

水中浮遊式トンネルの波浪動揺特性に関する解析的検討

An analytical investigation on wave response characteristics of Submerged Floating Tunnels

北海道大学大学院工学研究科 学生員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)

1. はじめに

本研究は波浪が作用する長大な水中浮遊式トンネルを弾性床上梁にモデル化し、その解析解より得られる応答値および計算式から大域的な波浪応答特性の概略把握を行うことを目的としている。支配方程式は動的影響を考慮したものとなり、これを解くことにより周波数応答の厳密解が得られる。本研究では固有振動特性、非共振周波数領域（波と構造物が同調しない周波数領域）特性と共振周波数領域特性のそれぞれについて考えることとする。非共振周波数領域特性においては波浪入射角の影響や、応答の抑制に影響を及ぼすパラメータについてなど動的変形および断面力の定性的、定量的な検討を行う。

2. 解析モデル

図-1は解析モデルの断面図と側面図を示したものである。トンネルは断面径 D の円形断面で曲げ剛性 EI 、単位長あたりの質量 m 、粘性減衰係数 c を有し、トンネル軸方向に係留索を等間隔 h で配置したものを想定する。係留索の形状は (a) に示すタイプのもの考える。この形式は水平方向の剛性が鉛直方向の剛性に比べて非常に低いため、振動特性が水平方向と鉛直方向で大きく異なる性質を有している。

3. 波浪応答解析解

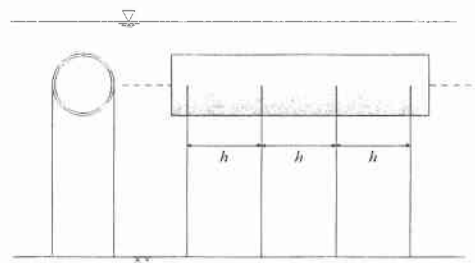
本研究では動的問題を扱うため、作用波力は固定柱体に適用するモリソン式に構造物と流体との相対運動による影響を考慮した修正モリソン式を適用する。トンネル軸に対して斜め入射する波浪を想定して支配方程式の定式化を行う。定式化における座標系は図-2に示すとおりである。 x 軸はトンネル軸、 y 軸は水平軸を表す。波が x 軸に入射する角度を ϕ とする。修正モリソン式により評価された流体力を線形化した後に支配方程式の外力項に代入し整理することで、波浪応答を記述した変位 $v(x, t)$ に関する次の支配方程式が得られる。

$$m' \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + c' \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + k_p' v(x, t) \quad (1)$$

$$= F_1 \cos(kx \sin \phi - \omega t) + F_2 \sin(kx \sin \phi - \omega t)$$

ここで ω は波周波数、 k は波数、 t は時間でありまた、 H は波高、 d は水深、 ρ は海水密度、 C_M は慣性力係数、 C_D は抗力係数としたとき m' 、 c' 、 F_1 、 F_2 はそれぞれ

$$m' = m + \rho \frac{\pi D^2}{4} (C_M - 1.0)$$



(a) 断面図 (b) 側面図

図-1 解析モデル

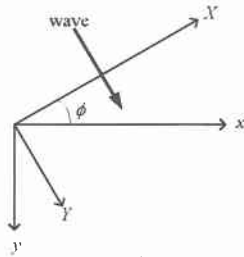


図-2 座標系

$$c' = c + \rho DC_D \frac{4\omega H}{3\pi} \frac{\cosh kz \cos \phi}{\sinh kd}$$

$$F_1 = \frac{3}{4\pi} \rho DC_D \left(\frac{\omega H}{2} \frac{\cosh kz \cos \phi}{\sinh kd} \right)^2$$

$$F_2 = \frac{\pi D^2}{4} \rho C_M \frac{\omega^2 H}{2} \frac{\cosh kz \cos \phi}{\sinh kd}$$

