

モーメント法に基づく遅れ系のパラメータ同定

Parameter Identification of the Delay System Based on Moment method

北海道大学工学部 ○学生会員 谷嶋 清重
北海道大学大学院 フェロー 藤田 睦博

1. はじめに

藤田ら¹⁾は、山地流域を対象に斜面、河道域ともに kinematic wave 式を採用して降雨量と流域からの流出量間の等価周波数伝達関数を誘導している。さらに、得られた等価周波数伝達関数が2～3次遅れ系で近似できることを示し、任意の形状の河道網流域における遅れ系のパラメータを求めている。そのパラメータを求める手法には、モーメント法を提案している。また、等価周波数伝達関数は降雨量と流出量に含まれる誤差が全て集中することわかっている。

本論文は、これらの成果を実流域における流出解析に適用し、モーメント法を適用した再現計算の精度を確認した。さらに等価周波数伝達関数に誤差が集中する性質を利用して降雨量と流出量の対応関係の適合性を評価し、データを棄却検定した。

2. 基礎理論の提示

Luai・藤田ら²⁾によると、非線形流出系の周波数伝達関数は線形系の概念を拡張することによって、同等の扱いができることを示している。したがって、流域への入力である有効雨量 $r(t)$ (mm/hr) と出力である直接流出量 $q(t)$ (mm/hr) が既知であれば $r(t) \sim q(t)$ 間の等価周波数伝達関数 $Z(j\omega, \bar{r})$ は(1)のように定義できる。

$$Z(j\omega, \bar{r}) = \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (1)$$

$$Q(j\omega) = \int_0^\infty q(t) e^{j\omega t} dt \quad (2)$$

$$R(j\omega) = \int_0^\infty r(t) e^{j\omega t} dt \quad (3)$$

j : 虚数単位

線形系との相違点は $Z(j\omega, \bar{r})$ が降雨量の平均値 $\bar{r}$ に依存していることである。これについては原論文を参照されたい。

一方、実流域での流出解析において3～4段のタンクモデルがよく利用されている。3, 4段のタンクモデルは、基礎式がそれぞれ3, 4階の常微分方程式に相当している。ここではまず、実測降雨量・流出量より得られる式(1)の等価周波数伝達関数 $Z(j\omega, \bar{r})$ が次の3階微分方程式のこれによって近似できるものと仮定すると次のように表せられる。

$$G_1 \frac{d^3 q}{dt^3} + G_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + G_3 \frac{dq}{dt} + q = r \quad (4)$$

$$\left[\frac{d^n q}{dt^n} \right]_{t=0} = 0 \quad n = 0, 1, 2 \quad (5)$$

式(4)の周波数伝達関数 $Z_{q3}(j\omega, \bar{r})$ は、次式で与えられる。

$$Z_{q3}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 G_2 - j\omega(\omega^2 G_1 - G_3)} \quad (6)$$

式(1)が式(6)を近似していると仮定すると次式が得られる。

$$G_1 = \frac{1}{6} (I_{q,1} - I_{r,1})^3 \left\{ 1 + \frac{J_{q,3} - J_{r,3}}{(I_{q,1} - I_{r,1})^3} - \frac{3(J_{q,2} - J_{r,2})}{(I_{q,1} - I_{r,1})^2} \right\} \quad (7)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} (I_{q,1} - I_{r,1})^2 \left\{ 1 - \frac{J_{q,2} - J_{r,2}}{(I_{q,1} - I_{r,1})^2} \right\} \quad (8)$$

$$G_3 = I_{q,1} - I_{r,1} \quad (9)$$

$$I_{r,1} = \int_0^\infty \frac{t^1 r(t)}{S_{rq}} dt \quad I_{q,1} = \int_0^\infty \frac{t^1 q(t)}{S_{rq}} dt \quad (10,11)$$

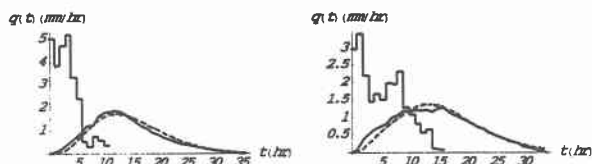
$$J_{r,1} = \int_0^\infty (t - I_{r,1})^1 \frac{r(t)}{S_{rq}} dt \quad J_{q,1} = \int_0^\infty (t - I_{q,1})^1 \frac{q(t)}{S_{rq}} dt \quad (12,13)$$

$$S_{rq} = \int_0^\infty r(t) dt = \int_0^\infty q(t) dt \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

