ問題、著者および大島による3次元弾性論による円形厚板⁶⁾の非定常熱曲げ問題などがいくつか報告されているが、温度荷重あるいは熱荷重を受ける厚板の熱曲げに関する研究は、現時点においても少ないようである。また、上述した熱応力問題に関する研究は、軸対称あるいは定常熱応力問題であり、非軸対称温度分布に関する厚板の非定常熱曲げ解析には適用できない。3次元弾性論による厚板曲げに関する解析と数値計算の困難さおよび複雑さのため、非軸対称温度分布に関する厚板の非定常熱曲げに関する解析はほとんど見あたらないようである。

2. 解析

厚板理論および3次元弾性論による解析については、著者ら^{22), 22)}がすでに報告しているので、ここで簡単に説明する。

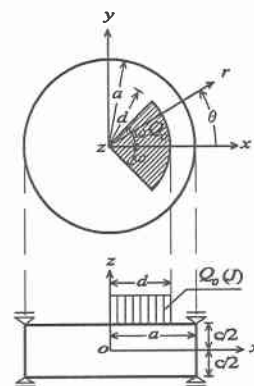


図-1 熱荷重を受ける円形厚板

図-1に示したように、円柱座標 (r, θ, z) を用い、座標の

原点を厚板の中央面の中心に置く。熱荷重として、円形厚板の上面に z 軸に対して非軸対称分布の部分扇形加熱が作用し、 $\theta = 0$ に対して、対称に分布するとし、熱供給幅を d 、中心角を 2ω とする。厚板の半径を a 、板厚を c とする。

2.1 温度場

温度場は、非定常状態を考えているので、熱伝導方程式は、次式で表される。

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

円形厚板の上面に非軸対称部分扇形加熱が作用し、下面において周囲媒体へ熱放散し、周辺において温度が 0 である場合を考えると、厚板の温度場の境界条件は、次のように表される。

$$r = a \text{ において } T = 0 \quad (2a)$$

$$z = c/2 \text{ において } \partial T / \partial z + hT = Q(r, \theta) / \lambda \quad (2b)$$

$$z = -c/2 \text{ において } \partial T / \partial z - hT = 0 \quad (2c)$$

初期条件として、時刻が 0 の時に温度が 0 の場合を考えると、その条件は、次式となる。

$$t = 0 \text{ において } T = 0 \quad (3)$$

2.2 3次元弾性論による解析

熱を考慮した非軸対称問題の一解は、次のように表される。

$$2Gu_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1 \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad (4a)$$

$$2Gu_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1 \right] - 2 \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (4b)$$

$$2Gu_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_3 \right] + \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (4c)$$

変位ポテンシャルは、次のように表される。

$$\begin{aligned} \phi_0 = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left(A_{ms}^{(1)} \cosh \alpha_{ms}z \right. \\ & \left. + I_{ms}^{(1)} \sinh \alpha_{ms}z \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} D_{mn}^{(1)} \cos m\theta \cos \beta_n z I_m(\beta_n r) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} D_{mj}^{(3)} \cos m\theta \sin \mu_j z I_m(\mu_j r) \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} F_{mn}^{(1)} \cos m\theta \cos \beta_n z I_m(\beta_n r) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} F_{mj}^{(3)} \cos m\theta \sin \mu_j z I_m(\mu_j r) \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} \phi_3 = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left(C_{ms}^{(1)} \cosh \alpha_{ms}z \right. \\ & \left. + M_{ms}^{(1)} \sinh \alpha_{ms}z \right) \end{aligned} \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left(B_{ms}^{(1)} \cosh \alpha_{ms}z \right. \\ & \left. + G_{ms}^{(1)} \sinh \alpha_{ms}z \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} E_{mn}^{(1)} \sin m\theta \cos \beta_n z I_m(\beta_n r) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} E_{mj}^{(3)} \sin m\theta \sin \mu_j z I_m(\mu_j r) \end{aligned} \quad (5d)$$

