

曲線 2 主桁橋の固有振動数に与える重心の偏心量の影響

Effects of the center of gravity on natural frequencies of curved two-girder bridges

北海道大学大学院工学研究科
北海道大学大学院工学研究科
㈱開発工営社
北海道大学大学院工学研究科

F 会員
○ 学生員
正 員
F 会員

林川 俊郎 (Toshiro Hayashikawa)
渡邊 大輔 (Daisuke Watanabe)
松井 義孝 (Yoshitaka Matsui)
佐藤 浩一 (Koichi Sato)

1. はじめに

建設コスト削減に対する取り組みとして、PC 床版 2 主桁橋の建設事例が増加している。PC 床版を有する合成 2 主桁橋は構造の簡略化を図り、耐久性および経済性の向上を目指した橋梁形式として注目されている。そこで、このような PC 床版を有する合成 2 主桁橋の動的応答特性を調べることは重要であると言える。また、構造物の動的応答はその構造物に作用する走行車両、風、地震などの動的外力の性質と構造物自身の固有振動特性、すなわち固有振動数や固有振動モードに大きく依存している。つまり、構造物の動的応答特性を正確に把握するためには、固有振動数および固有振動モードを低次から高次にわたり、精度良く計算することが重要であると考えられる。

一般に立体骨組構造物の固有振動解析において構造物のモデル化を行う際には、部材要素を 2 軸対称断面に仮定していることが多い。2 軸対称断面部材では、断面の図心とせん断中心が一致しているため、曲げ振動と縦振動およびねじり振動はそれぞれ独立して発生する。しかし、一般に橋梁構造物を構成する部材には、箱型断面や π 型断面などの非対称性を有する薄肉断面部材が用いられることが多く、そのような断面内では図心とせん断中心は一致しない。そのため、2 軸非対称断面においては直交二方向の主軸回りの曲げ振動とねじり振動とが独立して発生せず、それらが連成する複雑な三重連成振動となる。

合成桁構造を有する構造物の解析においては、合成断面を鋼断面に換算し、薄肉開断面部材として解析を行う方法が一般的である。薄肉断面を有する桁の固有振動解析には有限要素法が多くの研究で用いられているが、著者らは薄肉変断面桁の固有振動解析を行うにあたり、一般化された剛性マトリックスおよび質量マトリックスを導いている¹⁾。また、平面および立体骨組構造物の固有値を計算し、整合質量法、集中質量法、連続質量法の解の精度について検討している^{2), 3)}。

構造物の固有振動解析を行う際、構造物の振動において復元力に関する剛性マトリックスは断面の図心、慣性力に関する質量マトリックスは断面の重心で作成される。したがって、断面の図心と重心の異なる合成断面では断面内の解析節点に図心と重心のずれが生じ、その偏心量を考慮する場合と無視する場合では得られる固有値に誤差が現れると考えられる。そこで、本研究は図心、重心、せん断中心が異なる 2 軸非対称合成断面を有する直線お

よび曲線 2 主桁橋において、重心の偏心量が固有振動数に与える影響について検討するものである。

2. 解析方法

構造物の固有振動特性を求める方法としては、これをいくつかの要素に分割し、有限要素解析を行うことが主流になっている。構造部材を図-1 のような桁要素の集合体に分割して有限要素解析を行う場合、断面の図心またはせん断中心を要素間の節点とする方法が用いられる。断面の図心と重心とが一致する鋼断面では、図心を解析節点とすれば同一節点に関して剛性および質量マトリックスを作成することができるが、合成断面では、断面の図心と重心が異なるため、その偏心距離を考慮する場合と無視する場合では得られる固有値に誤差が生じると考えられる。そこで、図-1 に示す桁要素の集合体である薄肉断面部材要素の両端断面上の任意点 $P(y_p, z_p)$ 、 $Q(y_q, z_q)$ を新しい節点とする剛性マトリックスおよび質量マトリックスを作成することによって、断面内の同一節点における解析が可能となり、各解析節点において重心の偏心量を考慮した固有振動解析が行える。

