

ステップ状海底地形における自由波について

Scattering of Free Waves over a Submerged Step

北見工業大学大学院○学生員 大橋 正臣 (Masami Ohashi)

北見工業大学大学院 学生員 勝井 彰子 (Akiko Katsui)

北見工業大学工学部 正 員 佐藤 幸雄 (Yukio Sato)

北海道東海大学工学部 正 員 濱中建一郎 (Ken-ichiro Hamanaka)

1. はじめに

港湾内に停泊している船舶が船体動揺を起こすメカニズムは、基本的には港湾内の副振動による湾水振動と共振によるものと考えられる。この現象を発生させる原因は長周期自由波にあると予想され、港外で自由波が発生するものとして、ステップ状海底地形が考えられる。ステップ状海底地形のように水深が急激に変化する場合、ステップを通過する際、波の非線形干渉により、規則波では、入射周波数に対して整数倍の周波数成分を持つ拘束波が生じ、ステップ先端上から、各周波数の自由波が発生する。この現象は入射波として不規則波を考えた場合、長周期自由波の発生源となることが予想される。このことから、この現象の解析方法について検討する必要がある。

よって、本研究では規則波を入射した場合について数値計算と水理実験による検討結果を報告するものである。

2. 線形解

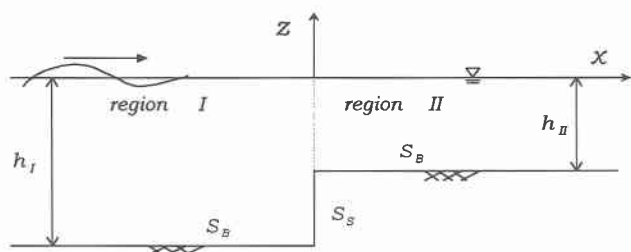


図-1 座標系

波動場をポテンシャル流れとし、非線形性の強さを表すパラメータ ε で速度ポテンシャル Φ と水面変位 η を摂動展開する。次に1次波として周期解を仮定すると1次オーダの速度ポテンシャルは、

$$\Phi^{(1)} = \phi^{(1)} e^{i\omega t} + c.c. \quad (1)$$

ここで $c.c.$ は、共役複素数を表す。

Region I (入・反射領域) には、入射波、反射波、減衰定在波が存在し、それらの和が1次オーダの速度ポテンシャルとなる。

$$\phi^{(1)} = i \frac{a}{2} \frac{g}{\omega} \left\{ \left(e^{-ikx} + C_R e^{ikx} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n e^{k_n x} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right\} + c.c. \quad (2)$$

また、Region II (透過領域) の1次オーダの速度ポテンシャルは、透過波、減衰定在波の和として、

$$\phi^{(1)} = i \frac{a}{2} \frac{g}{\omega} \left\{ C_T e^{-ikx} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n e^{-k_n x} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right\} + c.c. \quad (3)$$

となる。

このとき、波数 k , k_n は以下の分散関係式により決まる。

$$\omega^2 = gk \tanh kh = -gk_n \tanh k_n h \quad (4)$$

ここで、水深 h は各領域の水深 (h_I および h_{II}) とする。

反射率 C_R , 透過率 C_T , 減衰定在波の係数 S_n , Q_n は未知数であり、残された境界条件によって決定する。

3. 2次の解

次に2次の解について考える。2次の解は、時間関数としては $e^{2i\omega t}$ と時間的に変動しない定常項からなることから、

$$\Phi^{(2)} = \phi^{(2)} e^{2i\omega t} + \varphi^{(2)} + c.c.$$

2次の速度ポテンシャルの各成分(2倍周波数成分と定常成分、それらの共役複素数)は、独立して解くことが可能であり、2倍周波数成分の基礎方程式と境界条件を示すと、

$$\Delta \phi^{(2)} = 0 \quad (5)$$

$$g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - 4\omega^2 \phi^{(2)} = i\omega \left\{ \phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} - 2 \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 - 3 \frac{\omega^4}{g^2} \left(\phi^{(1)} \right)^2 \right\} \quad (6)$$

on $z = 0$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad S_B \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad S_s \quad (8)$$