である。この支配方程式の一般解 $v(x, t)$ は同次解 $v_h(x, t)$ と特解 $v_p(x, t)$ の和となり、それらはそれぞれ以下のように表される。

$$v_h(x, t) = (c_1 \cosh \alpha_1 x \sin \beta_1 x + c_2 \sinh \alpha_1 x \sin \beta_1 x + c_3 \cosh \alpha_1 x \cos \beta_1 x + c_4 \sinh \alpha_1 x \cos \beta_1 x + c_5 \cosh \alpha_2 x \sin \beta_2 x + c_6 \sinh \alpha_2 x \sin \beta_2 x + c_7 \cosh \alpha_2 x \cos \beta_2 x + c_8 \sinh \alpha_2 x \cos \beta_2 x) \sin \omega t + (-c_4 \cosh \alpha_1 x \sin \beta_1 x - c_3 \sinh \alpha_1 x \sin \beta_1 x + c_2 \cosh \alpha_1 x \cos \beta_1 x + c_1 \sinh \alpha_1 x \cos \beta_1 x + c_8 \cosh \alpha_2 x \sin \beta_2 x + c_7 \sinh \alpha_2 x \sin \beta_2 x - c_6 \cosh \alpha_2 x \cos \beta_2 x - c_5 \sinh \alpha_2 x \cos \beta_2 x) \cos \omega t \quad (2a)$$

$$v_p(x, t) = [F_1 \{A_p \sin(kx \sin \phi) + B_p \cos(kx \sin \phi)\} + F_2 \{-A_p \cos(kx \sin \phi) + B_p \sin(kx \sin \phi)\}] \sin \omega t + [F_1 \{A_p \cos(kx \sin \phi) - B_p \sin(kx \sin \phi)\} + F_2 \{A_p \sin(kx \sin \phi) + B_p \cos(kx \sin \phi)\}] \cos \omega t \quad (2b)$$

ここで特性解は $m'\omega^2 - k'_v < 0$ のとき

$$\alpha_1 = \beta_2 = \sqrt[8]{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \cos\left\{\frac{1}{4}(\pi + \tan^{-1} \frac{\beta_0}{\alpha_0})\right\} \quad (3a)$$

$$\alpha_2 = \beta_1 = \sqrt[8]{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \sin\left\{\frac{1}{4}(\pi + \tan^{-1} \frac{\beta_0}{\alpha_0})\right\} \quad (3b)$$

$$(\alpha_0 = \frac{m'\omega^2 - k'_v}{EI}, \beta_0 = \frac{c\omega}{EI})$$

$m'\omega^2 - k'_v > 0$ のとき

$$\alpha_1 = \beta_2 = \sqrt[8]{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \cos(\frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{\beta_0}{\alpha_0}) \quad (3c)$$

$$\alpha_2 = \beta_1 = \sqrt[8]{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \sin(\frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{\beta_0}{\alpha_0}) \quad (3d)$$

となりまた

$$A_p = \frac{-m'\omega^2 + k'_v + EI(k \sin \phi)^4}{\{-m'\omega^2 + k'_v + EI(k \sin \phi)^4\}^2 + c'^2 \omega^2} \quad (4a)$$

$$B_p = \frac{c' \omega}{\{-m'\omega^2 + k'_v + EI(k \sin \phi)^4\}^2 + c'^2 \omega^2} \quad (4b)$$

である。また式 (2a) 中の積分定数 $c_1 \sim c_8$ は境界条件により決定される。

4. 動的構造特性に関する考察

支配方程式(1)及び周波数応答解析解(2)の理論的な考察により得られる動的構造特性についてここではいくつか述べる。

4. 1 曲げ固有振動特性

弾性床上梁の j 次曲げ振動の固有振動数 ω_j については文献 4), 5) で証明されているように

$$\omega_j > \sqrt{\frac{k'_v}{m'}} (= \omega_{b0}) \quad (5)$$

をいかなる境界条件においても満たすことがわかっている。つまり水中トンネルが弾性床上梁にモデル化可能な場合、外力周波数が $\omega < \omega_{b0}$ ならば曲げ変形に関する共振は起こらない。このことは初期設計上の 1 つの目安として有用な情報である。曲げ固有振動特性をさらに検討するために、次の無減衰支配方程式について考える。