2.1 断面上の任意点における変位関数

図-1 に示すような薄肉断面部材要素において、せん断中心 $S(y_s, z_s)$ における変位は任意点 $P(y_p, z_p)$ の変位を用いて次のように表される。

$$u_s(x) = u_p(x) + y_p \cdot v'_p(x) + z_p \cdot w'_p(x) - \theta'(x) \cdot \omega_n(y_p, z_p) \quad (1a)$$

$$v_s(x) = v_p(x) + (z_p - z_s) \cdot \theta(x) \quad (1b)$$

$$w_s(x) = w_p(x) - (y_p - y_s) \cdot \theta(x) \quad (1c)$$

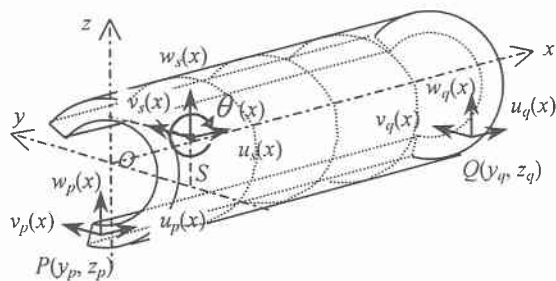


図-1 薄肉断面部材要素

2.2 剛性および質量マトリックスの一般化

図-1 に示すように、部材要素左端の任意点を $P(y_p, z_p)$ 、右端の任意点を $Q(y_q, z_q)$ とすれば、点 Q においても式(1)と同様の関係式を導くことができる。よって、部材要素両端面上のせん断中心 $S(y_s, z_s)$ における変位は、以下のようにマトリックス表示される。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{SL} \\ \mathbf{d}_{SR} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_p \\ \mathbf{d}_q \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

ここで、

$$\mathbf{d}_{SL} = \{u_{SL}, v_{SL}, w_{SL}, \theta_{xSL}, \theta_{ySL}, \theta_{zSL}, \theta_{\omega SL}\}^T \quad (2b)$$

$$\mathbf{d}_{SR} = \{u_{SR}, v_{SR}, w_{SR}, \theta_{xSR}, \theta_{ySR}, \theta_{zSR}, \theta_{\omega SR}\}^T \quad (2c)$$

$$\mathbf{d}_p = \{u_p, v_p, w_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}, \theta_{zp}, \theta_{\omega p}\}^T \quad (2d)$$

$$\mathbf{d}_q = \{u_q, v_q, w_q, \theta_{xq}, \theta_{yq}, \theta_{zq}, \theta_{\omega q}\}^T \quad (2e)$$

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_p & y_p & -\omega_n(y_p, z_p) \\ 0 & 1 & 0 & z_p - z_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(y_p - y_s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(y_p - y_s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_p - z_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2f)$$

$$\mathbf{T}_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_q & y_q & -\omega_n(y_q, z_q) \\ 0 & 1 & 0 & z_q - z_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(y_q - y_s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(y_q - y_s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_q - z_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2g)$$

ここで、式(2a)を $\mathbf{d}_s = \mathbf{T} \mathbf{d}_{pq}$ と表し、座標変換マトリックス $\mathbf{T}$ を用いて図心位置における要素剛性マトリックス $\mathbf{K}$ を変換すると、部材要素両端面上の任意点における要素剛性マトリックス $\mathbf{K}_{pq}$ は次のようになる。

$$\mathbf{K}_{pq} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (3a)$$

また、要素剛性マトリックスと同様の方法により、要素質量マトリックス $\mathbf{M}$ から断面内の任意点における要素質量マトリックス $\mathbf{M}_{pq}$ に変換することができる。

$$\mathbf{M}_{pq} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (3b)$$

以上より、式(3a)、(3b)を用いることによって、部材要素両端面上の同一節点に関する剛性マトリックスと質量マトリックスを求めることができ、断面内の同一節点における固有振動解析を行うことが可能となる。ここで、断面内の任意点における剛性マトリックスを $\mathbf{K}$ 、質量マトリックス $\mathbf{M}$ 、構造物の固有円振動数 ω とすると、任意点を解析節点とする固有振動解析における振動数方程式は、次式で示される固有値問題に帰着される。