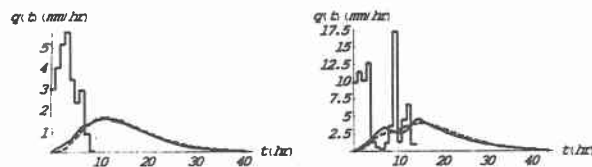
藤田ら¹⁾は式(7)～(14)で与えられる係数 G_1, G_2, G_3 の同定法をモーメント法と呼んでいる。モーメント法を用いた係数の同定、係数の次元に関して詳しくは原論文を参照されたい。

上記に示した係数 G_1, G_2, G_3 の次元を見ると G_3 は時間の次元を持つ係数で、降雨量と流出量の重心時間差のなっている。 G_2 は時間の2乗の次元を持つ係数で、降雨量や流出量の広がりや扁平度を表すパラメータになっている。 G_1 は時間の3乗の次元を持つ係数で、降雨量や流出量の非対称性や歪を表すパラメータになっている。

式(7)～(14)において実測データの有効雨量 $r(t)$ (mm/hr) と直接流出量 $q(t)$ (mm/hr) を用いて係数 G_1, G_2, G_3 を計算して求め、係数 G_1, G_2, G_3 を代入した式(4)に有効雨量を代入して、流出量を計算した値と実測データからの直接流出量を比較したものを図-1に示す。



(A)1974/8/25 鷺川穂別 (B) 1971/10/38 湧別川遠軽



(C)1970/9/16 尻別川名駒 (D)1961/7/24 尻別川喜茂別
太線：実測資料 点線：計算結果

図-1 計算結果と実測データとの比較

図-1 より実測データの直接流出量と計算結果は、ほぼ一致していることがわかる。

図-1 の(D)のように直接流出量の形状が2つ山になっているような流出量の時には、多少相違が見られる場合もある。それでもおおよその概観は近似している。

3. 実測データの評価

実測データを用いて式(4)～(14)で解析していくわけだが、等価周波数伝達関数には、すべての誤差が集約されてしまう。この誤差とは観測誤差、流域平均雨量の推定誤差、有効雨量算定時の誤差などいくつかの誤差が混ざり合ったものである。実際に計算していくと等価周波数伝達関数のベクトル軌跡が高周波領域で乱れるものが計算結果として現れるものがある。そのため河川の実特性値であるゲイン、時間遅れなども高周波領域で乱れが表れてくる。ゲイン、時間遅れは次式で表せられる。

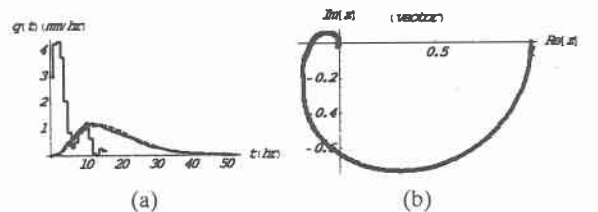
$$G(\omega) = |Z(j\omega, \bar{r})| \quad (15)$$

$$T_L(\omega) = -\frac{\text{Arg}\{Z(j\omega, \bar{r})\}}{\omega} \quad (16)$$

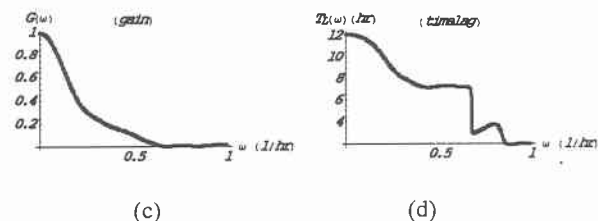
右に乱れが表れていない計算結果と表れている計算結果の例を示す。図-3 の(A)に表されるように計算の値と実測データの流出量がほとんど一致するような場合でもベクトル軌跡、ゲインなどが乱れている結果が表れるデータがある。

(A)のベクトル軌跡のグラフを見ると高周波領域で大きいループを描いているのがわかる。(C)のゲインのグラフを見ると $\omega = 0.4(1/hr)$ 近傍でゲインが0.5にまでなり共振現象を示している。このような乱れが大きいデータは誤差が多いとみなし、解析するデータからは棄却することにする。

表-1 は解析した水系、観測地点、データ数をまとめたものである。表-1 の棄却したデータ数をみると出水データ個数に対して約15%～45%となっている。ほとんどの観測所でおおよそ70%のデータは解析できることがわかる。



