

二段タンク型貯留関数モデルの未知定数推定に関する研究

Study on unknown parameters of the two series tank model coupled with a storage routing method.

北海学園大学工学部
 北海学園大学大学院
 北海道河川防災研究センター
 北海道工業大学工学部

○正 員 嵯峨 浩(Hiroshi Saga)
 学正員 高坂佳祐(Keisuke Kousaka)
 フェロー 星 清(Kiyoshi Hoshi)
 フェロー 橋本識秀(Norihide Hashimoto)

1. まえがき

流出解析モデルとして、直列三段あるいは四段のタンクモデルが多用されるが、未知定数が多くその同定に多大なる労を要する。著者らはこの欠点を改善するため二段タンク型貯留関数モデル^{1),2)}を開発し、その有効性を検討してきた。このモデルの上段タンクは表面流出成分、下段タンクは中間流出成分を表現するが、下段タンクにおける未知定数がオーダーレベルでばらつく流域もあり、同定過程における収束性や総合化に支障をきたす例がみられる。今後、このモデルを河道洪水追跡手法や予測手法に応用する場合、この点が大きな障害になることは容易に推測できる。本研究は、未知定数の総合化や他の計算手法への応用を視野に入れ、ハイドログラフ減水特性や流域特性などの情報から、この未知定数を最適化によらず決定することを検討したものである。具体的には、上段タンク、下段タンクとも3個の未知定数を有するが、下段タンクの全ての未知定数を固定し、上段タンクにおける3個の未知定数のみを数学的に最適化する流出モデルを構築したものである。また、数学的最適化手法において最も重要な要因となる感度係数を、上段から下段タンクへ伝達させる手法を開発し、収束性を高める工夫も行った。このモデルの有効性を実証するため、流出解析において計算精度が悪いとされる釧路川や標津川における洪水を対象に流出計算を行い、実用上十分な計算精度を有するモデルであることを確認した。

2. 流出モデル

本研究の流出モデルを図-1に示す。従来のタンクモデルの側方流出孔の高さは、貯留関数法の貯留効果で表現されている。各タンクの支配方程式と未知定数の関係式^{3),4),5),6)}は次式で与えられる。

上段タンク

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = r - q_1 - p_s \\ S_1 = k_1 q_1^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ p_s = \alpha_1 q_1 \end{cases} \quad \cdots(1)$$

$$\begin{cases} k_1 = c_1 A^{0.24}, k_2 = c_2 k_1^2 (\bar{r})^{-0.2648}, 1 + \alpha_1 = c_3 \\ p_1 = 0.6, p_2 = 0.4648 \end{cases} \quad \cdots(2)$$

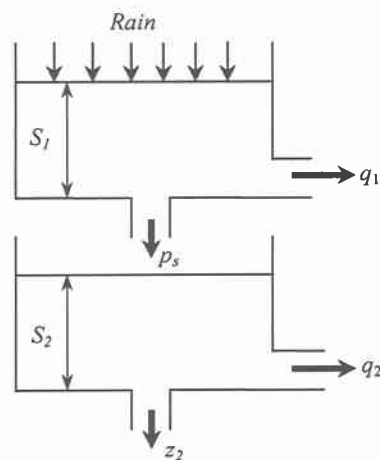


図-1 二段タンク型貯留関数モデル

下段タンク

$$\begin{cases} \frac{dS_2}{dt} = p_s - q_2 - z_2 \\ S_2 = k_4 q_2 + k_5 \frac{dq_2}{dt} \\ z_2 = \alpha_2 q_2 \end{cases} \quad \cdots(3)$$

$$q = q_1 + q_2 \quad \cdots(4)$$

ここに、 S_1, S_2 : 貯留高 (mm)、 r : 観測雨量 (mm/hr)、 $\bar{r}$: 平均雨量 (mm/hr)、 A : 流域面積 (km²)、 q_1, q_2 : 側方流出高 (mm/hr)、 p_s, z_2 : 浸透量 (mm)、 k_1, k_2, k_4, k_5 : 貯留係数、 α_1, α_2 : 損失係数、 p_1, p_2 : 貯留指数である。なお、観測流量 q_{ob} をそのまま扱うのが理想であるが、後述の理論展開でゼロ初期条件を必要とするので、以下のように基底流出成分を分離⁷⁾する。