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (4)$$

上式の固有値問題を解くにあたり、本研究では Householder 法を使用した。

3. 解析モデル

本研究で用いた解析モデルの断面図を図-2、断面諸元および座標値を表-1 に示す。解析モデルは直線橋および曲率半径 $R=200\text{m}$ 、 100m 、 50m の曲線橋とし、支間長は 31.5m である。また、有限要素法による分割数は 10 分割とし、境界条件は両端単純支持とする。

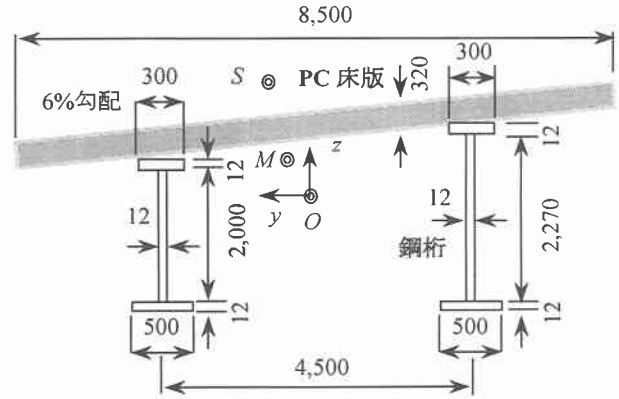


図-2 断面図

表-1 断面諸元および座標値

$A(\text{m}^2)$	4.606×10^{-1}
$I_y(\text{m}^4)$	1.329×10^{-1}
$I_z(\text{m}^4)$	2.705×10^0
$J(\text{m}^4)$	2.934×10^{-4}
$C_w(\text{m}^6)$	6.304×10^{-1}
$w(\text{kN/m})$	3.547×10^1
図心 $O(y, z)$ (m)	(0.000, 0.000)
重心 $M(y, z)$ (m)	(0.008, 0.210)
せん断中心 $S(y, z)$ (m)	(0.368, 0.354)

4. 解析結果

2 軸非対称合成断面を有する直線橋および曲線橋において、重心の偏心量が固有振動数に与える影響を調べる。整合質量法を用いた固有振動解析で、解析節点を図心 O 、重心 M 、せん断中心 S とした時、重心の偏心量を無視した場合と考慮した場合について固有振動解析を行った。

表-2 に直線橋、表-3、表-4 および表-5 には曲率半径 $R=200\text{m}$ 、 100m および 50m の曲線橋における 10 次モードまでの振動モードと固有振動数を示しており、それぞれ H は水平振動モード、 V は鉛直振動モード、 T はねじり振動モードを表している。括弧内の値は解析節点を図心 O 、重心 M 、せん断中心 S とした場合において重心の偏心量を無視した固有振動数に対する考慮した場合のそれぞれの誤差(%)である。また、図-3 および図-4 に解析節点を図心およびせん断中心とした場合の固有振動数に与える重心の偏心量の影響と曲率半径の関係を示す。

4.1 直線橋における固有振動数

表-2 において、各振動モード別に固有振動数を見ると、水平振動モードについては解析節点を図心とした場合に誤差は生じず、重心またはせん断中心とした場合においては最大 0.033% のわずかな誤差が生じた。これは水平振動は z 軸回りに発生するが、6% の横断勾配を有する図-2 の断面図は z 軸に関してわずかに非対称であることが影響していると考えられる。鉛直振動モードについては高次になるほど重心の偏心量の影響が大きく現れていることが認められる。ねじり振動モードについては解析節点を図心および重心にした場合、若干の誤差が生じているが、これは図-2 の 2 軸非対称合成断面ではねじり振動と z 軸回りの水平振動および y 軸回りの鉛直振動が連成する複雑な三重連成振動が発生しているためであると考えられる。それに対して、解析節点をせん断中心とした場合にはねじり振動はせん断中心に関して発生しているため、重心の偏心量の影響は現れていないことが確認できる。また、各解析節点に注目すると、図心および重心においては全ての振動モードで、せん断中心においては鉛直 1 次(V1)、水平 1 次および 2 次(H1・H2)以外の振動モードで重心の偏心量を考慮した方が無視した場合よりも小さな固有振動数をとっている。

