

一次元飽和不飽和浸透流モデルの周波数特性について

Frequency Response Characteristic of One-dimensional Unsaturated Flow Equation

北海道大学土木工学科 ○学生会員 清水雄亮 (Yusuke Shimizu)

北海道大学大学院工学研究科 正会員 田中岳 (Gaku Tanaka)

北海道大学大学院工学研究科 フェロー会員 藤田睦博 (Mutsuhiro Fujita)

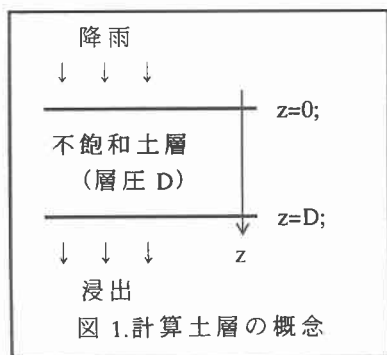
1. はじめに

斜面の流出解析としては、降雨と流出の関係を概念的に表した貯留関数法や、非定常開水路流れを等流近似して斜面流を表した Kinematic Wave モデル、さらに、ダルシーの透水係数を圧力水頭の関数として土層内の流速を解析する不飽和浸透流理論などがある。実用性の面から現場では、前者のモデルが採用されているが、斜面表層部に森林およびその下草が繁殖し、かつ透水性の良い土壌で覆われた山地斜面では、流出過程において土壌間隙からの流れが支配的であることを踏まえると、後者の不飽和浸透流理論が最も物理的に降雨流出現象を記述していると考えられている。しかしながら、この不飽和浸透流理論では、不確定な(土壌の特性値を示す)多くのパラメータを含むため、実用化に向けては、これらと流出特性との関係を明らかにする必要がある。

流出特性を検討する手法としては、流出モデルの等価周波数伝達関数を推定し、降雨・流出間の周波数特性(ゲイン)によって、任意の降雨波形に対する流出特性の評価法が上げられる。これまでに、藤田、工藤¹⁾は、貯留型流出モデルを用いて降雨・流出間のゲインを推定し、さらに、田中、藤田²⁾は、Kinematic Wave モデルとこれを集中化した貯留型流出モデルを用いて、これら流出モデルのゲインを比較、検討して集中化の妥当性について論じている。

本研究では、森林土壌に覆われた山地斜面を想定し、その流出特性を明らかにするため、一次元土層を取り上げ、土層への流入(降雨)・流出間のゲインを上記手法を応用して理論的に求め、さらにゲインによって、流出特性と土壌条件との関係を考察することを目的としている。

2. 一次元飽和不飽和浸透流モデルについて



一次元土層内の飽和・不飽和流を取り扱う基礎式と

して、一次元表記されたリチャーズの式がある。

$$C \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (1)$$

$$V_z = -k(\Psi) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -k(\Psi) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - 1 \right), \quad (2)$$

式(1)、一次元表記のリチャーズの式

式(2)、ダルシーの透水則を不飽和に対応させた式

C:比水分量, Ψ :圧力水頭, V_z :鉛直方向の流速 $K(\Psi)$:不飽和透水係数, Φ :全水頭

θ - Ψ 関係には、Ahuja & Swartzendruber の提案した式を、 K - θ 関係には一般化 Kozeny 式を採用して、リチャーズの式に次の K - Ψ 関係 (3) と C - Ψ 関係 (4) を用いることとした。

$$k(\Psi) = k_s \frac{1}{1 + a^n |\Psi|^n}{}^\beta, \quad (3)$$

$$C(\Psi) = \frac{n w a^n |\Psi|^{n-1}}{(1 + a^n |\Psi|^n)^2}, \quad (4)$$

 K_s :飽和透水係数 w :有効間隙 a, β, n :土壌の特性値

また、上側境界条件は、降雨がすみやかに浸透することを想定して、降雨を上側境界の流速として次式を与えた。

$$\left. \frac{\partial V_z}{\partial z} \right|_{z=0} = r$$

下側境界条件については、八田³⁾が示しているように様々なモデルが提案されているが、本論文では下端が飽和した場合にのみ流出が生じるものとして、次式を採用する。

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 1 & (\Psi < 0) \\ \Psi = 0 & (\Psi \geq 0) \end{cases}$$