ここで、 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ とする。

基礎方程式(5)と水面、底面の境界条件(6), (7)を満足する2次オーダの拘束波は、

Region I で、

$$\begin{aligned} \phi_B^{(2)} = & A_1 e^{-2ikx} \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} \\ & + A_2 e^{2ikx} \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_{3n} e^{(k_n - ik)x} \frac{\cosh(k + ik_n)(z+h)}{\cosh(k + ik_n)h} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_{4n} e^{(k_n + ik)x} \frac{\cosh(k - ik_n)(z+h)}{\cosh(k - ik_n)h} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{5mn} e^{(k_m + k_n)x} \frac{\cos(k_m + k_n)(z+h)}{\cos(k_m + k_n)h} \\ & + A_6 \end{aligned} \quad (9)$$

$$A_1 = -\frac{ia^2 g^2}{4\omega} \frac{3(k^2 - \omega^4 / g^2)}{2gk \tanh 2kh - 4\omega^2}$$

$$A_2 = -\frac{ia^2 g^2}{4\omega} \frac{3(k^2 - \omega^4 / g^2)}{2gk \tanh 2kh - 4\omega^2} C_R^2$$

$$A_{3n} = -\frac{ia^2 g^2}{4\omega} \frac{k^2 - k_n^2 + 4ikk_n - 6\omega^4 / g^2}{g(k + ik_n) \tanh(k + ik_n)h - 4\omega^2} S_n$$

$$A_{4n} = -\frac{ia^2 g^2}{4\omega} \frac{k^2 - k_n^2 - 4ikk_n - 6\omega^4 / g^2}{g(k - ik_n) \tanh(k - ik_n)h - 4\omega^2} C_R S_n$$

$$A_{5mn} = -\frac{ia^2 g^2}{4\omega} \frac{k_n^2 + 2k_m k_n + 3\omega^4 / g^2}{g(k_m + k_n) \tan(k_m + k_n)h + 4\omega^2} S_m S_n$$

$$A_6 = -\frac{ia^2 g^2}{4\omega} \frac{k^2 + 3\omega^4 / g^2}{2\omega^2}$$

Region II では、

$$\begin{aligned} \phi_B^{(2)} = & B_1 e^{-2ikx} \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} e^{-(k_n + ik)x} \frac{\cosh(k - ik_n)(z+h)}{\cosh(k - ik_n)h} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{3nm} e^{(k_m + k_n)x} \frac{\cos(k_m + k_n)(z+h)}{\cos(k_m + k_n)h} \end{aligned} \quad (10)$$

$$B_1 = -\frac{ia^2 g^2}{4\omega} \frac{3(k^2 - \omega^4 / g^2)}{2gk \tanh 2kh - 4\omega^2} C_T^2$$

$$B_{2n} = -\frac{ia^2 g^2}{4\omega} \frac{k^2 - k_n^2 - 4ikk_n - 6\omega^4 / g^2}{g(k - ik_n) \tanh(k - ik_n)h - 4\omega^2} C_T Q_n$$

$$B_{3mn} = -\frac{ia^2 g^2}{4\omega} \frac{k_n^2 + 2k_m k_n + 3\omega^4 / g^2}{g(k_m + k_n) \tan(k_m + k_n)h + 4\omega^2} Q_m Q_n$$

となる。

この拘束波は基礎方程式(5)、水面条件(6)、底面条件(7)を満たしているが、ステップ前面での境界条件(8)と2つの領域の接続条件は満たしていない。従って、すべての条件を満たす完全な解を得るには、新たな項を考える必要がある。一般に非斉次な微分方程式の解は、非斉次項を含んだ方程式の解である特解と、非斉次項を零とおいた一般解との和で表される。ここで、一般解の未知定数は境界条件によって決定される。この場合、これまで得られた拘束波は、水面条件(6)の非斉次項を残した方程式の解であるから特解といえる。従って、完全な解を得るには、(6)の非斉次項を零とした方程式の解（一般解）を加える必要がある。すなわち、

$$\Delta \phi^{(2)} = 0 \quad (11)$$

$$g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - 4\omega^2 \phi^{(2)} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad S_B \quad (13)$$