$$q^*(t) = q_{ob}(t) - Q_B \exp(-\lambda t) \quad \cdots(5)$$

ここに、 Q_B : 初期流出高 (mm/hr)、 λ : 減水係数以後、(5)式の処理をした流量 q^* を実測流量として扱う。

上段タンクにおける未知定数 c_1, c_2, c_3 の3個は数学的最適化手法により同定され、下段タンクにおける未知定数の取り扱いには以下ようになる。

3. 下段タンク未知定数の取り扱い

(3)式より次式の下段タンク支配方程式を得る。

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c_6 \frac{dq_2}{dt} + c_5 q_2 = c_4 p_s, \quad \dots\dots(6)$$

$$\text{ここで} \quad \begin{cases} c_6 = k_4 / k_5 \\ c_5 = (1 + \alpha_2) / k_5 \\ c_4 = 1 / k_5 \end{cases} \quad \dots\dots(7)$$

(6)式で示されるシステムのゲイン G は次式である。

$$G = \frac{c_4}{c_5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\omega / \sqrt{c_5}\right)^2\right\}^2 + (c_6 / c_5)^2 \cdot \omega^2}} \quad \dots\dots(8)$$

$\omega = 2\pi f$ として整理すると

$$G = \frac{c_4}{c_5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - (f / f_c)^2\right\}^2 + \delta^2 \cdot (f / f_c)^2}} \quad \dots\dots(9)$$

$$\text{ここに、} \quad \begin{cases} f_c = 1 / (2\pi) \cdot \sqrt{c_5} \\ \delta = c_6 / \sqrt{c_5} \end{cases} \quad \dots\dots(10)$$

(6)式が非振動型の解を持つための条件から

$$c_6^2 / 4 - c_5 \geq 0, \quad \therefore c_6 / \sqrt{c_5} = \delta \geq 2 \quad \dots\dots(11)$$

δ は無次元減衰係数で、日野・長谷部の AR フィルター理論⁸⁾によると2～3程度の範囲である。

一方、ハイドログラフ減水部は、次式で与えられる。

$$y(t) = y_0 \exp(-t / T_c) \quad \dots\dots(12)$$

y_0 は任意の流出量である。(6)式で入力 p_s が消滅し、時間が十分に大きくなると、 q_2 の変化が緩やかになって高次の微分項を無視することができる。

$$c_6 \frac{dq_2}{dt} + c_5 q_2 = 0, \quad \therefore q_2 = q_B \exp\left(-\frac{c_5}{c_6} t\right) \quad \dots\dots(13)$$

ここで、 q_B は y_0 と同様である。(12)式と(13)式から

$$T_c = c_6 / c_5 \quad \dots\dots(14)$$

T_c はハイドログラフ減水曲線のうち一番低減率が小さいところの時定数である。以上より、未知定数 c_5 、 c_6 を次のように表すことができる。

$$\begin{cases} c_5 = (\delta / T_c)^2 \\ c_6 = \delta^2 / T_c \end{cases} \quad \dots\dots(15)$$

また、 j を虚数単位とすると(6)式の伝達関数は次式で表される。

$$H(\omega) = \frac{\int_0^\infty q_2(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty q_2(t) \sin \omega t dt}{\int_0^\infty p_s(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty p_s(t) \sin \omega t dt} \quad \dots\dots(16)$$

上式で $\omega = 2\pi f = 0$ とすると、(8)式との関係から

$$c_4 / c_5 = \sum q_2(t) / \sum p_s(t) \quad \dots\dots(17)$$

(17)式のように、未知定数 c_4 と c_5 の比は解析期間内の総中間流出量と総浸透量の比で表される。自然現象の総入力と総出力の比であるから、当然

$$c_4 / c_5 < 1 \quad \dots\dots(18)$$

となる。 c_5 が決定すると(17)式から c_4 も決めることができるが、どの程度に見積もるかの問題が残る。解析した結果では一般的に0.7程度、火山灰等の浸透性の強い流域ではそれよりも大きく、その逆の流域では小さく見積もれば良く、流域ごとに固定した値で対処できるようである。以上のように、ハイドログラフ減水部や流域特性の情報により、二段目タンクの未知定数を全て既知量として取り扱うことが可能である。

