# 特異要素を用いたハイアラーキ有限要素法による薄肉構造物の局所応力解析

Local Stress Analysis of Thin-Walled Structures by Hierarchical Finite Element Method Using Singular Elements

函館工業高等専門学校　○正員　渡辺　力
長岡技術科学大学名誉教授　正員　林　正
函館工業高等専門学校　斉藤 秀信
函館工業高等専門学校　小笠原 滋

## 1.　まえがき

級数を用いて変位の補間関数を高次化して精度を改善するハイアラーキ要素 ($p$ 法) では，粗い要素分割で構造物の全体解析を行うことができる．しかし，特異性を有する構造や集中荷重を受ける場合に対して変位の収束性が悪く，要素内で応力が振動する傾向にある．そのため，$p$ 法の弱点である特異点問題に対して振動を抑えて精度を改善するために，特異点 (応力集中箇所) の近傍では従来の $h$ 法と同様に要素の細分化が行われる．Szabó [1]は，要素分割の指針として，特異点や応力集中箇所を隔離するように単一あるは二重に細分割することを示しているが，この方法では未知量が増加して $p$ 法の長所が活かされない．

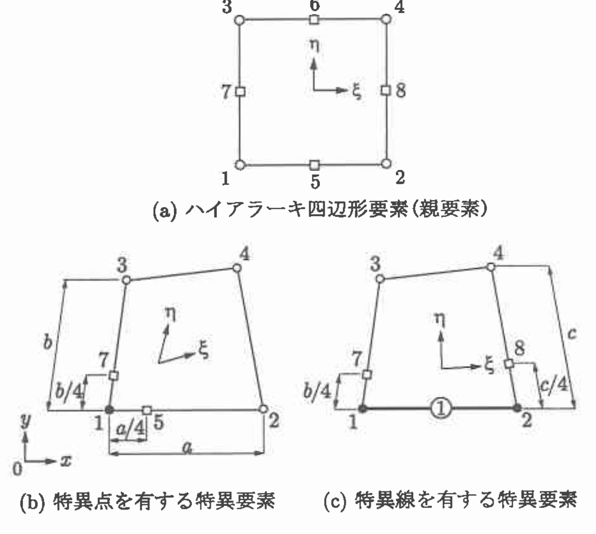
そこで，要素を細分割せずに収束性を改善し高精度の解を得るために特異要素を用いる手法を提案している[2]．この手法は破壊力学の問題で用いられている 1/4 写像点を用いた特異要素[3]をハイアラーキ要素による局所応力解析に応用したもので，要素の形状関数を変更せずに，要素の節点あるいは節線に特異性を与えることができる．

数値計算では，親要素の写像点の位置を変更するだけであるので，新たな要素をプログラムに組み入れる必要が無い．また，写像点の変更や追加を行う場合にも写像点は自由度を有していないので，バンド番号などの修正も不必要であり簡便で実用的な方法である．

本論文では，固定端に特異性を有する片持ち板の数値計算を行って，特異要素の精度とその応力挙動を検証し，要素の節点あるいは節線に特異性を与えても他の点へ影響が及ぶことなく要素内の任意の点で高精度の解が得られることを示す．さらに特異点および特異線を有する要素を薄肉門形ラーメン隅角部の局所応力解析に用いて，その実用性を検証した結果を報告する．

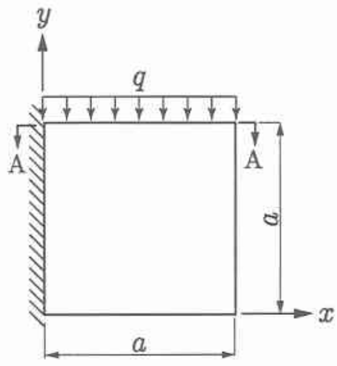
## 2.　特異要素

ハイアラーキ要素では，集中荷重に対して級数展開した変位の収束性が悪く，要素内で応力が振動する傾向にある．また，線荷重が作用する場合や，要素が L 字形に結合する隅角点で同様なことが起きる．これらの点や線上は特異であるので，近傍で要素を分割すれば振動は収まるが，特異点 (線) 近傍の応力を精確に求めるには要素を細分割する必要がある．その結果，未知数が増加して $p$ 法の長所が活かされない．そこで，要素を分割せずに収束性を改善するために特異要素を用いる．