3. 周波数特性の理論的な誘導手法について

次に流入・流出関係の周波数特性を明らかにする。

まず降雨量 r に(5)式のように複素数表記での正弦波を仮定する。ここで、 i :虚数単位。

$$r = \bar{r} + A \exp(i\omega t), \quad (5)$$

(5)式を入力するとき、1次元飽和不飽和浸透流モデ

ルのようにその応答特性が弱い非線形性を有し、かつ高周波成分を無視できるような場合には、サクシオン、流速、比水分量および透水係数、についても(5)式のように表記することができる。

$$\Psi = \bar{\Psi} + A_{\Psi} \exp(i\omega t), \quad (6)$$

$$V_z = \bar{V}_z + A_v \exp(i\omega t), \quad (7)$$

$$C = \bar{C} + A_c \exp(i\omega t), \quad (8)$$

$$k = \bar{k} + A_k \exp(i\omega t), \quad (9)$$

これらを基礎式(1)に代入すると、(10)式を得る。

$$\begin{aligned} \{C + A_c \exp(i\omega t)\} \frac{\partial}{\partial t} \{ \bar{\Psi} + A_{\Psi} \exp(i\omega t) \} \\ = - \frac{\partial}{\partial z} \{ \bar{V}_z + A_v \exp(i\omega t) \}, \quad (10) \end{aligned}$$

その上で、流出の振幅成分を直接求めていくのだが、高次の微小項および高周波成分 ($\exp(ni\omega t)$, n は 2 以上の整数) の無視によって次の式(11), (12)が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial z} = 0, \quad (11) \\ \frac{\partial A_v}{\partial z} + \bar{C} A_{\Psi} i\omega = 0, \quad (12) \end{cases}$$

次に(2)式に(6), (7), (9)式を代入し、係数比較を実数部で行うことで次の(13)式、虚数部で行うことで次の(14)式が得られる。

$$\bar{V}_z = -\bar{k} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} - 1 \right), \quad (13)$$

$$A_v = -\bar{k} \frac{\partial A_{\Psi}}{\partial z} - A_k \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} - 1 \right), \quad (14)$$

ここで、 $\bar{k}$, A_k は、不飽和透水係数を複素数表現した以下の等式を係数比較して得られる。

$$\bar{k} + A_k \exp(i\omega t) = \frac{k_s}{(1 + a^n |\bar{\Psi} + A_{\Psi} \exp(i\omega t)|^n)^{\beta}},$$

$$\bar{k} = k(\bar{\Psi}) = \frac{k_s}{(1 + a^n |\bar{\Psi}|^n)^{\beta}}, \quad (15)$$

$$A_k = \frac{na^n \beta |\bar{\Psi}|^{n-1} k_s}{(1 + a^n |\bar{\Psi}|^n)^{\beta}} A_{\Psi} = \frac{\partial k(\bar{\Psi})}{\partial \bar{\Psi}} A_{\Psi}, \quad (16)$$

同様に $\bar{C}$ についても計算すると、以下になる。

$$\bar{C} = C(\bar{\Psi}) = \frac{nwa^n |\bar{\Psi}|^{n-1}}{(1 + a^n |\bar{\Psi}|^n)^2}, \quad (17)$$

ここで先の式(13), (14)を式(11), (12)にそれぞれ代入すると、次の二つの微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} - 1 \right) - \bar{k} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial z^2} = 0, \quad (18)$$

$$-k(\bar{\Psi}) \frac{\partial^2 A_{\Psi}}{\partial z^2} - N_1 \frac{\partial A_{\Psi}}{\partial z} - N_2 A_{\Psi} + \bar{C} A_{\Psi} i\omega = 0, \quad (19)$$

ここで、(16)式の係数 N_1, N_2 は以下の通りである。

$$N_1 = \frac{\partial k(\bar{\Psi})}{\partial z} + \frac{\partial k(\bar{\Psi})}{\partial \bar{\Psi}} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} - 1 \right)$$

$$N_2 = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial k(\bar{\Psi})}{\partial \bar{\Psi}} \right\} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} - 1 \right) + \frac{\partial k(\bar{\Psi})}{\partial \bar{\Psi}} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial z^2}$$

なお A_{Ψ} は複素関数であることに留意せねばならない。

以上の操作により $\bar{\Psi}$ と A_{Ψ} を求めると、任意の z に対して土層内の浸透速度を求めることが可能となる。

さらにゲイン G を求めるためには、流速の振幅成分を土層表面と土層下部で比較すればよい。

$$G = \left| \frac{A_v(z=D)}{A_v(z=0)} \right|, \quad (20)$$

4. ゲインの妥当性について

3章の述べたように、式(18)～(20)で表された一次元土層における流入・流出間のゲインは、その誘導過程において、高次の微小項および高周波成分の無視により得られている。ここでは、その妥当性をシミュレーションに基づいて検討する。シミュレーションでは、前述の基礎式(1)をもとに(2)～(4)式を与え、差分して数値計算し、流出が正弦波と近似できる範囲で、振幅比によりゲインを推定した。