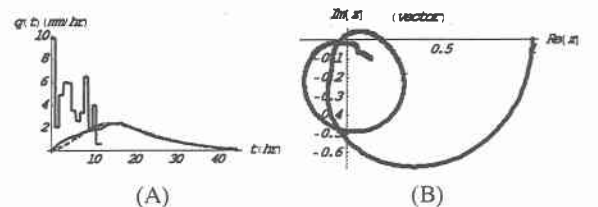
(a) (b)



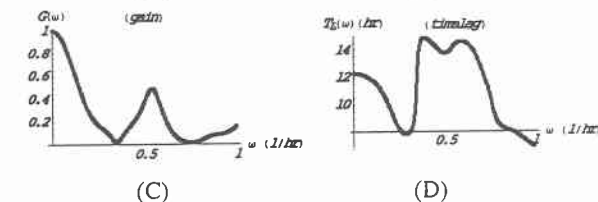
(c) (d)

1979/10/18 湧別川 開盛(流域面積 1334.8)

図-2 乱れが表れていない計算結果



(A) (B)



(C) (D)

1973/8/22 鷺川流域 穂別(流域面積 949.5km²)

図-3 乱れが表れている計算結果

- (a)(A)有効雨量と直接流出量、計算で求めた流出量(点線)
(b)(B)周波数伝達関数のベクトル軌跡
(c)(C)ゲイン (d)(D)時間遅れ

表-1 解析した資料

水系	観測所名	流域面積	出水データ 個数	棄却した データ数	使用した データ数
鷺川	栄	1069.5	9	2	7
	穂別	949.5	14	2	12
	鷺川	1228.0	15	3	13
湧別川	遠軽	958.1	10	3	7
	開盛	1334.8	8	3	5
	中湧別	1452.5	10	2	8
尻別川	喜茂別	230.8	8	3	5
	名駒	1402.2	13	6	7