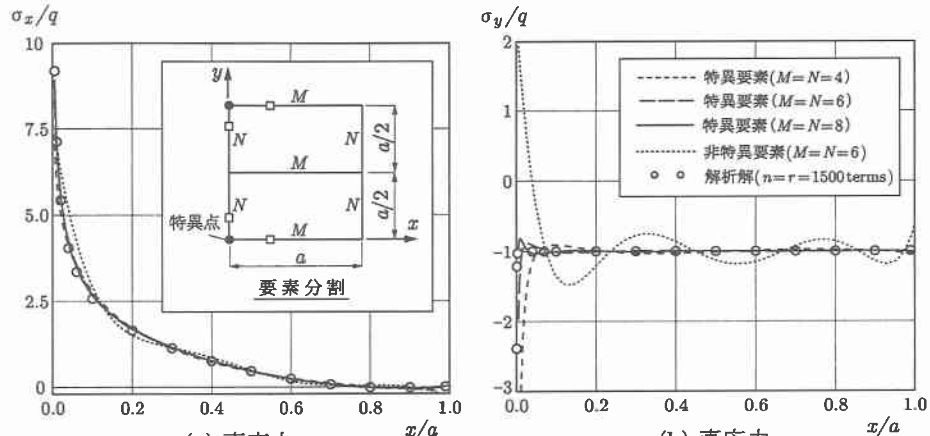



**図–1**　ハイアラーキ四辺形要素

親要素として，**図–1**(a) に示す隅角点に 1～4 の節点 (○印) を有し，辺の中点に 5～8 の 4 つの写像点 (□印) を配置した四辺形要素を用いる．図 (b) は親要素の節点 1 で要素に特異性が生じるように，親要素の 2 つの写像点 5, 7 を 1/4 写像点に移動した特異要素である．これにより，要素に $1/\sqrt{r}$ の特異性 ($r$ は特異点からの距離) を持たせることができる．図 (c) は親要素の節線①で要素に特異性が生じるように，親要素の 2 つの写像点 7, 8 を 1/4 写像点に移動した特異要素である．