境界条件を満たすために、Fourier 級数に展開する必要が生じ、 $n = 0$ の初期項を持った Fourier 級数展開となるので、 $n = 0$ の初期項を処理する解が必要になる。これらの付加解は、次のように表される。

$$\phi_{0,0} = \sum_{m=2}^{\infty} D_{m0}^{(1)} \cos m\theta r^m - \sum_{m=1}^{\infty} m F_{m0}^{(1)} \cos m\theta \left[\frac{r^{m+2}}{2} - (m+1)r^m z^2 \right] \quad (6a)$$

$$\phi_{1,0} = F_{00}^{(1)} \left(\frac{r^2}{2} - z^2 \right) + \sum_{m=1}^{\infty} F_{m0}^{(1)} \cos m\theta \left[\frac{r^{m+2}}{2} - (m+1)r^m z^2 \right] \quad (6b)$$

$$\psi_{3,0} = 2(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} F_{m0}^{(1)} \sin m\theta \left[\frac{r^{m+2}}{2} - (m+1)r^m z^2 \right] \quad (6c)$$

力学的境界条件として、円形厚板の上、下面を自由とし、周辺を単純支持とすると、境界条件は次の様になる。

$$z = \pm c/2 \text{ において } \sigma_z = 0, \sigma_{z\theta} = 0, \sigma_{zz} = 0 \quad (7a \sim c)$$

$$r = a \text{ において } u_r = 0, u_\theta = 0, \sigma_{rr} = 0 \quad (8a \sim c)$$

2.3 厚板理論による解析

解析には、同次解と特殊解を重ね合わせて、境界条件と荷重条件を満たすように解析する。同次解として、平面応力解、一般化平面応力解および逆対称応力解の 3 つ解を用い、特殊解として、熱を考慮した 3 次元応力解の一部を用いる。

2.3.1 同次解

(1) 平面応力解

変位成分は、次のように表される。

$$2Gu_r = \frac{1}{1+\nu} \left(\xi + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} \right) - \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \quad (9a)$$

$$2Gu_\theta = \frac{1}{1+\nu} \left(\eta + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta} \quad (9b)$$

$$2Gu_z = -\frac{1}{1+\nu} z \Theta_0 \quad (9c)$$

変位ポテンシャルは、次のように表される。

$$\chi_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \left[P_m^{(1)} r^m + P_m^{(3)} r^{m+2} \right] \quad (10a)$$

$$\Theta_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta 4(m+1) P_m^{(3)} r^m \quad (10b)$$

$$\chi = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \left\{ P_m^{(1)} r^m + P_m^{(3)} r^m \left[r^2 - \frac{2\nu(m+1)}{1+\nu} z^2 \right] \right\} \quad (10c)$$

$$\xi = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta 4 P_m^{(3)} r^{m+1} \quad (10d)$$

$$\eta = \sum_{m=0}^{\infty} \sin m\theta 4 P_m^{(3)} r^{m+1} \quad (10e)$$

(2) 一般化平面応力解

変位成分は、次のように表される。

$$2Gu_r = -z \frac{\partial \chi'_1}{\partial r} - \frac{2-\nu}{6(1+\nu)} z^3 \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \quad (11a)$$

$$2Gu_\theta = -z \frac{1}{r} \frac{\partial \chi'_1}{\partial \theta} - \frac{2-\nu}{6(1+\nu)} z^3 \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \theta} \quad (11b)$$

$$2Gu_z = \chi'_1 + \frac{c^2 - 2\nu z^2}{4(1+\nu)} \Theta_1 \quad (11c)$$

変位ポテンシャルは、次のように表される。

$$\chi'_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta [Q_m^{(1)} r^m + Q_m^{(3)} r^{m+2}] \quad (12a)$$

$$\Theta_1 = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta 4(m+1)Q_m^{(3)} r^m \quad (12b)$$

$$\chi' = z \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \left\{ Q_m^{(1)} r^m + Q_m^{(3)} r^m \left[r^2 - \frac{2(2-\nu)(m+1)}{3(1-\nu)} z^2 \right] \right\} \quad (12c)$$

(3) 逆対称応力解

変位成分は、次のように表される。

$$2Gu_r = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad 2Gu_\theta = -2 \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad 2Gu_z = 0 \quad (13a \sim c)$$

変位ポテンシャルは、次のように表される。

$$\psi = \sin \beta z \sum_{m=0}^{\infty} \sin m\theta E_m^{(1)} I_m(\beta r) \quad (14)$$

