

浮遊砂を含む平面2次元一般座標河床変動モデル

A Study on the 2-diminsinal model of generalized coordinate system with suspended sediment load

北海道大学大学院 ○学生員 伊東祐一郎 (Yuichiro ITO)
北海道大学大学院 正員 清水康行 (Yasuyuki SHIMIZU)

1. はじめに

水の流れによって河床を構成する砂礫が移動する場合に、その移動形式は大別して掃流と浮遊の2つがある。掃流砂は砂礫が流水の流れ方向の抵抗力によって河床のごく近くを移動する流砂であり、浮遊砂は乱流拡散現象によって上方に巻き上げられ、流路断面内を流水とともに輸送される形式の流砂である。浮遊砂を含む流れは、例えばダム貯水池の堆砂や湿原の土砂堆積による乾燥化、また砂州の形成による河口部の閉塞など河床変動に大きな影響を与え、實際上、非常に重要な問題である。

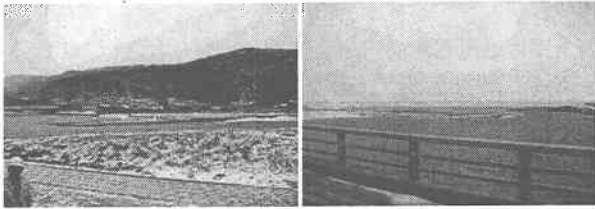


図 1: 河口部の閉塞：尻別川

河口部の閉塞などは砂州の生成・消滅過程が平面的な流況に大きく影響を受けており、そのメカニズム解明のためにも2次元以上の計算モデルの発達が急務である。また、河川工学上の諸問題は複雑な境界を有することが多い。本研究もこういった観点から基本となる計算モデルには境界に計算格子を適合させることが可能な、平面2次元の一般座標系モデルを選択した。掃流砂のみのモデルは多くの研究がなされており、その発達はめざましいものがある。しかし、浮遊砂に関する諸問題は、複雑、かつ広範多岐にわたるため、未解明の問題も多く残されているのが現状である。

本研究は、平面2次元一般座標においても、浮遊砂を取り扱えるモデルの構築に努めた。流れ場を解く場合と同様に、浮遊砂輸送に関する基礎式を Non-Advection Phase (外力項) と Advection Phase (移流項) に分離し、Advection Phase には保存性に優れた CIP 法を用いて計算した。この手順は流れ場の計算手法が利用可能であるため、計算プログラム作成上、非常に有益である。

また、モデル構築の各段階において、濃度輸送を sine-generated curve の蛇行水路に適用し、その様子を視覚的に示した。そして、浮遊砂が発生する水理条件下においての試験的な河床変動計算を行い、掃流砂のみのモデルとの比較・検証を行った。

2. 流れの基礎式

流れの計算は以下に示す、連続式と運動方程式 (ξ, η 方向) による。座標系は一般座標系である。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{hu^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{hu^\eta}{J} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\xi}{\partial t} + u^\xi \frac{\partial u^\xi}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta} + \alpha_1 u^\xi u^\xi + \alpha_2 u^\xi u^\eta + \alpha_3 u^\eta u^\eta \\ = -g \left[(\xi_x^2 + \xi_y^2) \frac{\partial H}{\partial \xi} + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial H}{\partial \eta} \right] \\ - \frac{C_d u^\xi}{J} \sqrt{(\eta_y u^\xi - \xi_y u^\eta) + (-\eta_x u^\xi + \xi_x u^\eta)} + D^\xi \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} + u^\xi \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} + \alpha_4 u^\xi u^\xi + \alpha_5 u^\xi u^\eta + \alpha_6 u^\eta u^\eta \\ = -g \left[(\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y) \frac{\partial H}{\partial \xi} + (\xi_x^2 + \xi_y^2) \frac{\partial H}{\partial \eta} \right] \\ - \frac{C_d u^\eta}{J} \sqrt{(\eta_y u^\xi - \xi_y u^\eta) + (-\eta_x u^\xi + \xi_x u^\eta)} + D^\eta \quad (3) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \xi_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \xi_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \quad \alpha_2 = 2 \left(\xi_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \xi_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\ \alpha_3 = \xi_x \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \xi_y \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}, \quad \alpha_4 = \eta_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \eta_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \alpha_5 = 2 \left(\eta_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right), \quad \alpha_6 = \eta_x \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \eta_y \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 a_b は $\partial a / \partial b$ であることを示し、 t は時間、 h は水深、 x, y は直交座標軸、 ξ, η は一般座標軸、 u^ξ, u^η は ξ, η 方向流速の反変成分、 J は座標変換のヤコビアン、 H は水位である。これらのうち、反変成分およびヤコビアンの定義は以下に従う。

$$u^\xi = (\xi_x u + \xi_y v) / J, \quad u^\eta = (\eta_x u + \eta_y v) / J \quad (5)$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \quad (6)$$