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + m' \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + k'_v v(x,t) = 0 \quad (6)$$

ここで $v(x,t) = v_0(x)e^{i\omega t}$ と変数分離し式に代入すると、 x に関する次の方程式が得られる。

$$\frac{d^4 v_0(x)}{dx^4} - \frac{m'\omega^2 - k'_v}{EI} v_0(x) = 0 \quad (7)$$

ここで例えば両端単純支持の境界条件を考えた場合

$$v_0(x) = C \sin \frac{j\pi}{l} x \quad (j: \text{振動の次数}) \quad (8)$$

となるから、これと式(7)より次式が得られる。

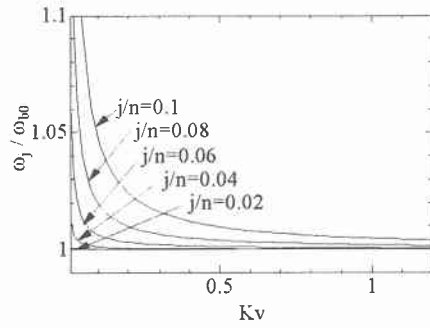


図-3 曲げ固有振動特性

$$\sqrt[4]{\frac{m'\omega_j^2 - k'_v}{EI}} = \frac{j\pi}{l} \quad (9)$$

上式を満たす ω_j が曲げ自由振動の固有振動数となる。

これを ω_j について解くと

$$\omega_j = \sqrt{\frac{EI}{m'} \left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 + \frac{k'_v}{m'}} = \sqrt{\frac{EI}{m'} \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2} \sqrt{1 + \frac{K_v n^4}{j^4 \pi^4}} \quad (10)$$

ここで $n = l/h$ である。または上式においても $k'_v \neq 0$ ならば、剛体モードの固有振動数 $\omega_{b0} = \sqrt{k'_v/m'}$ に対する ω_j の比として次式で表される。

$$\frac{\omega_j}{\omega_{b0}} = \sqrt{1 + \frac{j^4 \pi^4}{K_v n^4}} \quad (11)$$

上式は弾性床上梁の固有振動数の決定要因が $K_v n^4$ であり、この値の増加に伴い ω_j/ω_{b0} が 1 に収束することを表している。図-3 は上式をグラフに表したものである。係留索のばねとしての影響が強くなるか、または長大になればなるほど、1 次（最低次）モードの固有振動数は剛体モードの固有振動数に近い値となり、かつ低低次と高次モードの固有振動数が互いに接近することがわかる。以上のことから曲げ振動においては、相対的に長大であれば波など周期外力との同調は $\omega_j > \omega_{b0}$ において ω の増加とともに連続的に発生するため、 ω_{b0} がより重要なパラメータとなる。

4. 2 非共振領域の応答ピーク値に関する考察

以下では共振を回避できる周波数領域 ($\omega < \omega_{b0}$) における特性について検討する。非共振周波数領域の応答は入射角の影響を大きく受ける。例えば $\phi \cong 0^\circ$ ならば ω の増加とともに応答が大きくなる、つまり 1 質点系の強制振動に近い周波数特性を示す。逆に $\phi \cong 90^\circ$ ならば、外力波の波長の長さに依存する変形が予想される。文献 6), 8) では $\phi = 90^\circ$ において共振によるピークではない曲げ応答ピーク値が $\omega < \omega_{b0}$ で存在し、そのピーク値をとるおよその周波数（特性周波数）を理論的に導出している。ここでは任意の入射角を考慮した場合の特性周波数を導出する。分散関係式として次式が成り立つ。

$$\omega^2 = gk \tanh kd \quad (12)$$

ここで g は重力加速度である。上式は波長の減少に伴い波周波数が増加することを示している。一方構造物と作用波に目を向けると、弾性床上梁は梁の曲げ剛性と弾性

床の両方で曲げ変形に抵抗するが、その両者を比較して曲げ剛性の影響がより大きい場合は作用外力に対して剛体的であり、入射波の波長が長くなるにつれその柔軟な傾向を示す。一方弾性床の影響がより大きい場合においては梁は相対的に柔軟であり、波長が短くなるにつれその傾向は顕著となる。このことからそのおおよその中間点、すなわち