なお、ここで Ψ は SOR 法により反復計算して求め、境界条件については2章で述べたものを適用し、初期状態については、始めにすべて飽和 ($\Psi=0$) していると仮定し、無降雨で土層内の水分量が安定化するまで排水したときの圧力水頭分布を与えた。計算条件として土壌の特性値には、山地土を想定し以下のように設定した。

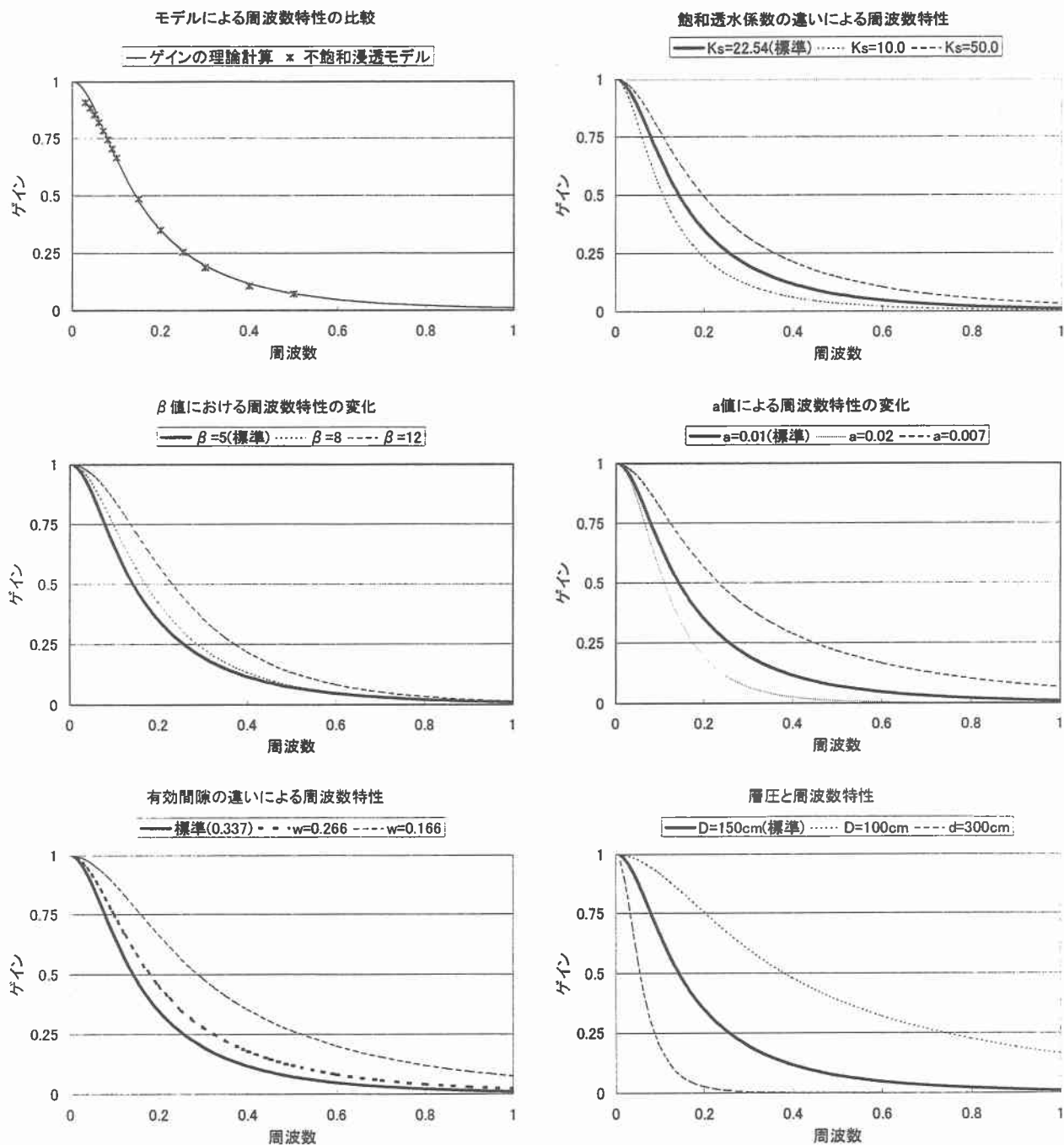
$$K_s = 22.54 \text{ (cm/Hr)}, D = 150 \text{ cm}, w = 0.34$$

$$a = 0.01 \text{ (cm}^{-1}\text{)}, \beta = 5.0 \text{ (無次元)}, n = 2.0 \text{ (無次元)}$$