3. 浮遊砂輸送に関する基礎式 (水深平均流)

一般座標系における浮遊砂輸送の連続式は次式に示される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{c}h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u^\xi \bar{c}h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^\eta \bar{c}h}{J} \right) \\ = \left(\frac{q_{su}}{J} - \frac{w_f c_b}{J} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{c}$ は水深平均の浮遊砂濃度、 q_{su} は河床からの浮遊砂の浮上量、 w_f は砂粒の沈降速度、 c_b は河床近傍での浮遊砂濃度である。拡散項については簡単のため、省略して記述した。ここで、(1) 式、すなわち流れの連続式を用いて上式を展開すると、次式ようになる。

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u^\xi \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial \bar{c}}{\partial \eta} = (q_{su} - w_f c_b) / h \quad (8)$$

さらに、数値的に解きやすくするために、上式を Advection Phase (移流項) と Non-Advection Phase (外力項) に分ける (分離解法)。Advection Phase については CIP 法を用いて解く。この手法は流れの計算と同様の手順をとるので、計算プログラム作成上も非常に有益である。

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u^\xi \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial \bar{c}}{\partial \eta} = 0 \quad : \text{Advection Phase} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = (q_{su} - w_f c_b) / h \quad : \text{NonAdvectionPhase} \quad (10)$$

(8) 式中の水深平均浮遊砂濃度 $\bar{c}$ と河床近傍の浮遊砂濃度 c_b の関係は水深方向の濃度分布式より求められるが、ここでは以下に示す指数型の分布式を採用するものとする。

$$c = c_b \exp(-\beta \zeta) \quad (11)$$

ただし、 $\beta = w_f h / \epsilon$, $\zeta = z / h$, z は河床からの距離, ϵ は水深平均の拡散係数 ($= \kappa u_* h / 6$), κ はカルマン定数 ($= 0.4$), c は河床から z の距離における浮遊砂の濃度である。水深平均の浮遊砂濃度 $\bar{c}$ は式 (11) を河床から水面まで積分することにより次式となる。

$$\bar{c} = \frac{1}{h} \int_0^1 c d\zeta = \frac{c_b}{\beta} (1 - \exp(-\beta)) \quad (12)$$

上式が (8) 式中の水深平均浮遊砂濃度 $\bar{c}$ と河床近傍の浮遊砂濃度 c_b の関係である。

(8) 式中の浮遊砂の単位面積あたりの浮上量 q_{su} の算定には、次式の板倉・岸の式¹⁾を用いる。

$$q_{su} = K \left(\alpha_* \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \frac{gd}{u_*} \Omega - w_f \right) \quad (13)$$

$$\Omega = \frac{\tau_*}{B_*} \frac{\int_0^\infty \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) d\xi}{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) d\xi} + \frac{\tau_*}{B_* \eta_0} - 1 \quad (14)$$

また、 $a' = B_* / \tau_* - 1 / \eta_0$, $\eta_0 = 0.5$, $\alpha_* = 0.14$, $K = 0.008$, ρ_s は浮遊粒子の密度, ρ は水の密度である。 B_* は揚力算定の際の速度に摩擦速度 u_* を適用するための換算係数であり、均一粒径を考えているので、 $B_* = 0.143$ である。砂粒の沈降速度については次式の Rubey の実験式を用いる。

$$\frac{w_f}{\sqrt{sgd}} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\nu^2}{sgd^3}} - \sqrt{\frac{36\nu^2}{sgd^3}} \quad (15)$$

ここで、 ν は水の動粘性係数 ($= 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$), s は砂粒の水中比重 ($= 1.65$), d は砂粒の粒径 (cm), g は重力加速度である。

4. 河床変動の基礎式

平面 2 次元一般座標系における掃流砂・浮遊砂を含む河床変動の連続式を次式に示す。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z_b}{J} \right) + \frac{1}{1-\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{q^\xi}{J} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{q^\eta}{J} \right) + \left(\frac{q_{su}}{J} - \frac{w_f c_b}{J} \right) \right] = 0 \quad (16)$$