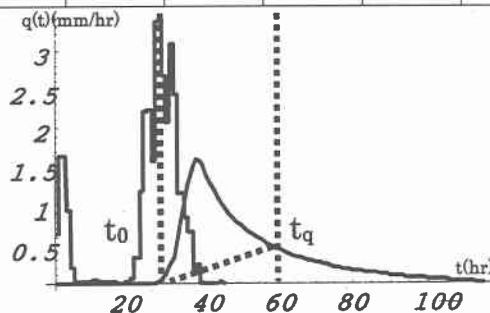


図-4 有効雨量と直接流出量

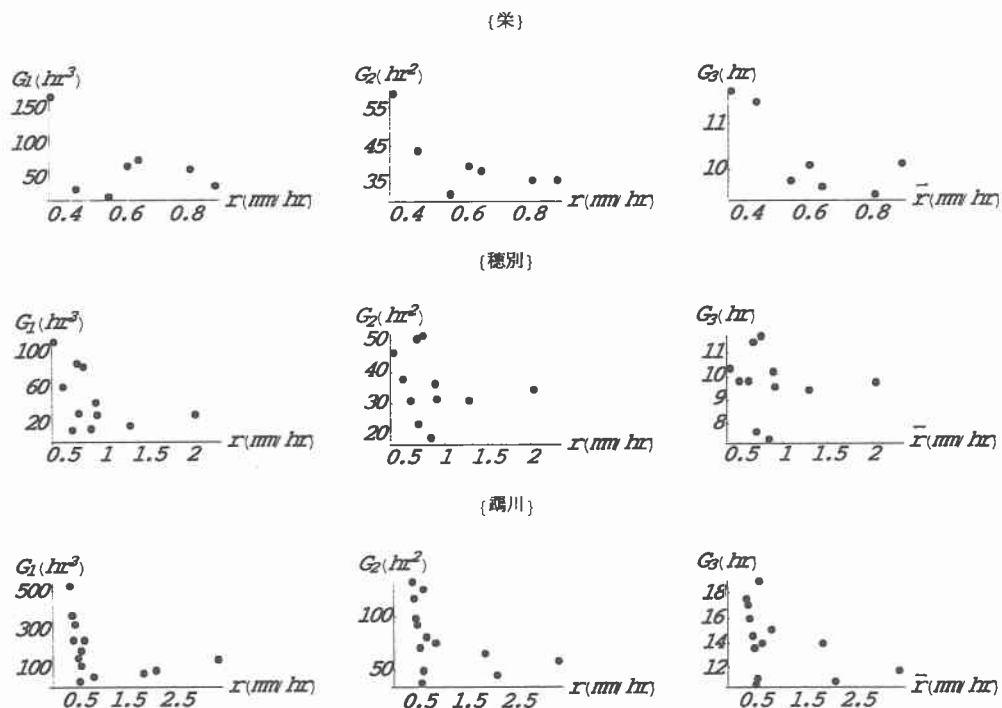


図-5 平均降雨量 $\bar{r}$ と係数 G_1, G_2, G_3 の関係 鷺川流域 栄 穂別 鷺川
{ 喜茂別 }

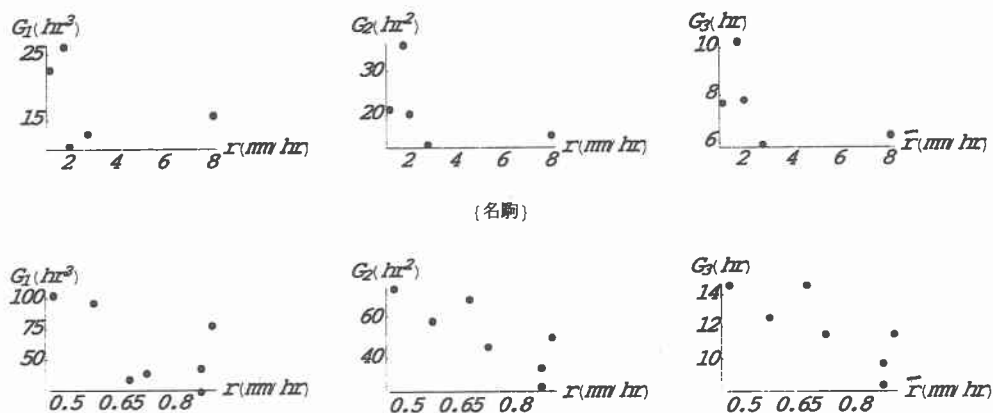


図-6 平均降雨量 $\bar{r}$ と係数 G_1, G_2, G_3 の関係 尻別川流域 喜茂別 名駒

4. 実流域における解析

採用したデータは北海道の鷺川、湧別川、尻別川の実測の雨量・流量データである。実測データにおいて流出解析を行うにあたり、直接流出量、有効雨量の推定は実測ハイドログラフよりおこなった。

直接流出量は図-4に示すように流出の立ち上がり時刻 t_0 と減水部の第2折曲点 t_q を結んで分離した。実測データにおける流出解析では t_q を1点に決めることが難しく、幅を持たせて計算している。

誤差が多く含まれるデータは t_q をどれだけ動かして調節してもベクトル軌跡が乱れてしまうことがこの作業でわかっている。

有効雨量は $t_0 - t_q$ 間の降雨量に一定の流出率を乗じて求めた。

一方、解析の手順は、前節で述べたように、実測データの降雨量、流出量から有効雨量、直接流出量をハイドログラフより求め、それらと等価周波数伝達関数、式(7)~(14)から係数 G_1, G_2, G_3 を求める。

式(6)と係数 G_1, G_2, G_3 の値から図-2, 3に表したようにベクトル軌跡、ゲイン、時間遅れを計算し、評価する。評価の結果、誤差が多く含まれていると思われるデータを棄却する。残ったデータの係数 G_1, G_2, G_3 と平均降雨量の関係を図-5, 6, 7に示す。

式(1)に示すように等価周波数伝達関数は平均降雨量の関数になっており、等価周波数伝達関数から求められる係数 G_1, G_2, G_3 も平均降雨量の関数になっていると考えられる。