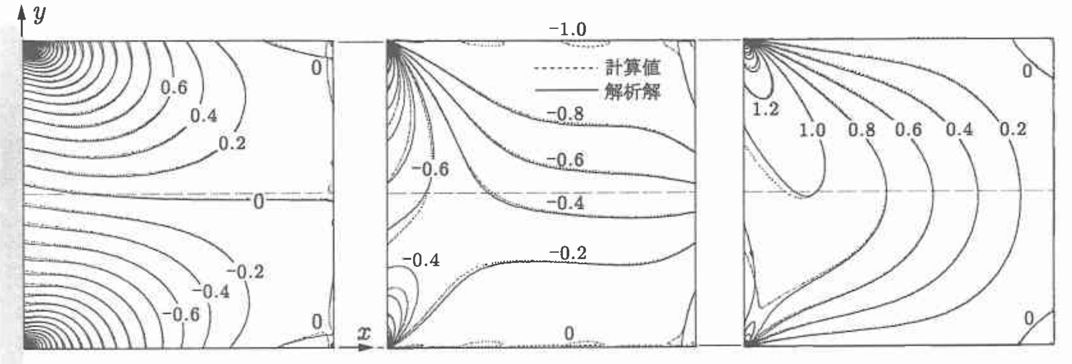



図–2　片持ち板



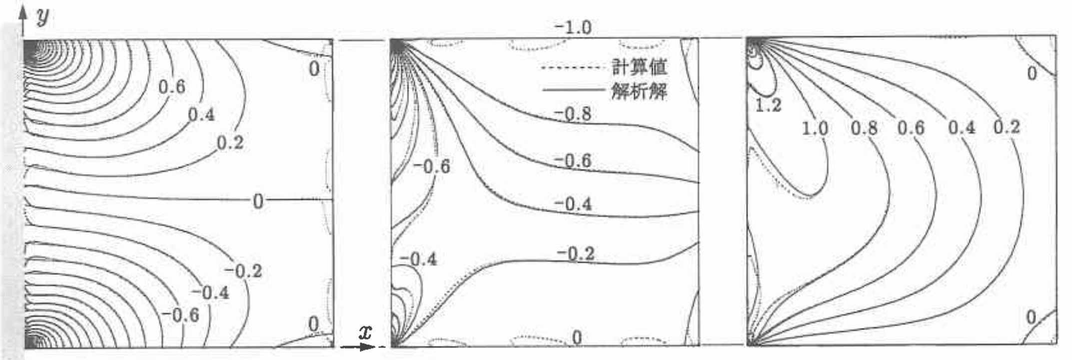

(a) 直応力 $\sigma_x$　　(b) 直応力 $\sigma_y$

図–3　A–A 線上の応力




(a) 直応力 $\sigma_x/q$　　(b) 直応力 $\sigma_y/q$　　(c) せん断応力 $\tau_{xy}/q$

**図–4**　特異点を有する特異要素による片持ち板の応力分布 ( $M$=$N$=6 次式，2 要素)




(a) 直応力 $\sigma_x/q$　　(b) 直応力 $\sigma_y/q$　　(c) せん断応力 $\tau_{xy}/q$

**図–5**　特異線を有する特異要素による片持ち板の応力分布 ( $M$=$N$=6 次式，1 要素)

## 3.　数値計算例

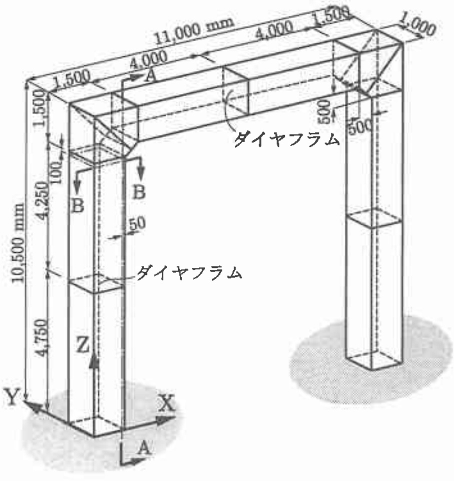
### (1)　片持ち板

**図–2**に示す分布荷重 $q$ を受ける片持ち板の平面応力解析により，特異要素の精度と要素内の応力挙動を調べる．計算モデルは 1 辺が $a$ の正方形板で，ポアソン比を $\nu=0.3$ とし，境界条件は $x=0$ の線上で完全固定 ( $u=v=0$ ) とする．

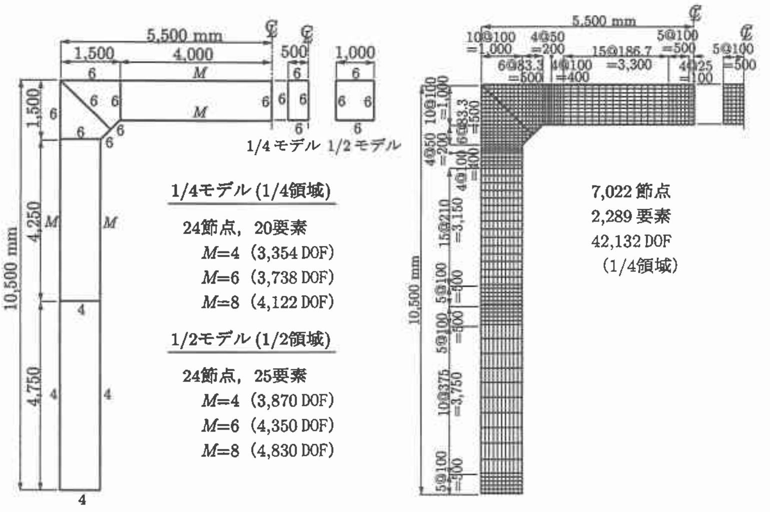
一般的に細長い片持ちはりに対して $x$ 軸方向の変位を許容する境界条件を用いる場合が多いが，小林ら[4]は完全固定の境界条件を満たすフーリエ級数を用いて片持ち板の応力解析を行っている．ここでは，小林らの解析解と本解法の計算値を比較する．なお，解析解では 3～4 桁の応力の収束値を計算するために級数に 1500 項を用いている．