ただし、 z_b は河床の標高, λ は空隙率, q^ξ , q^η は ξ , η 方向の単位幅掃流砂量の反変成分である。単位幅流砂量の反変成分も実際の単位幅流砂量の次元である [長さ²/時間] で表すためには、以下の変換が必要となる。

$$\tilde{q}^\xi = \xi_r q^\xi, \quad \tilde{q}^\eta = \eta_r q^\eta \quad (17)$$

ここで、 $\tilde{q}^\xi$, $\tilde{q}^\eta$ は ξ , η 方向の掃流砂量である。また、 ξ_r , η_r は局所的な格子サイズ $\Delta \tilde{\xi}$, $\Delta \tilde{\eta}$ と、一般座標上の格子サイズ $\Delta \xi$, $\Delta \eta$ との比であり、次式で定義される。

$$\frac{\Delta \tilde{\xi}}{\Delta \xi} = \xi_r, \quad \frac{\Delta \tilde{\eta}}{\Delta \eta} = \eta_r \quad (18)$$

ξ , η 方向の掃流砂量 $\tilde{q}^\xi$, $\tilde{q}^\eta$ は渡邊ら³⁾の方法に準拠し、次式で与えられる。

$$\tilde{q}^\xi = q_b \left[\frac{\tilde{u}_b^\xi}{V_b} - \gamma \left(\frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\xi}} + \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\eta}} \right) \right] \quad (19)$$

$$\tilde{q}^\eta = q_b \left[\frac{\tilde{u}_b^\eta}{V_b} - \gamma \left(\frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\eta}} + \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\xi}} \right) \right] \quad (20)$$

ただし、 $\tilde{u}_b^\xi$ および $\tilde{u}_b^\eta$ はそれぞれ ξ および η 方向の河床近傍の流速, q_b は全掃流砂量, V_b は河床近傍の合成流速, θ は ξ 軸と η 軸のなす角度である。 γ は斜面勾配による流砂の補正係数であり、長谷川⁵⁾によれば次式で与えられる。

$$\gamma = \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \quad (21)$$

ただし、 μ_s および μ_k は河床材料の静止摩擦係数および動摩擦係数である。(一般的な値として $\mu_s \mu_k = 0.5$)。全掃流砂量 q_b は次の芦田・道上の式²⁾で求める。

$$q_b = 17 \tau_*^{3/2} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*} \sqrt{s_g d g^3} \right) \quad (22)$$

ここで、 s_g は砂粒の水中比重, g は重力加速度, d は河床材料の粒径である。

5. 河床近傍の流速 (2 次流の取り扱い)

水深平均流の流れに沿って、水深平均流速と河床近傍の流速の関係を次式のような単純な関係式で仮定する。

$$\tilde{u}_b^s = \beta V \quad (23)$$

ただし、 $\tilde{u}_b^s$ は水深平均流の流線 (以下単純に流線と呼ぶ) に沿った河床近傍の流速である。Engelund⁷⁾によれば、水深方向の流速分布に放物線分布を用いた場合、 β は次式となる。

$$\beta = 3(1-\sigma)(3-\sigma), \quad \sigma = \frac{3}{\phi_0 \kappa + 1} \quad (24)$$

ただし、 ϕ_0 は流速係数 ($= V/u_*$), κ はカルマン定数 ($= 0.4$) である。

一般に、流線が曲がっている場合には 2 次流 (螺旋流) が発生する。ここでは、この 2 次流による河床近傍の流速の算定に次式を用いる。

$$\tilde{u}_b^n = \tilde{u}_b^s N_* \frac{h}{r_s} \quad (25)$$

ただし、 $\tilde{u}_b^n$ は流線の方向に直交する方向 (流線方向から反時計回りに 90 度の方向) の河床近傍の流速, r_s は流線の曲率半径, N_* は定数 ($= 7$, Engelund⁷⁾) である。(23) 式および (25) 式より (19) 式および (20) 式中の V_b は、

$$V_b = \sqrt{\tilde{u}_b^s{}^2 + \tilde{u}_b^n{}^2} \approx \tilde{u}_b^s \quad (26)$$

となる。なお上式の近似は、一般に $\tilde{u}_b^n$ は $\tilde{u}_b^s$ より 1 オーダー小さい値となるためである。

(19) 式および (20) 式中、 ξ , η 方向の河床近傍流速 $\tilde{u}_b^\xi$, $\tilde{u}_b^\eta$ は、流線方向の河床近傍流速 $\tilde{u}_b^s$, 流線に直交する方向の河床近傍流速 $\tilde{u}_b^n$ を直交座標系に変換したのち、一般座標系に変換して求めるという手順をとる。