等価周波数伝達関数は、システムへの入力関数を周期関数に限定している。

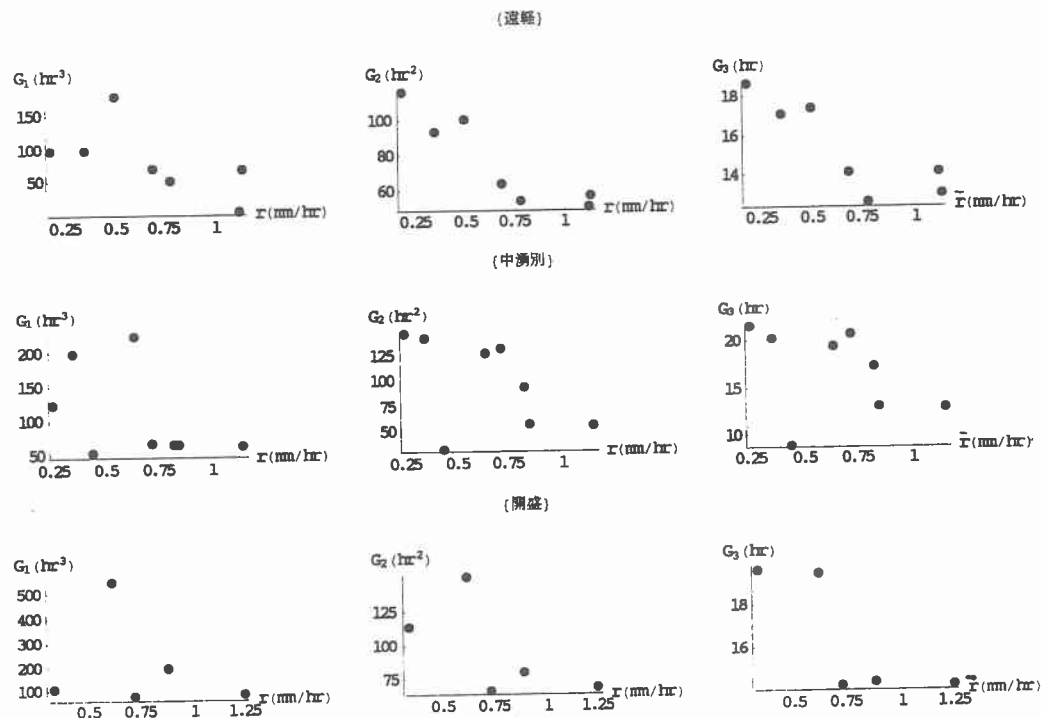


図-7 平均降雨量 $\bar{r}$ と係数 G_1, G_2, G_3 の関係 湧別川流域 遠軽 中湧別 開盛

任意の降雨波形はフーリエ級数展開することによって周期関数に置換できるがこのとき基本周期としてハイドログラフの継続時間を採用することが必要になる。したがって平均降雨量は、(総降雨量)/(出水の継続時間)として定義している。

表-1 からわかるように流域面積がおおよそ 250 ~ 1500km² の観測地域のデータを扱っている。図-5, 6, 7 を見ると若干バラついているが、流域面積の大きさに関係なく平均降雨量の増加にともない係数 G_1, G_2, G_3 とも減少する傾向を示している。

係数 G_1, G_2, G_3 が小さくなるということは直接流出量が有効雨量に近づいていくということである。係数 G_1, G_2, G_3 の次元から考えて、直接流出量の波形と有効雨量の波形の重心時間差が縮まり、直接流出量の波形と有効雨量の波形の広がり程度が似てくる。さらにそれぞれの波形の非対称性や歪みの程度も似てくるということである。

図-5, 6, 7 と表-1 から流域面積が比較的大きい観測地域は平均降雨量 $\bar{r}$ と係数 G_1, G_2, G_3 の関係のバラつきが大きくなるのがわかる。

計算には平均降雨量 $\bar{r}$ を用いているため流域面積が大きいと観測地域内で雨が多く降っている地域とあまり降っていない地域の差や出水時間差ができてしまう。そして、それらが誤差として含まれていくためであると考えられる。

5. まとめ

モーメント法によって求めた3階微分方程式の係数 G_1, G_2, G_3 を用いて計算した流出量と実測資料から推定した直接流出量は、ほぼ一致していることがわかった。す

なわち、3階微分方程式で降雨量と流出量の関係を近似できることがわかった。

北海道内の尻別川水系、鶴川水系、湧別川水系の合計8観測地点87出水データに関して解析したのだが、実測の降雨量と流出量の対応関係に含まれる誤差が周波数伝達関数の高周波領域での形状に大きく影響することがあり、ベクトル軌跡、ゲインなどから降雨量と流出量の関係の適合性を確認し、資料の採用、棄却の目安にする必要がある。

実測資料から得られた係数 G_1, G_2, G_3 が平均降雨量の増加にともない減少する傾向にあることが分かった。このことによって平均降雨量が大きくなると、直接流出量が有効雨量に近づいていくと考えられる。

流域面積の規模によってもグラフの傾向の違いが見られそうだが、これは今後もう少しデータの調査、グラフ傾向の検討をする必要がある。

参考文献

- 1) 藤田睦博・Surakha Wanphen・田中岳・清水康行 : 等価周波数伝達関数に基づく kinematic wave モデルの集中化と実流域への適用
土木学会論文集投稿中
- 2) Luai Hamouda and Mutuhiro Fujita : Application of the Equivalent Frequency Response Method to nonlinear Runoff system -St.Venant Equations and Related models-
土木学会論文集 (No. 677/II-55, pp. 189 - 203, 2001)
- 3) Surakha Wanphen and M.fujita : Lumping Process of Kinematic Wave Model Based on Equivalent Frequency Transfer Function
土木学会北海道支部論文報告集 (第 57 号), 2000