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \cong k'_v v \quad (13)$$

を満たす波数に対応する波周波数が曲げモーメント振幅を極大とする振動数に近い値をとることが考えられる。たわみとして $v = e^{kx \sin \phi}$ を仮定して式(13)に代入すると k に関する次式が得られる。

$$k = \sqrt[4]{\frac{k'_v}{EI \sin^4 \phi}} \quad (14)$$

上式が斜め入射において曲げモーメント振幅を極大にする波数を表す式となる。これと分散関係式(12)より、曲げモーメント振幅を極大にする波周波数はおおよそ次式となる。

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{g^4 k'_v}{EI \sin^4 \phi} \tanh^4 \sqrt{\frac{k'_v d^4}{EI \sin^4 \phi}}} \quad (15)$$

4. 3 共振領域の応答ピーク値に関する考察

ここでは共振ピーク値を解析的に導出し、考察を行う。長大な弾性床上梁においては $\omega > \omega_{b0}$ は共振周波数領域である。系の減衰が小さい場合、モード形状は無減衰の場合の固有振動モードでよい近似となる。このとき共振時の応答は次式で表される。

$$v(x, t) = \bar{A} \bar{v}(x) \sin(\omega t + \gamma) \quad (16)$$

ここで、 ω は励起される固有振動モードの固有振動数（共振時であることから波周波数と一致している）、 $\bar{A}$ は応答振幅を表す。また $\bar{v}(x)$ は正規化されているものとする。これを支配方程式(1)に代入し、 $\bar{v}(x) \sin(\omega t + \gamma)$ が無減衰の場合の支配方程式を満たすことを考慮すると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \bar{A} c' \omega \bar{v}(x) \cos(\omega t + \gamma) \\ = F_1 \cos(kx \sin \phi - \omega t) + F_2 \sin(kx \sin \phi - \omega t) \end{aligned} \quad (17)$$

ここでモード形状 $\bar{v}(x)$ と両辺の内積をとると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{A} c' \omega (\cos \omega t \cos \gamma - \sin \omega t \sin \gamma) \int \bar{v}^2(x) dx \\ = \cos \omega t \int \bar{v}(x) \{F_1 \cos(kx \sin \phi) + F_2 \sin(kx \sin \phi)\} dx \\ + \sin \omega t \int \bar{v}(x) \{F_1 \sin(kx \sin \phi) - F_2 \cos(kx \sin \phi)\} dx \end{aligned} \quad (18)$$

上式より共振時の応答振幅 $\bar{A}$ は次式で表されることとなる。

$$\begin{aligned} \bar{A} = \frac{1}{c' \omega} \left[\left[\int \bar{v}(x) \{F_1 \cos(kx \sin \phi) + F_2 \sin(kx \sin \phi)\} dx \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\int \bar{v}(x) \{F_1 \sin(kx \sin \phi) - F_2 \cos(kx \sin \phi)\} dx \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (19) \end{aligned}$$

これより共振時の応答ピーク値は振動数および減衰係数に反比例することと、入射波の x 軸方向に関する加振パターンと固有振動モードの内積に依存することがわかる。

5. 波浪応答特性についての検討

ここでは得られた周波数応答解析解を用いて、実際に想定する水中トンネルの波浪応答解析を行う。解析する構造条件、材料条件及び海洋条件は表-1に示すものとした。この構造諸元において鉛直方向は $K_v \cong 0.34$ 、 $\omega_{b0} = 2.83$ でありまた水平方向については $K_v \cong 0.000028$ 、 $\omega_{b0} = 0.0259$ となる。これらの K_v は共に弾性床上梁の適用条件を満たしている。