4. 支配方程式の数値計算

数値計算の方法は、参考文献(9)に詳述されているのでここではシステム方程式のみを記述する。

上段タンクの支配方程式(1)式を用いて側方流出高を求めるには、次のような変数変換を行う。

$$y_1 = q_1^{p_2}, \quad y_2 = \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \quad \dots\dots(19)$$

この結果、次のようなシステム方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(20)$$

ここに、

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} y_2 - \frac{c_3}{k_2} y_1^{\frac{1}{p_2}} \\ a_2 = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} \\ d_2 = \frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} + \frac{c_3}{k_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\frac{1}{p_2}} + \frac{r}{k_2} \end{cases} \quad \dots\dots(21)$$

下段タンクも同様に

$$y_3 = q_2, \quad y_4 = \frac{dq_2}{dt} \quad \dots\dots(22)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_5 & -c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_4 p_s \end{bmatrix} \quad \dots\dots(23)$$

ここで、上段タンクからの浸透量 p_s は、 k_1 、 k_2 、 c_3 が指定されると一義的に決定されるので、 p_s は降雨量と同様に既知量として取り扱う。これらのシステム方程式を解くと計算流量 q は次式となる。

$$q = q_1 + q_2 = y_1^{\frac{1}{p_2}} + y_3 \quad \dots\dots(24)$$

5. 感度係数の算出

上段タンクからの浸透量 p_s は $p_s(k_1, k_2, c_3)$ となるので、(23)式からも明らかなように y_3 と y_4 も未知定数(k_1 、 k_2 、 c_3)の変化に対応して変化する。すなわち、 $y_3(k_1, k_2, c_3)$ 、 $y_4(k_1, k_2, c_3)$ となる。

表示法を簡略化するために

$$K_1 = [k_1 \quad k_2 \quad c_3]^T \quad (T: \text{転置記号})$$

とすると、上段タンクの感度係数ベクトルは

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial K_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ a_1 I & a_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial K_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (25)$$

ここに、 $G_2 = [g_1 \ g_2 \ g_3]^T$

$$\begin{cases} g_1 = -\frac{1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} y_2 \\ g_2 = \frac{1}{k_2^2} \left(k_1 \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} y_2 + c_3 y_1^{\frac{1}{p_2}} - r \right) \\ g_3 = -\frac{1}{k_2} y_1^{\frac{1}{p_2}} \end{cases} \quad \cdots \cdots (26)$$

下段タンクは

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -c_5 I & -c_6 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_1 \\ c_4 \frac{\partial p_s}{\partial K_1} \end{bmatrix} \quad \cdots (27)$$

ここで、 0 は $[3 \times 3]$ のゼロ行列、 0_1 は $[3 \times 1]$ のゼロベクトル、 I は $[3 \times 3]$ の単位行列である。 q に関する感度係数は上式を解き(24)式に従って計算すれば良い。(27)式のように、上段タンクの未知定数の影響を浸透量の感度係数 $[c_4 \cdot \partial p_s / \partial K_1]$ によって下段タンクに伝達することで計算を容易にさせ、収束性を向上させることができる。この方法は河道洪水追跡手法や他の最適化手法にも適用が可能な計算方法である。

6. モデル定数の数学的最適化

モデル定数の最適化のため、目的関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} Min J &= \sum_{i=1}^N \frac{[q^*_i - q_i(K_1)]^2}{q^*_i} \\ &= \sum_{i=1}^N e_i^2 \end{aligned} \quad \cdots \cdots (28)$$

ここに、 q^*_i : 実測流量系列、 q_i : 計算流量系列、 e_i : 誤差系列、 N : 流量標本数

(28)式から次式が得られる。

$$\frac{\partial e_i}{\partial K_1} = -\frac{1}{\sqrt{q^*_i}} \frac{\partial q_i(K_1)}{\partial K_1} - W_i \quad \cdots \cdots (29)$$