6. 計算結果

図-4 ~ 図-6 にモデル構築の基本段階における計算結果を示す。図-2 に示すような sine-generated curve の蛇行水路に初期条件図-2 として任意の濃度分布を与えて、それが移流・拡散する様子を示した。図-2 ~ 図-4 は通水開始から 67

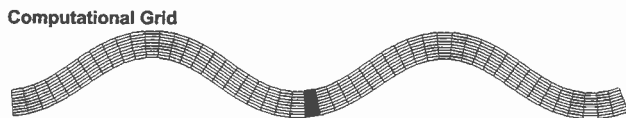


図 2: 計算格子

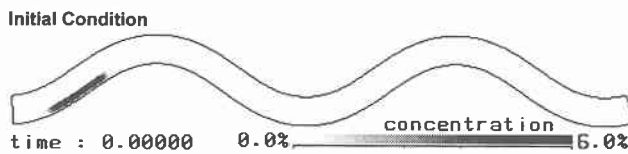


図 3: 初期条件

秒経過時点での濃度分布を表す。周期境界条件であるので、これは 21 波長分の湾曲水路を流下したことになる。

ここでの濃度は河床との交換が行われないので、浮遊砂濃度というよりは、任意の物質の濃度輸送を表現している。蛇行水路は流路幅: 0.2m, 蛇行波長: 2.2m, 起点蛇行角: 35°, 河床勾配: 1/111 である。計算格子は流下方向に 1 波長あたり 24 分割, 横断方向に 20 分割した。図-2 は横断方向の計算格子を半数に間引いて表示してある。また, 上・下流端における境界条件は周期境界条件である。すなわち下流端の水理量を最上流端に与え, 上流端の水理量を最下流端に与えた。

主要な水理条件は以下のとおりである。流量: $0.0026\text{m}^3/\text{s}$, 河床材料の粒径: 0.2mm, 砂粒子の水中比重: 1.65 である。ここでは, 流れが掃流砂・浮遊砂の混在領域に入るように, これらの値を選択した。図-4, 図-5 は移流・拡散とともにそれぞれの特徴をよく再現しているといえよう。

次に, 図-6 に濃度の平面的な輸送とともに, 鉛直方向での濃度輸送を考慮した計算結果を示す。つまり, 濃度の計算に, (8) 式に示す砂粒の浮上・沈降を表現する外力項を加えることにより, 濃度が浮遊砂濃度としての意味を持つ。任意に与えた濃度が移流・拡散するとともに, 河床から砂粒の巻き上げが生じ, 流路全体にわたって濃度が增大している。最終的にはある一定濃度で平衡状態に達する。

そして, この浮遊砂濃度を (16) 式により, 河床との交換に結び付け, 河床変動計算を行った。地形, 計算条件は濃度輸送の計算と同様である。

まず, 図-7 は掃流砂のみの河床変動計算結果であり, 初期河床からの変動量を表す。河床の変動は通水開始から 100 秒経過した時点で開始している。また, 図-1 の計算格子図の黒く塗りつぶした地点における横断面図も付記してある。横断面図の鉛直軸は河床コンター図と同様に初期河床からの変動量を表し, そのスケールは $-0.125\text{m} \sim 0.027\text{m}$ である。図-8, 図-9 は同様に, それぞれ, 掃流砂・浮遊砂混合モデル, 浮遊砂のみのモデルによる河床変動計算結果である。これらによると掃流砂のみのモデルと比べ, 浮遊砂混在モデルは湾曲部内岸側の砂州がより細長く, 滑らかな形状で形成されている。また, 横断面図から読み取れるように, 混在モデルの方が最大洗掘深が大きく計算されており, その位置も, より流路中心に近いことがわかる。ただし, 砂州が形成されるタイミングは掃流砂のみのモデルの方が早い。