また式(18)～(20)で表された理論解についても、差分して数値計算することによって求めた。図-2(a)は、シミュレーションと理論解との比較を示している。両者は高い精度で一致しており、理論解の正当性を示す根拠といえる。

なお本文内の周波数の次元は、一般的な秒の逆数ではなく、時間(Hr)の逆数の次元を持つものとしている。

このゲインの理論計算は、不飽和浸透モデルを直接数値計算してゲインを推定するのに比べてはるかに容易であり、土壌条件の変化が与える周波数特性への変化をつかみやすい。



左上：図 2(a) モデルの違いによる周波数特性の変化

右上：図 2(b) 飽和透水係数による周波数特性の変化

左中：図 2(c) β 値による周波数特性の変化

右中：図 2(d) α 値による周波数特性の変化

左下：図 2(e) 有効間隙による周波数特性の変化

右下：図 2(f) 層圧による周波数特性の変化

標準値： $K_s=22.54$ (cm/Hr), $D=150$ cm, $w=0.337$, $\alpha=0.01$ (cm⁻¹), $\beta=5.0$ (無次元), $n=2.0$ (無次元)

5. 土壌条件の相違が周波数特性に与える影響について

以降では 4 章で求めたゲインをもとに、土壌特性を示すパラメータが周波数特性に与える影響を明らかにする。不飽和浸透流モデルとゲインの理論計算の比較で使った値を標準状態として、各パラメータを変化させてみる。

図 2(a)～(f)は横軸に周波数・縦軸にゲインをとったゲイン曲線図であり、曲線が上方にあるほど入力波の波形が出力波により強く反映されるといえる。また、土層は一種のローパスフィルタの性質を持っていることがわかる。

まず飽和透水係数について、図 2(b)より、飽和透水係数が大きくなるに従い全周波数に対してゲインが増

大している様子が確認できる。流速は飽和透水係数に比例して増大するので、飽和透水係数が増大すると、土層の影響が少ない速やかな流出になるので、ゲインは大きくなると考えることができる。

なおここで取り上げた飽和透水係数は、[cm/s]単位では 10^{-3} 程度の値である。これは山地土層を考慮した、不透水粘土の値である。

β 値は、飽和透水係数 K_s とよく似た影響を与える。 β は(4)式により飽和透水係数とともに不飽和での透水係数を決定する値である。図2(c)から β 値とゲインは正の相関を持つことが読みとれる。

次に a 値について検討する。 a 値は水分特性曲線に関するパラメータで、毛管水縁の高さを決定し、長さの逆数の次元を持つ。 a が大きいと砂質、小さいと粘性土といえる。図2(d)からは、土壌が粘性土に近いほど、出力波は入力波の影響を受けやすいという事実がわかる。

一方、有効間隙率は、 $w = \theta_s - \theta_a$ で表され、ここで、 θ_s : 飽和含水率 θ_a : 気乾含水率 である。図2(e)から、 w が小さい、つまり飽和含水率と気乾含水率の差が小さい方が高い応答を示すといえる。

最後に、層圧を表す D 値について考察する。一般に層圧が大きいほどゲインが低下することは想像に難くないが、図2(f)からもその様子が確認できる。層圧を標準の150cmから300cmに変えることで、全周波数帯でゲインが相当に低下しており、ゲインが0近傍に収束する周波数域も大幅に低下している。

6. まとめ

本研究の目的は土壌特性の相違が周波数特性に与える影響を明らかにすることであった。そこで次元飽和不飽和浸透流モデルの周波数特性を理論的に誘導し、すでに確立されている不飽和浸透理論によって算出された周波数特性と比較し、誘導したモデルの正当性を確認した。

謝辞：本論文の一部は（財）北海道河川防災研究センターの助成を受けて行われた。この場を借りて謝辞を示す。

参考文献

- 1) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆, 橋本誠秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究-降雨量が時間的に独立な確率過程の場合-, 土木学会論文集, No. 515/II-31, pp. 1-11, 1995.
- 2) 1) 田中岳, 藤田睦博, 工藤睦信, 内島邦秀: Kinematic Wave モデルと貯留型流出モデルの比較-周波数特性と確率特性-, 土木学会論文集, No. 614/II-46, pp. 21-36, 1999.
- 3) 八田茂美: 山地流域における流出過程のモデル化とその応用に関する研究, 北海道大学学位論文, pp. 22-26, 1998.

- 4) 松林宇一郎ら, 不飽和浸透理論に基づく斜面流出モデルの集中化について, 土木学会論文集 No497/II-28pp.11-20