W_i は $[3 \times 1]$ 行列である。定数ベクトルを(30)式で定義し、上式の誤差項ベクトルを E とすると、未知定数の補正ベクトル ΔK_1 は次式で計算される。

$$(K_1)^{m+1} = (K_1)^m + \Delta K_1 \quad \cdots \cdots (30)$$

$$[W^T W] \Delta K_1 = [W^T E] \quad \cdots \cdots (31)$$

ここに、 ΔK_1 : (3×1) 行列、 W : $(N \times 3)$ 行列、 E : $(N \times 1)$ 行列

(31)式を解くにあたり、(32)式のように収束許容限界値 ε より小さくなった時を収束とする。

$$\varepsilon \geq |\Delta K_1 / K_1| \quad \cdots \cdots (32)$$

なお、本研究では Cholesky 法を用いて、 ΔK を効率良く算定できる成分回帰手法を併用した。

7. 実流域への適用

釧路川水系弟子屈地点、標茶地点および標津川における洪水を対象に流出計算を行った。表—1 に計算に必要な諸量を示す。

表—1 各流域の計算に用いた諸量

	弟子屈	標茶	標津
流域面積 $A(\text{km}^2)$	127.8	563.4	657.0
減水係数 λ	0.0019	0.033	0.0089
時定数 T_c	398.0	169.0	106.0
δ	2.1	2.1	2.1
Ratio	0.9	0.7	0.3

ここに、 $\text{Ratio} = \Sigma q_2 / \Sigma p_s$

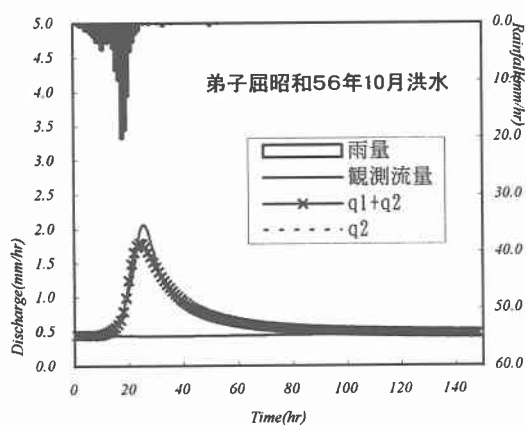
ここで、減水係数 λ は(5)式の処理をしない複数の観測流量データから求めることができ、流域ごとに固有の値である。時定数 T_c は、(5)式に従って基底流出成分を分離した後、一番低減率が小さい部分の傾きから求められ、ここでは個々の時定数の平均値を使用した。すなわち、洪水ごとに変えるのではなく、流域で一定の値を採用した。Ratio も流域で一定値を採用したが、採用した値は試行錯誤的に決定した。ただし、ハイドログラフ減水部の実測値と計算値の違いを見ると、大きくすべきか小さくすべきか容易に判断が付き、簡単に決めることが可能である。また、未知定数の最適化において、(32)式で示される収束許容限界値 ε は 1 % ($\varepsilon = 0.01$) とした。

図—3 から図—6 に釧路川の弟子屈地点、標茶地点および標津川における流出解析結果を示す。ピーク付近で若干、再現性が劣るものの実用上十分な精度を有している。また、ハイドログラフ減水部はいずれも精度良く再現され、本研究で展開した理論が妥当であることを示していると思われる。

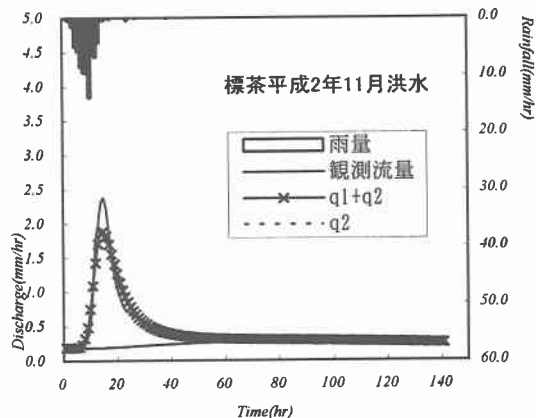
下段タンクにおける未知定数をハイドログラフ減水部や流域特性の情報により固定したことで、ここで提案したモデル自体の性能が低下したことが懸念される。そこで、図—1 と同じモデルで未知定数が 5 個の場合の計算結果と計算精度について検討する。なお、比較モデルの未知定数 α_2 は減水部の情報から固定してある。計算精度の比較は、実測値と観測値の誤差二乗和平均の平方根の値と平均流出量の比で行った。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (q^*_i - q_i)^2} / \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q^*_i \quad \cdots \cdots (33)$$