2.3.2 特殊解

特殊解が、3次元応力解の一部を用い、2.2 に示しているの
で、省略する。

2.3.3 境界条件

力学的境界条件として、円形厚板の上、下面を自由とし、周
辺を単純支持とすると、境界条件は次のようになる。

$$z = \pm c/2 \text{ において } \sigma_{rz} = 0, \sigma_{z\theta} = 0, \sigma_{zz} = 0 \quad (15a \sim c)$$

$$r = a \text{ において } T_{rr} = 0, (u_\theta)_{z=0} = 0, (u_z)_{z=0} = 0,$$

$$M_r = 0, (\partial u_\theta / \partial z)_{z=0} = 0 \quad (16a \sim e)$$

3. 数値計算および精度検証

数値計算は、図-1 に示したように、円形厚板が上面に部分
扇形加熱を受けた場合について行った。用いた条件は、中心角
 2ω を 0.6π 、熱供給幅 d/a を 0.3、ピオ一数 H を 0.1、ポア
ソン比 ν を 0.3 とした。また、形状比 c/a を $1/2$ 、 $1/4$ 、 $1/8$ お
よびフーリエ数 t' を 0.0、0.01、0.1、1.0、50.0 とした場合
を計算した。フーリエ数 $t' = 50.0$ の時は、定常状態であり、
 $t' = 0.0$ の時は、初期条件を満たしているかどうかのチェック
である。級数の項数は m については 70 項、 s については 40 項、
 k については 30 項を取り計算した。

前述したように、厚板理論による解析は近似的方法であるの
で、解析結果精度の検証を行うことが必要になる。現時点まで
見受けられる種々の厚板理論の精度に関する検証が進み、厳密
な 3次元弾性論による解析との比較を通して詳しく検討されて
いる。したがって、ここでは、本研究における厚板理論とすで
に見受けられる種々の厚板理論との比較を行い、その優劣につ
いて論ずることは避ける。しかしながら、本研究における厚板
理論は、その本質的な考えを Love の理論に負い、さらに、その
Love の理論の一改良理論とも目されるので、厚板理論による解
析結果と厳密な 3次元弾性論による解析結果との比較を通して、
本研究における厚板理論の精度および改良性について検討する。

図-2~4 には、それぞれ、着目点を $r = 0.2a$ とした場合の
 $\theta = 0$ 、 $c/a = 1/2$ における応力 σ_{rr} 、 $\sigma_{\theta\theta}$ および σ_{rz} の厚板理論
による解析結果と 3次元弾性論による結果との比較を示した。

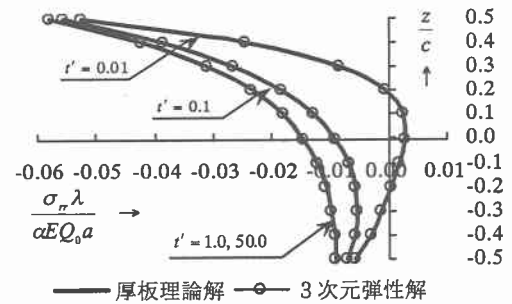


図-2 σ_{rr} の比較 ($\theta = 0, c/a = 1/2, r = 0.2a$)

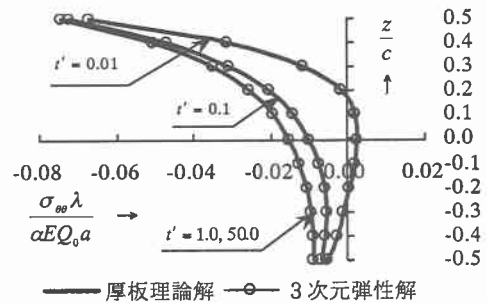


図-3 $\sigma_{\theta\theta}$ の比較 ($\theta = 0, c/a = 1/2, r = 0.2a$)

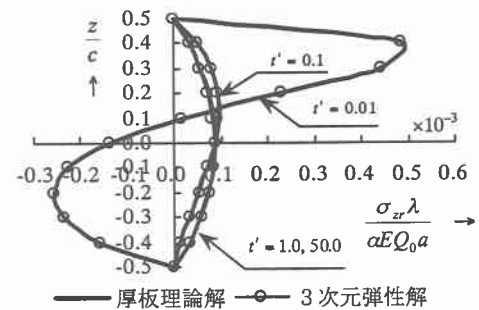


図-4 σ_{rz} の比較 ($\theta = 0, c/a = 1/2, r = 0.2a$)