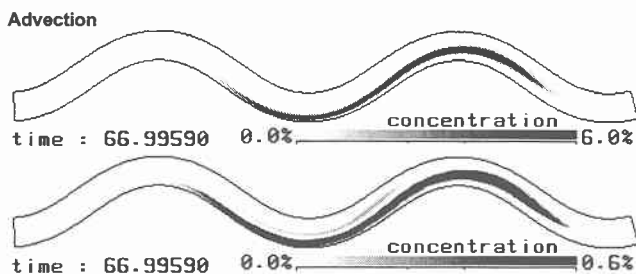


図 4: 濃度輸送: 移流のみ

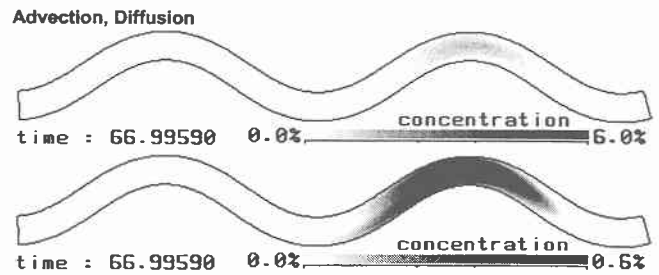


図 5: 濃度輸送: 移流/拡散

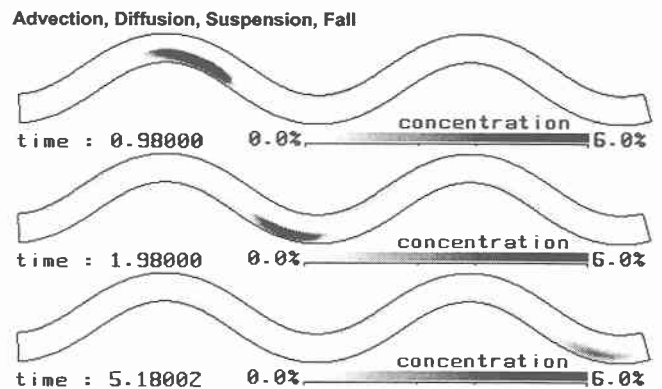


図 6: 濃度輸送: 移流/拡散/浮上/沈降

図 7: 河床変動計算 掃流砂のみ

— 444 —

Bed Load, Suspended Load

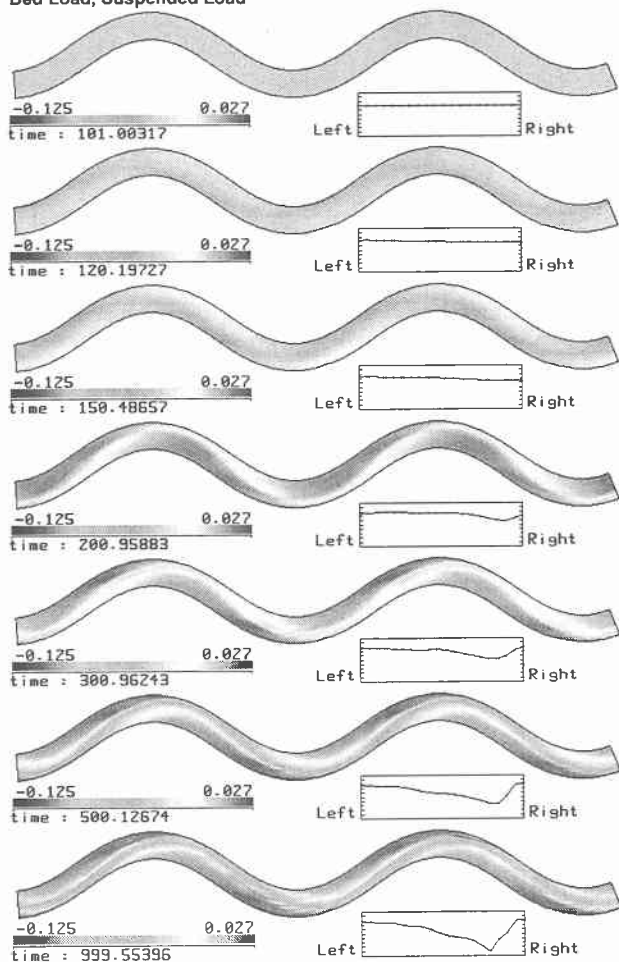


図 8: 河床変動計算 掃流砂/浮遊砂

Suspended Load

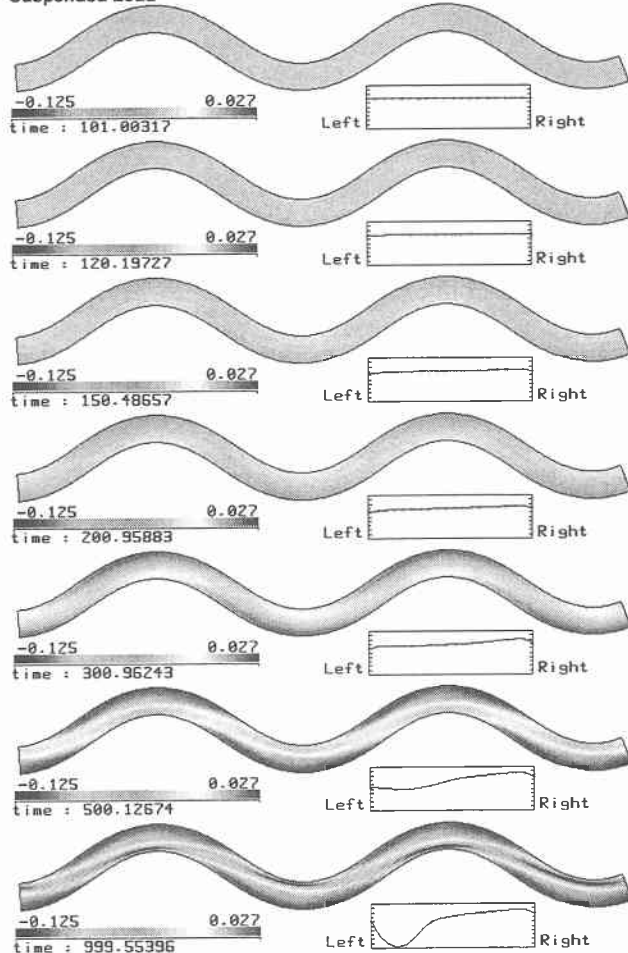


図 9: 河床変動計算 浮遊砂のみ

図-9 は浮遊砂のみのモデルの計算結果である。他の 2 つと決定的に異なるのは、湾曲部の内岸側で侵食し、外岸側で堆積が生じていることである。掃流砂を含むモデルは全くその逆である。これはおそらく、2 次流補正の有無によるものと思われる。掃流砂の場合は 5 章に前述のとおり、水深平均の流線に直交する方向での掃流砂を考えることにより、2 次流補正を行っている。すなわち、流路の湾曲部においては、その半径方向に内向きの砂粒の移動を生じる。本研究における浮遊砂輸送は水深平均流によるもので、2 次流補正は行われていない。今後はこの点が重要な課題である。

6. おわりに

本研究は浮遊砂を含む平面 2 次元一般座標河床変動モデルの構築をその目的とした。掃流砂・浮遊砂が混在して発生する水理条件下における計算では、掃流砂のみのモデルと比較し、興味深い違いが見られた。特に、流路湾曲部内岸側の砂州がより細長く形成された。さらには、最大洗掘深の増大も見られた。