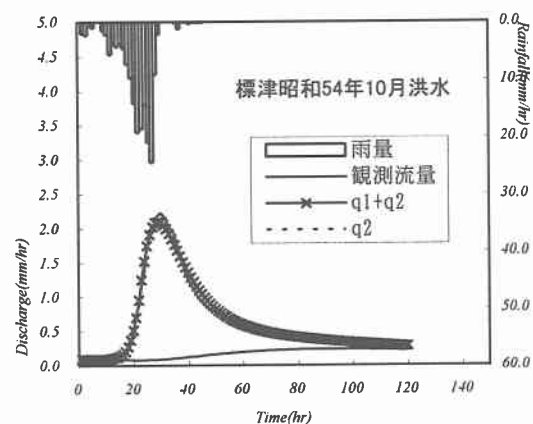
q^*_i と q_i はそれぞれ、一時間毎の実測値と計算値であり N は流量データ数である。比較した結果を表—2 に示す。



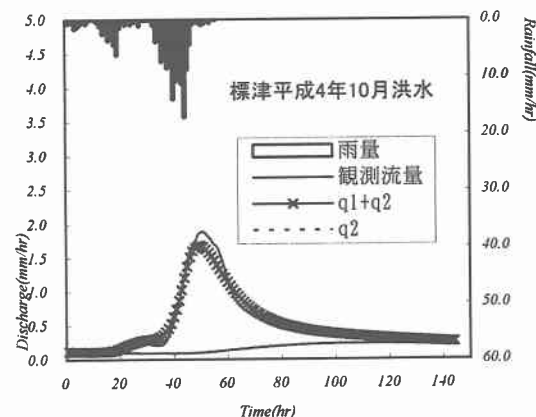
図一3 流出解析結果（弟子屈地点）



図一4 流出解析結果（標茶地点）



図一5 流出解析結果（標津川）



図一6 流出解析結果（標津川）

表一2 計算精度の比較

洪水名	3 個の RMSE	5 個の RMSE
弟子屈昭和 56 年洪水	9.9	4.6
標茶平成 2 年洪水	21.0	12.7
標津昭和 54 年洪水	8.4	4.9
標津平成 4 年洪水	14.5	18.9

単位：（％）

表一3 標茶地点における未知定数の比較

未知定数	3 個のモデル	5 個のモデル
c_1	8.69	10.81
c_2	0.09	0.192
c_3	2.75	3.95

表一2のように、下段タンクの未知定数3個を固定した場合、若干の計算精度の低下をまねくが取り扱いの簡便さを考慮すると、実用上十分な機能を有するモデルと言える。表一3は、標茶地点における未知定数の同定値を未知定数3個と5個のモデルで比較した場合である。下段タンクの未知定数を固定したことによって、同定値が若干異なっている。今後、このモデルで計算例を増やし、さらに有効性を確かめるつもりである。計算に使用したデータは(独立行政法人)開発局開発土木研究所河川研究室から提供された。また、(財団法人)北海道河川防災研究センターの研究助成を受けた。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Saga, Hoshi and Hashimoto: A New Tank Model coupled with the Storage Routing Method、XX Nordic Hydrological Conference Report. No.44、pp.605-614、1998.
- 2) 佐藤、嵯峨、馬場、星：損失機構を含む貯留関数法を応用したタンクモデルの提案、第54回年講講演概要集、第2部、pp.634-635、1999.
- 3) 田中、藤田、清水：損失機構を含む貯留関数法に関する研究、北海道支部論文報告集、第53号(B)、pp.54-59、1997.
- 4) 馬場、星、橋本：損失機構を組み合わせた貯留関数モデルの総合化、水工学論文集、第43巻、pp.1085-1090、1999.
- 5) 佐々木、星、井出：損失項を含む総合化貯留関数法の開発、北海道開発局開発土木研究所研究報告書、2000.
- 6) 星、山岡：雨水流法と貯留関数法の相互関係、第26回水理講演会論文集、pp.273-278、1982.
- 7) 吉川、砂田、グエン：洪水流量逓減曲線の特徴を考慮した流出モデルに関する研究、土木学会論文報告集、第283号、pp.23-32、1979.
- 8) 日野、長谷部：水文流出解析、森北出版
- 9) 若手水文学研究会：現場のための水文学、北海道開発局開発土木研究所、1994.