表-2 直線橋($R=\infty$)における固有振動数(Hz)

振動モード		解析節点の位置					
		図心 O		重心 M		せん断中心 S	
		重心の偏心量		重心の偏心量		重心の偏心量	
		無視	考慮	無視	考慮	無視	考慮
1	T1	3.776	3.776 (0.000)	3.813	3.813 (0.000)	3.855	3.855 (0.000)
2	V1	4.354	4.353 (-0.023)	4.610	4.610 (0.000)	4.997	4.999 (0.040)
3	T2	15.002	15.002 (0.000)	15.133	15.132 (-0.007)	15.317	15.317 (0.000)
4	V2	17.417	17.402 (-0.086)	17.385	17.370 (-0.086)	17.327	17.311 (-0.092)
5	H1	19.644	19.644 (0.000)	19.644	19.644 (0.000)	19.805	19.806 (0.005)
6	T3	33.714	33.713 (-0.003)	34.013	34.012 (-0.003)	34.420	34.420 (0.000)
7	V3	39.189	39.113 (-0.194)	39.402	39.337 (-0.165)	39.776	39.718 (-0.146)
8	T4	59.914	59.910 (-0.007)	60.417	60.411 (-0.010)	61.169	61.169 (0.000)
9	V4	69.675	69.434 (-0.346)	68.210	67.900 (-0.455)	65.667	65.391 (-0.420)
10	H2	78.577	78.577 (0.000)	78.575	78.574 (-0.001)	77.016	77.041 (0.033)

4.2 曲線橋における固有振動数

表-3、表-4 および表-5 において各振動モード別に固有振動数を見ると、水平振動モードについては直線橋の場合と異なり、図心を解析節点とした場合においても誤差が生じており、その傾向は 2 次モード(H2)で認められる。鉛直振動モードについては直線橋と同様、高次になるに従って重心の偏心量の影響が現れていることがわかる。ねじり振動モードについては直線橋の場合と異なり、曲

率半径が小さくなるとせん断中心を解析節点とした場合においても重心の偏心量が固有振動数に影響を与えていることが確認できるが、その影響は特に 1 次モード(T1)で顕著である。一方、各解析節点別に見ると、図心、重心およびせん断中心の全解析節点において、直線橋と同様にほとんどの振動モードで重心の偏心量を考慮した固有振動数の方が無視した場合よりも小さな値をとることがわかる。

表-3 $R=200\text{m}$ の曲線橋における固有振動数(Hz)

振動モード		解析節点の位置					
		図心 O		重心 M		せん断中心 S	
		重心の偏心量		重心の偏心量		重心の偏心量	
		無視	考慮	無視	考慮	無視	考慮
1	T1	3.610	3.609 (-0.028)	3.635	3.635 (0.000)	3.706	3.706 (0.000)
2	V1	4.589	4.588 (-0.022)	4.814	4.815 (0.021)	5.163	5.164 (0.019)
3	T2	14.935	14.935 (0.000)	15.063	15.063 (0.000)	15.266	15.266 (0.000)
4	V2	17.435	17.420 (-0.086)	17.407	17.391 (-0.092)	17.387	17.371 (-0.092)
5	H1	19.971	19.971 (0.000)	19.973	19.973 (0.000)	20.541	20.541 (0.000)
6	T3	33.642	33.642 (0.000)	33.939	33.938 (-0.003)	34.407	34.407 (0.000)
7	V3	39.118	39.042 (-0.194)	39.338	39.271 (-0.170)	39.802	39.745 (-0.143)
8	T4	59.791	59.789 (-0.003)	60.291	60.285 (-0.010)	61.152	61.152 (0.000)
9	V4	69.509	69.267 (-0.348)	68.037	67.727 (-0.456)	65.329	65.068 (-0.400)
10	H2	77.415	77.402 (-0.017)	77.636	77.654 (0.023)	75.623	75.650 (0.036)