(11)~(13)の解を加えることにより、完全な解が得られる。つまり、2次オーダの速度ポテンシャルは、拘束波と自由波を合わせて、

$$\Phi^{(2)} = (\phi_B^{(2)} + \phi_F^{(2)}) e^{2i\omega t} \quad (14)$$

となる。

自由波の発生は、ステップの存在により2領域で異なった拘束波となり、それらは接続境界（ステップ先端上）で不

連続となり、それを補填する自由波が発生する。よって、自由波はステップ先端上から離れる方向に進行し、時間関数としては拘束波の時間関数と同様の倍周波数成分を持たなければならない。

従って、Region I の解は、ステップから離れる方向に向かう自由波とその減衰定在波の和として、

$$\phi_F^{(2)} = i \frac{g}{2\omega} \left\{ E_0 e^{ik_F x} \frac{\cosh k_F (z+h)}{\cosh k_F h} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{k_{Fn} x} \frac{\cos k_{Fn} (z+h)}{\cos k_{Fn} h} \right\} + \text{c.c.} \quad (15)$$

Region II の解は、ステップから離れる方向に向かう自由波とその減衰定在波の和として、

$$\phi_F^{(2)} = i \frac{g}{2\omega} \left\{ F_0 e^{-ik_F x} \frac{\cosh k_F (z+h)}{\cosh k_F h} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-k_{Fn} x} \frac{\cos k_{Fn} (z+h)}{\cos k_{Fn} h} \right\} + \text{c.c.} \quad (16)$$

となる。また、分散関係式は

$$4\omega^2 = gk_F \tanh k_F h = -gk_{Fn} \tan k_{Fn} h \quad (17)$$

ここで(15)、(16)中の E_0 、 F_0 、 E_n 、 F_n は未知数であり、拘束波と自由波を合わせた 2 次オーダの速度ポテンシャルが、残された条件であるステップ前面の境界条件と接続条件を満足するように決定される。

4. 解析方法

1 次オーダの解析は、従来、井島 (1971) の選点法 (領域分割法) が使用されてきた。この方法で解かれた解は、(2)、(3) のように三角関数の級数和で表されているため、Gibbs の現象が起こる。よって、選点では各境界条件を満足するが、選点以外ではステップ前面の境界条件を満たされることはなく、接続条件も満たされない。選点法で 2 次オーダの解析について考えた場合、線形解が厳密な解となっていないために、2 次の解の信頼性がなくなると考えられる。合田等 (1998) は、選点法を用いた解析として、拘束波における減衰定在波の 2 次オーダの項を省略し、水底から水面までの積分値について連続式を満足させる方法で解析をしている。

2 次オーダの水面条件(6)からも分かるように、2 次オーダの解は 1 次の解に大きく影響されるために、ステップ前面の境界条件と接続条件を満足しない選点法は使用せずに境界要素法による解析を行った。数値計算法は一般的に少なからず数値計算誤差が含まれているが、境界要素法の微小セグメント内の積分に Legendre-Gauss の積分公式を使用することで、精度の向上を図っている。また、選点法は、領域を直線的に分割できる場合 (矩形ステップ)

の解析に限られるが、境界要素法ではステップ先端の形状が任意形状の場合にも、発生する自由波の振幅の算定に使用できると考えられるため、境界要素法を使用することとした。境界要素法で解析するにあたり、入・反射側、透過側に仮想境界を設け、1 次オーダの解析の場合、入・反射境界では(2)、透過側では(3)を仮想境界上の速度ポテンシャルとし、2 次オーダの解析では、入・反射境界では(9)と(15)の和、透過側では(10)と(16)の和を仮想境界上の 2 次の速度ポテンシャルとして、その係数を未知数とした。