要素分割は，**図–3**の図中に示すように 2 分割して固定端 ( $x=0$ ) の上・下端に特異点を設けた場合と，要素分割をせずに 1 要素により固定端の節線を特異線とした場合の 2 ケースを計算する．多項式の次数は全ての節線で $M$=$N$=4～8 次式を用いる．

**図–3**に A–A 線 ( $y=a$ ) 上の直応力 $\sigma_x$ と $\sigma_y$ を無次元化して示す．比較のために，$M$=$N$=6 次式を用いた非特異要素による計算値 ( 図の点線 ) も示してある．非特異要素では，$\sigma_x, \sigma_y$ ともに要素内で振動しており，特に $\sigma_y$ は級数を 10 次式まで上げても振動は収まらな




図–6 薄肉門形ラーメン




(a) ハイアラーキ要素 (b) $h$ 法

図–7 要素分割

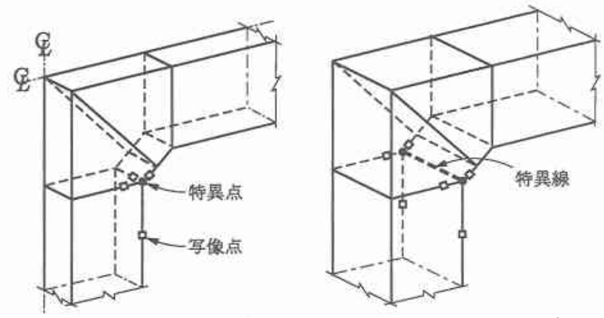
い．それに対して特異要素では，解が振動すること無く 4～6 次式を用いれば収束値が得られ，解析解とも良く一致している．図は 2 分割して特異点を設けた場合のものであるが，特異線を用いた場合でもほぼ同様の結果が得られている．

**図–4**に特異点 (2 要素)，**図–5**に特異線 (1 要素) による直応力 $\sigma_x, \sigma_y$，せん断応力 $\tau_{xy}$ の分布図を示す．図中の点線は $M\!=\!N\!=\!6$ 次式を用いたハイアラーキ要素による計算値で，実線が級数に 1500 項用いた解析解である．図より，ハイアラーキ要素による計算値と解析解は，固定端付近で僅かの差があるものの良く一致していることが分かる．どの応力成分でも固定端 ($x=0$) の上・下端に応力が集中しており，ハイアラーキ要素では特異要素によりこれらの点あるいは $x=0$ の線上に特異性を与えているが，要素内のどの点においても解析解に良く一致した解が得られている．

### (2) 薄肉門形ラーメン

**図–6**に示す高さ 10.5m，幅 11m，奥行き 1m の薄肉門形ラーメン[2)]に生じる局所応力の計算に本解法を適用して，特異点および特異線を有する特異要素の効果を調べる．計算モデルは，隅角部にハンチを，はりと柱の中央と隅角部にダイヤフラムを有し，板厚はすべて 16mm とする．材料定数にはヤング係数 E=206GPa( $2.1\times10^6$kgf/cm$^2$)，ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いる．対称条件を考慮して構造全体の 1/4 領域を計算する 1/4 モデルと，1/2 領域を計算する 1/2 モデルの 2 ケースを計算する．また，荷重は，はりの上フランジに分布荷重 $q$ を満載する．