表-1 $\sigma_{rr}(1)/\sigma_{rr}(2)$ の比較 ($r = 0.2a, t' = 1.0, z = 0$)

	$\theta = 0$	$\theta = 0.6\pi$	$\theta = 1.2\pi$	$\theta = 1.8\pi$
$c/a = 1/2$	0.9958	0.9944	0.9945	0.9946
$c/a = 1/4$	0.9987	0.9978	0.9979	0.9979
$c/a = 1/8$	0.9996	0.9992	0.9992	0.9991

* $\sigma_{rr}(1)$ は厚板理論解で、 $\sigma_{rr}(2)$ は 3次元弾性解である。

表-2 $\sigma_{\theta\theta}(1)/\sigma_{\theta\theta}(2)$ の比較 ($r = 0.2a, t' = 0.1, z = 0$)

	$\theta = 0$	$\theta = 0.6\pi$	$\theta = 1.2\pi$	$\theta = 1.8\pi$
$c/a = 1/2$	0.9966	0.9905	1.0057	0.9963
$c/a = 1/4$	0.9991	0.9966	1.0028	0.9990
$c/a = 1/8$	0.9997	0.9981	1.0025	0.9996

* $\sigma_{\theta\theta}(1)$ は厚板理論解で、 $\sigma_{\theta\theta}(2)$ は 3次元弾性解である。

図に示すように、いずれの応力においても、厚板理論による結
果が、非定常状態あるいは定常状態場合に関わらず、3次元弾
性論による結果と極めてよく一致していることがわかった。

表-1 および 2 には、それぞれ、着目点を $r = 0.2a$ とした場合のフーリエ数 $t' = 1.0$ および 0.1 における板の中央面各断面の応力 σ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$ の厚板理論による解析結果と 3 次元弾性論による結果との比較を示した。 σ_{rr} と $\sigma_{\theta\theta}$ とともに、いずれの厚さの板においても、2 通りの理論による結果の比は非定常状態あるいは定常状態場合に関わらず極めて 1.0 に近く、 σ_{rr} がわずかに $-0.56\% \sim 0.32\%$ 異なるのみで、 $\sigma_{\theta\theta}$ がわずかに $-0.95\% \sim 0.57\%$ 異なるのみである。それらの誤差の絶対値はすべて 0.95% 以下である。しかしながら、板の周辺およびその近傍においては (図および表は示していない)、厚板理論による解析結果が、3 次元弾性論による結果と大きな相違を示す。

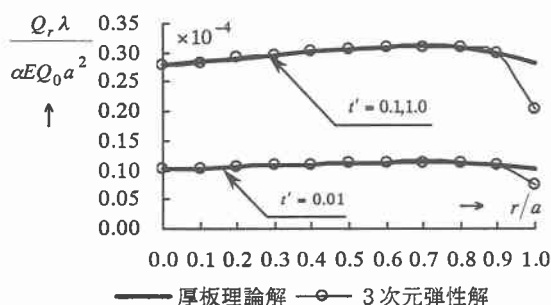


図-6 Q_r の比較 ($\theta = 0, c/a = 1/2$)

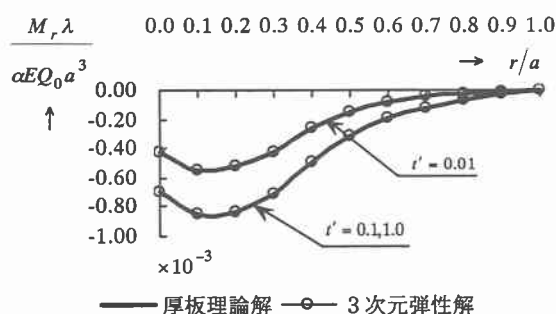


図-7 M_r の比較 ($\theta = 0, c/a = 1/2$)

表-3 $Q_r(1)/Q_r(2)$ の比較 ($c/a = 1/2, t' = 0.1$)