5. 1 鉛直方向の周波数応答特性

図-4 (a), (b) はトンネル中央点における単位波高 ($H = 1m$) の波が作用した場合の鉛直方向無次元たわみ及び曲げモーメント振幅の周波数応答を示したものである。鉛直方向の運動はこの諸元においては波浪との共振を回避できる非共振領域の議論となる。非共振領域では 5.2 で理論的に考察したとおり、共振ではないピーク値が存在することがこれらの図よりわかる。式(15)によると曲げモーメント振幅の極大値をとるおおよその波周波数はそれぞれ

$$\phi = 45^\circ : \omega = 0.460, \quad \phi = 30^\circ : \omega = 0.547$$

$$\phi = 15^\circ : \omega = 0.760, \quad \phi = 5^\circ : \omega = 1.310$$

となる。上述の結果を図-4 (b) の結果と照らし合わせると、 $\phi \geq 15^\circ$ では理論的考察と実際の応答計算結果がよく一致していることがわかる。またたわみ振幅のピーク値は曲げモーメント振幅より若干低周波側に存在している。

5. 2 水平方向の周波数応答特性

図-5 (a), (b) はトンネル中央点における水平方向無次元たわみ及び曲げモーメント振幅の周波数応答を

表-1 解析条件

トンネル長さ l	2500[m]
係留索のトンネル軸方向取付間隔 h	50[m]
トンネルのヤング係数 E	$2.74 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$
トンネル外径	23[m]
トンネル内径	21[m]
トンネルの単位長さ当たりの質量 m	$2.88 \times 105 [\text{N/m}]$
トンネルの比重	0.7
係留索のヤング係数	$2.06 \times 10^{11} [\text{N/m}^2]$
係留索の断面積	0.12[m]
抗力係数 C_D	1.0
慣性力係数 C_M	2.0
水深 d	200[m]
水面からのクリアランス	30[m]

示したものである。鉛直方向の特性とは大きく異なり、水平方向の場合は係留索による復元力が非常に小さいために ω_{b0} が小さな値となり、その結果有意なエネルギーをもつ波周波数領域が共振周波数領域と重なり構造物との同調が起こり得る。図中にみられる発散的なピーク値はいずれも共振によるものであり、図-4 (a), (b)のピークとは根本的に異なる性質のものである。

6. まとめ

本研究は水中トンネルを弾性床上梁にモデル化し、波浪動揺の周波数特性を理論的な解釈のもとに考察したものである。弾性床上梁によるモデル化は簡単ではあるが、支配方程式及びその解析解から理論的に得られる情報が多く、基本構造設計段階の解析モデルとしては非常に適したものであるといえる。本研究で得られた結果をまとめると以下のとおりである。

- (1) トンネル軸に対して斜めに入射する作用外力を修正モリソン式により定式化し、その外力波による周波数応答解析解を導出した。
- (2) 水中トンネルの曲げ固有振動数は長大であればあるほど、またトンネル曲げ剛性に対して係留索剛性の影響が有意であればあるほど、剛体変位に関する固有振動数 ω_{b0} ($=\sqrt{k_v'/m'}$)及びトンネルの曲げ固有振動数は互いに接近する値をとる。このような場合には ω_{b0} は固有振動数の支配的なパラメータになり重要であるといえる。
- (3) 非共振周波数領域の曲げモーメント振幅ピーク値とそのピーク値をとるおおよその波周波数を波の斜め入射を考慮して導出した。また共振周波数領域における応答ピーク値を理論的に導出した。
- (4) 実際に想定する水中トンネルの諸元に対して導出した周波数応答解析解の特性を考察した。鉛直方向の運動と水平方向の運動は係留索の剛性の相違により動的特性は大きく異なることが解析解からも顕著にみられた。特に水平方向については波周波数と構造物の固有振動数の一致による共振が問題となる。また鉛直方向の運動においては、導出した非共振領域における曲げモーメント振幅ピーク値をとる波周波数は $\phi \geq 15^\circ$ においてよく一致している。