要素分割は，**図–7**(a) に示すようにダイヤフラムの取り付く位置でのみ行う．多項式の次数は，柱の固定端側を 4 次式 ( Y 軸方向にも 4 次式 ) とし，隅角部の要素には全て 6 次式を用いる．柱の隅角部側の要素は遷移要素として，次数 $M$ に 4～8 次式を用いる．特異点 ( 線 ) は柱側の隅角部のみに設け，1/4 モデルでは**図–8**(a) に示すように写像点を配置して特異点を設ける．1/2 モデルは図 (b) に示すように写像点を配置して特異線を設ける．

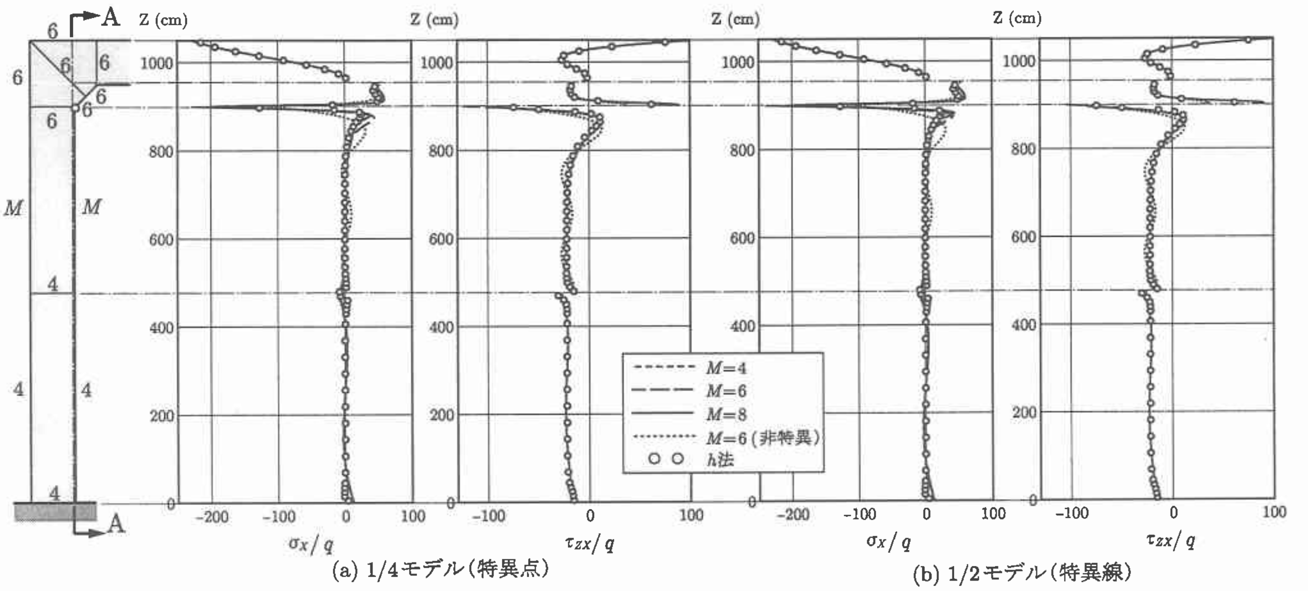



(a) 1/4 モデル (b) 1/2 モデル

図–8 特異点の配置

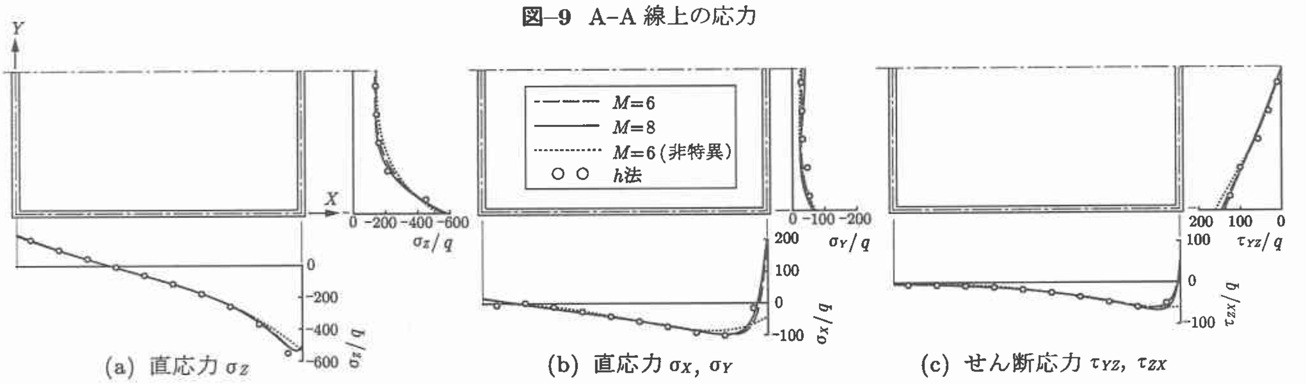
以上より，1/4 モデルでは 24 節点，20 要素 ( 内，特異要素 5 要素 ) を，1/2 モデルでは 24 節点，25 要素 ( 内，特異要素 7 要素 ) を用いている．また，比較解には，1/4 領域を 8 節点四角形要素と 6 節点三角形要素[5)]を用いて**図–7**(b) のように細分割した FEM 要素の図心点応力を用いる．

**図–9**に柱の A–A 線 ( Y=950mm ) 上の板表面 (外側) の直応力 $\sigma_X$ とせん断応力 $\tau_{ZX}$ を示す．なお，応力は全体座標軸方向の成分で表しており，図は荷重 $q$ で無次元化している．A–A 線上では，隅角部のダイヤフラムの取り付く位置で大きな局所応力が生じる．特異要素を用いた本解法では，図 (a) の 1/4 モデル，図 (b) の 1/2 モデルともにダイヤフラムの取り付く位置でのみ



(a) 1/4モデル(特異点)　(b) 1/2モデル(特異線)