また、本モデルは水深平均の流線に直交する方向に掃流砂量を考慮することにより、2 次流の効果を加味している。しかしながら、浮遊砂輸送には 2 次流による横断方向の土砂移動を考慮していない。したがって、浮遊砂の卓越する条件下においては、2 次流補正の効果が効いてこない。そこで、今後は浮遊砂の輸送量にも 2 次流の効果を補正する必要性が出てくる。浮遊砂は掃流砂と異なり、水深全体にわたって分布し、輸送される。よって、2 次流による横断方向の浮遊砂輸送量を推定するためには水深方向の流速分布と浮遊砂の濃度分布を積分するような形での補正が必要であろう。

参考文献

- 1) Itakura, T. and Kishi, T.: Open channel flow with suspended sediments. *Proc. of ASCE, HY8*, pp.1325-1343, 1980.
- 2) 芦田和男, 道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 206 号, pp.59-69, 1972
- 3) 渡邊明英, 福岡捷二, 安竹悠, 川口広司: 河道湾曲部における河床変動を抑制する樹木群水制の配置方法, 河川技術論文集, pp.285-290, 2001.
- 4) 長田信寿, 細田尚, 村本嘉雄, Md. Munsur Rahman: 移動一般座標系による側岸侵食を伴う河道変動の数値解析, 水工学論文集, pp.927-932, 1996.
- 5) 長谷川和義: 沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究, 北海道大学博士論文, pp.1-183, 1984.
- 6) 星清, 清水康行ら: 現場のための水理学, 北海道開発局土木試験所(現開発土木研究所)河川研究室編, 1988.
- 7) Engelund, F.: Flow and Bed Topography in Channel Bend, *Jour. of Hydr. Div., ASCE, Vol.100, HY11*, pp1631-1648, 1974.