参考文献

- 1) (社)水中トンネル研究調査会：水中トンネル 第Ⅰ編 計画から設計施工まで、第Ⅱ編 ケーススタディー、1995。
- 2) 佐藤太裕，蟹江俊仁，三上 隆：水中浮遊式トンネル解析における等価弾性床上梁モデルについて，構造工学論文集，Vol.46A，pp.41-49，2000。
- 3) 佐藤太裕，蟹江俊仁，三上 隆：動的問題における水中浮遊式トンネルと弾性床上梁の等価性に関する検討，構造工学論文集，Vol.47A，pp.1-8，2001。
- 4) 鈴木英之，吉田宏一郎：超大型浮体の構造挙動および

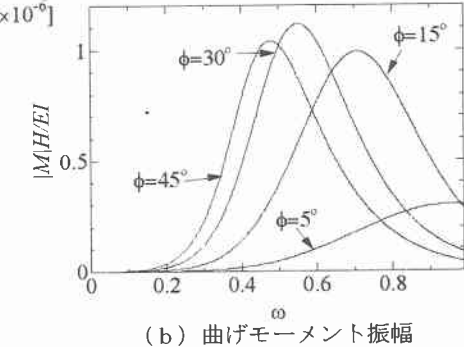
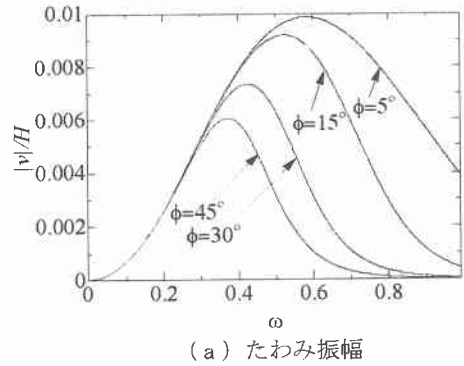


図-4 周波数応答 (鉛直方向)

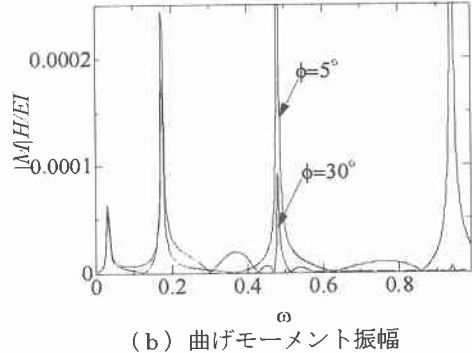
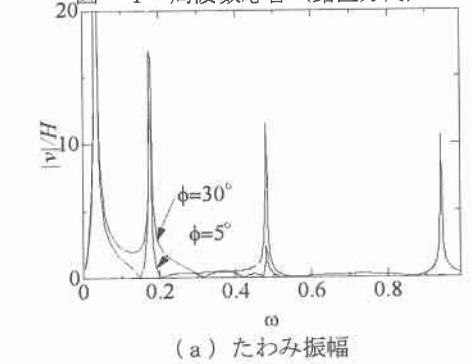


図-5 周波数応答 (水平方向)

構造設計に関する考察，日本造船学会論文集，第178号，pp.473-483，1995。

- 5) 坪郷 尚，岡田博雄：弾性支床上の梁モデルによる長大浮体構造の動的撓み挙動特性に関する考察，日本造船学会論文集，第181号，pp.289-298，1997。
- 6) Chakrabarti, S.K. : Hydrodynamics of Offshore Structures, Computational Mechanics Publications, 1987。
- 7) P.Fogazzi and F.Perotti : The dynamic response of seabed anchored floating tunnels under seismic excitation, EARTHQUAKE ENGINEERING AND STRUCTURAL DYNAMICS, Vol.29, pp.273-295, 2000。