表-4 $R=100\text{m}$ の曲線橋における固有振動数(Hz)

振動モード		解析節点の位置					
		図心 O		重心 M		せん断中心 S	
		重心の偏心量		重心の偏心量		重心の偏心量	
		無視	考慮	無視	考慮	無視	考慮
1	T1	3.364	3.364 (0.000)	3.361	3.361 (0.000)	3.414	3.415 (0.029)
2	V1	5.052	5.052 (0.000)	5.206	5.206 (0.000)	5.565	5.566 (0.018)
3	T2	14.798	14.797 (-0.007)	14.918	14.918 (0.000)	15.132	15.132 (0.000)
4	V2	17.545	17.531 (-0.080)	17.527	17.510 (-0.097)	17.554	17.537 (-0.097)
5	H1	20.923	20.923 (0.000)	20.909	20.908 (-0.005)	21.786	21.785 (-0.005)
6	T3	33.551	33.552 (0.003)	33.844	33.844 (0.000)	34.369	34.369 (0.000)
7	V3	39.048	38.973 (-0.192)	39.282	39.216 (-0.168)	39.860	39.804 (-0.141)
8	T4	59.644	59.643 (-0.002)	60.139	60.134 (-0.008)	61.099	61.099 (0.000)
9	V4	69.264	69.019 (-0.354)	67.714	67.409 (-0.450)	64.801	64.564 (-0.366)
10	H2	75.481	75.481 (0.000)	76.014	76.052 (0.050)	74.254	74.267 (0.018)

表-5 $R=50\text{m}$ の曲線橋における固有振動数(Hz)

振動モード		解析節点の位置					
		図心 O		重心 M		せん断中心 S	
		重心の偏心量 無視	考慮	重心の偏心量 無視	考慮	重心の偏心量 無視	考慮
1	T1	2.958	2.958 (0.000)	2.857	2.857 (0.000)	2.865	2.866 (0.035)
2	V1	6.197	6.197 (0.000)	6.214	6.215 (0.016)	6.617	6.618 (0.015)
3	T2	14.394	14.390 (-0.028)	14.496	14.494 (-0.014)	14.733	14.733 (0.000)
4	V2	17.950	17.940 (-0.056)	17.957	17.941 (-0.089)	18.080	18.062 (-0.100)
5	H1	24.364	24.364 (0.000)	24.248	24.243 (-0.021)	25.407	25.399 (-0.032)
6	T3	33.317	33.316 (-0.003)	33.595	33.595 (0.000)	34.227	34.228 (0.003)
7	V3	38.898	38.826 (-0.185)	39.191	39.127 (-0.163)	40.088	40.038 (-0.125)
8	T4	59.270	59.271 (0.002)	59.750	59.745 (-0.008)	60.836	60.838 (0.003)
9	V4	68.388	68.129 (-0.379)	66.517	66.248 (-0.404)	63.148	62.987 (-0.255)
10	H2	71.539	71.575 (0.050)	72.728	72.755 (0.037)	71.859	71.813 (-0.064)

固有振動数に与える重心の偏心量の影響と曲率半径の関係について、水平および鉛直振動モードは図心、ねじり振動はせん断中心に関して発生することを考慮して見ると、図-3 より図心を解析節点とした場合、水平振動モードについては曲率半径が小さくなるに従って重心の偏心量の影響が大きくなることが認められる。鉛直振動モードについては曲率半径が小さくなるほど1次から3次モード(V1・V2・V3)における重心の偏心量の影響は小さくなるが、4次モード(V4)においては大きくなった。これより、曲率半径が小さくなるにつれて高次モードになるほど重心の偏心量の影響は大きくなることがわかる。図-4 より、ねじり振動モードについては特に1次モード(T1)で誤差が現れているが、その値は曲率半径が小さくなるに従って大きくなることが確認できる。