	$r = 0$	$r = 0.4a$	$r = 0.9a$	$r = a$
$\theta = 0$	0.9984	0.9996	1.0053	1.3831
$\theta = 0.6\pi$	0.9984	1.0032	1.0052	0.6818
$\theta = 1.6\pi$	0.9984	0.9992	1.0119	1.0895

* $Q_r(1)$ は厚板理論解で、 $Q_r(2)$ は 3 次元弾性解である。

表-4 $M_r(1)/M_r(2)$ の比較 ($r = 0.2a, t' = 0.01$)

	$\theta = 0$	$\theta = 0.8\pi$	$\theta = 1.4\pi$	$\theta = 1.8\pi$
$c/a = 1/2$	0.9998	0.9991	0.9986	0.9998
$c/a = 1/4$	0.9999	0.9996	0.9992	0.9998
$c/a = 1/8$	0.9999	0.9998	0.9995	1.0000

* $M_r(1)$ は厚板理論解で、 $M_r(2)$ は 3 次元弾性解である。

図-5 および 6 には、それぞれ、板厚比 $1/2$ の場合に関する $\theta = 0$ における Q_r および M_r 、表-3 および 4 には、それぞれ、 Q_r および M_r の厚板理論による解析結果と 3 次元弾性論による結果との比較を示した。板の周辺およびその近傍においては、

いずれの厚さの板においても、厚板理論による解析結果が、3 次元弾性論による結果と大きな相違を示すが、他の部分においては、極めてよく一致していることがわかった。 Q_r がわずかに $-0.16\% \sim 0.53\%$ 異なるのみで、 M_r がわずかに -0.14% 異なるのみである。

4. 結語

本論文で取り扱った円形厚板の問題は、円柱座標における 3 次元応力問題の中でも、解法および数値計算が難しい問題であるが、3 次元弾性論による解析は、載荷領域の近傍および板の周辺における変位および応力の値を正確に評価し得るという大きな長所を有している。一方、厚板理論による解析は、変位或いは応力に関する何らの仮定も含まない弾性論的に厳密な解より構成された理論によるものであり、解法および数値計算もきわめて容易であるが、境界条件を近似的にしか課し得ないという厚板理論による解析に避けられない短所を有している。

Love の理論に見受けられる 2 つの難点を克服した一改良理論を意味する本研究の厚板理論は、特殊解として 3 次元応力解の一部を用い、任意の荷重条件に対処できるようになり、同次解としての平面応力解および一般化平面応力解の 2 つの解に板の中央面に対して反対称の応力状態に関する解を逆対称応力解として追加して、曲げに関する境界条件が 3 つ規定できるようになるものである。

本研究における厚板理論は、Love の理論に見受けられる 2 つの難点を克服した一改良理論であり、解析方法および数値計算が容易であり、精度の高い解析方法であることがわかった。したがって、熱曲げに対する一つの簡明な解析方法を提案することにつながると考えられる。しかしながら、本研究における厚板理論も他の厚板理論と同様に、Saint-Venant の原理に立脚して境界条件を規定している以上、板の周辺およびその近傍においては、応力成分および断面力の値が不正確になることは否めない。

謝辞：本研究を行うにあたって、北見工業大学奥村勇教授にご指導をいただきました。ここに記して感謝申し上げます。

参考文献

- 1) Love, A. E. H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Dover, New York, N. Y., 1944.
- 2) Isamu A. Okumura : Steady-state thermal bending of thick rectangular plates, *J. Engrg. Mech., ASCE*, 122(6), pp. 512~520, 1996.
- 3) Sugano, Y. : Transient thermal stresses in an anisotropic thick plate with a cylindrical hole, *Trans. of the JSME*, 47, No. 419, pp. 730~739, 1981.
- 4) 野田直剛, 斎藤 宏 : 軸対称加熱される無限広さの平板の動的熱応力, 日本機械学会論文集(A 編), 52 巻 474 号, pp. 314~320, 1986.
- 5) 何耀昌・奥村勇 : 非軸対称変形をする円形厚板の非定常熱曲げ解析, 土木学会第 54 回年次学術講演会講演概要集第 1 部(A) pp. 74~75, 1999.
- 6) 何耀昌・大島俊之 : 3 次元弾性論による円形厚板の非定常熱曲げ解析, 応用力学論文集, Vol. 5, pp. 111~120, 2002.