5. 実験方法

実験水槽は幅 25cm、深さ 50cm、長さ 20m の断面 2 次元水槽を用い、造波機として吸収式造波装置を使用した。ステップは高さ 10.5cm、19.0cm の 2 通り、Region I の水深を 30cm、40cm の 2 通りとした。また、実験波は入射周期が 0.6sec~1.3sec の間とし、入射振幅は 1cm、2cm とした。このとき容量式波高計を用いて波高の計測を行った。

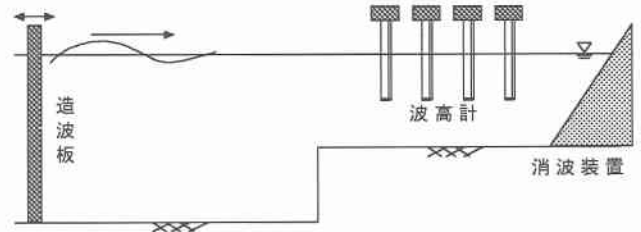


図-2 実験装置

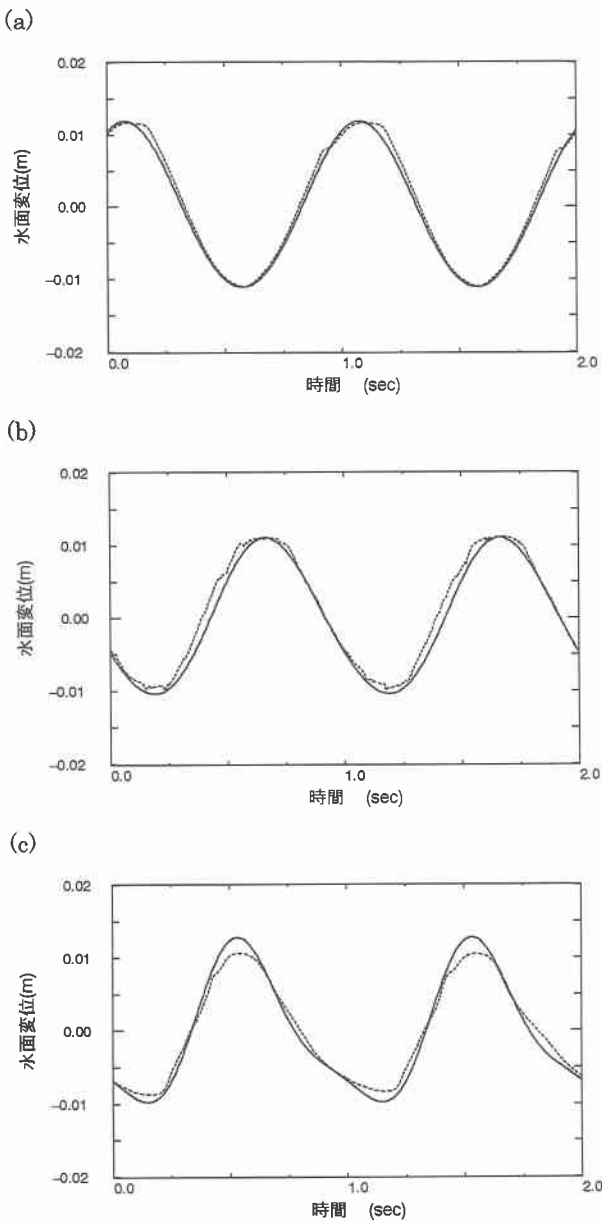
6. 結果

図-3 は、入・反射側 ($x = -2.77\text{m}$)、ステップ先端上 ($x = 0.0\text{m}$)、透過側 ($x = 3.62\text{m}$) の位置の水面波形の時間変化を表している。横軸を時間、縦軸は水面変位である。実線が実験値、破線は計算値を表している。また、水深 30cm、入射周期は 1.0sec とした。この時、それぞれ実験値と位相を合わせている。この図から、実験値と計算値は非常に良く一致していることが分かる。特に、透過側(c)の水面波形は、発達した自由波が、1 次波、拘束波と重なり合っていることが分かる。このとき、実験値と計算値が一致していると考えれば、計算上の自由波が実験においても発生していたことになる。よって、計算による 2 次の自由波の水面波形について次に示す。