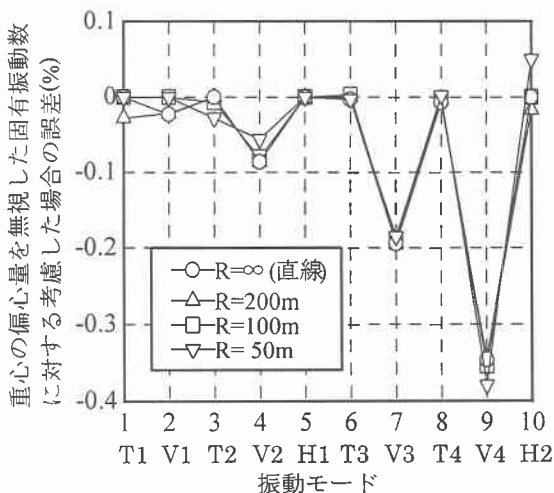


図-3 図心を解析節点とした場合の固有振動数に与える重心の偏心量の影響と曲率半径の関係

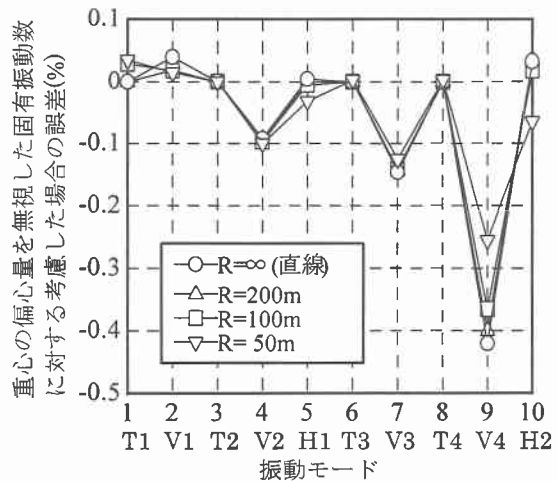


図-4 せん断中心を解析節点とした場合の固有振動数に与える重心の偏心量の影響と曲率半径の関係

5. おわりに

本研究は図心、重心、せん断中心が異なる2軸非対称合成断面を有する直線および曲線2主桁橋を対象とし、合成断面における重心の偏心量が固有振動数に与える影響について検討したものである。ここで得られた結果を以下にまとめる。

合成断面における重心の偏心量の影響を各振動モード別に見ると、水平振動モードについては直線橋の場合、解析節点を重心またはせん断中心にすると誤差が生じたが、曲線橋では図心を解析節点とした場合にも誤差が認められ、その値は曲率半径が小さくなるほど大きくなった。鉛直振動モードについては直線橋、曲線橋共に高次になるほど重心の偏心量の影響が大きくなっていることが認められるが、その傾向は曲率半径が小さくなるに従って顕著になった。ねじり振動モードについては直線橋の場合、解析節点をせん断中心にすると誤差は生じなかったが、曲線橋では特に1次モード(T1)で誤差が現れ、その値は曲率半径が小さくなるに従って大きくなることが確認できた。また、全解析節点において、直線橋、曲線橋共にほとんどの振動モードで重心の偏心量を考慮した場合の固有振動数の方が無視した場合よりも小さな値をとるが、その誤差は1%未満であった。

以上より、重心の偏心量が合成2主桁橋の固有振動数に与える影響は比較的小さいが、曲率半径の小さい橋梁および高次の鉛直振動モードにおいては考慮する必要があると考えられる。

参考文献

- 1) 林川俊郎・武村信也・佐藤浩一：薄肉変断面桁の三重連成振動解析について、鋼構造年次論文報告集，第5巻，pp.309-312,1997年11月。
- 2) 林川俊郎・佐藤康治・角田史雄：平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度，北海道大学工学研究報告，第148号，pp.1-15,1989年10月。
- 3) Hayashikawa,T.and Watanabe,N.:Free Vibration Analysis of Steel Bridges of Arch-Structural Systems, Proc. of EASEC-3, pp.963-968, April, 1991.