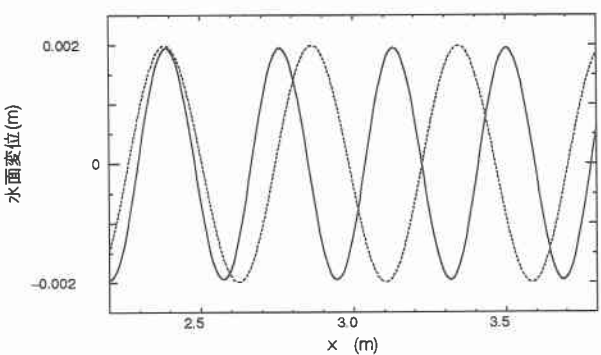
図-4 は、透過側 (Region II) における 2 次オーダの拘束波と自由波の波形を表している。横軸は位置 x (m)、縦軸は水面変位 (m) である。また、実線は自由波、破線は拘束波を表している。この図から、自由波は拘束波と同程度の振幅を持って進行していることが分かる。この場合、1 次波の振幅に対して、20% 程度の振幅を持った自由波が発生していることとなる。

次にステップ高と自由波振幅の関係について、図-5 として、ステップ高を変化させたときの透過側 (Region II) の自由波振幅について示す。この図は、入・反射側 (Region I) の水深を 0.3m、○は入射周期 (1 次波) を 1.0sec、●は 1.2sec、□は 0.8sec とし、横軸にステップ高 (m)、縦

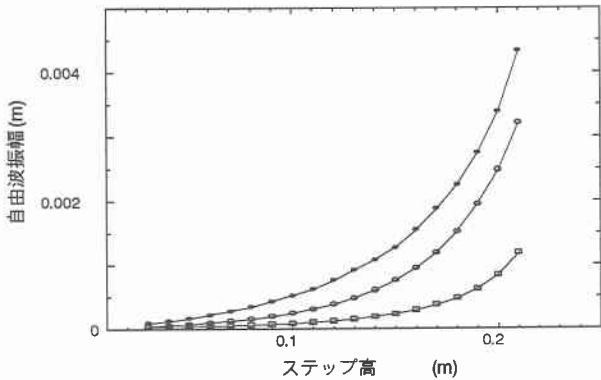
軸に自由波振幅(m)とした。この図から、ステップが高くなると自由波振幅が大きくなる。また、同じステップ高であれば、入射周期が短くなるとステップを感じにくくなるため自由波振幅が小さくなっている。このことは良く現象を表現し、計算方法の妥当性を示している。また、ステップを高くし入射周期を長くすれば、自由波振幅が大きくなることを示している。



図－3 水面波形の時間変化
入射周期；1.0sec，ステップ高；19cm
(a)入・反射側； $x = -2.77\text{m}$
(b)ステップ先端上； $x = 0.0\text{m}$
(c)透過側； $x = 3.62\text{m}$



図－4 2次波の水面波形
入射周期；1.0sec，ステップ高；19cm



図－5 Region IIの自由波振幅
入・反射側 (Region I) の水深；0.3m

7. まとめ

この現象は入射振幅、入射周波数、両領域の水深によって非線形性の強さや自由波振幅の大きさが変わるが、本研究で設定した波の場合、境界要素法を用いた2次オーダまでの解析では、実験値と計算値が非常に良く一致している事から解析方法の妥当性が検証された。このとき、2次の自由波は拘束波と同程度の振幅を持って進行していく場合があることが分かった。

今後の課題としては、波の条件によっては、より高次の3倍、4倍周波数成分が必要な場合があると考えられ、その解析が必要である。また、不規則波がステップに入射したときに発生する長周期自由波の解析をする必要がある。

参考文献

- 1) 井島武士：最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用，水工学夏期研修会講義集，pp.B-1-1～30，1971。
- 2) 合田良実，岡崎健一：矩形ステップ上の非線形波浪干渉と碎波限界，海岸工学論文集，第45巻，pp.46-50，1998。