**図–9** A–A 線上の応力



(a) 直応力 $\sigma_Z$　(b) 直応力 $\sigma_X$, $\sigma_Y$　(c) せん断応力 $\tau_{YZ}$, $\tau_{ZX}$

**図–10** B–B 断面の応力 ( 1/2 モデル )

要素分割を行っているが，どの応力成分も細分割した $h$ 法の値と良く一致している．また，収束性も良好で次数 $M$ には 4 次式でもほぼ収束値が得られている．それに対して，特異要素を用いていない図の点線 ( $M$=6 次式 ) では，ダイヤフラム取り付け位置の精度が悪く解が振動していることから，特異点および特異線を用いた特異要素が応力の収束性を著しく改善していることが分かる．

**図–10**に 1/2 モデルにおける柱の B–B 断面 ( Z=8900mm ) 隅角部の板表面 (外側) の直応力とせん断応力を示す．断面方向でも**図–9**の場合と同様に特異要素により収束性が改善されており，隅角部を要素分割することなく細分割した $h$ 法の値と良く一致した解が得られている．1/4 モデルの場合でも同様なことが言える．

なお，本計算例のような箱形断面の構造には特異線を有する特異要素が有効で，奥行き ( Y 軸 ) 方向に要素分割を行わずに十分な精度の解が得られる．

## 4.　まとめ

特異点および特異線を有する特異要素を用いたハイアラーキ有限要素法を片持ち板と薄肉門形ラーメンの数値計算に用いた結果から以下のことが言える．

1) 特異要素により，要素の 1 つの節点あるいは 1 本の節線に特異性を与えても，要素内の他の点へ影響が及ぶことが無く，任意点で高精度の解が得られる．
2) 特異点および特異線を用いた特異要素は，応力の収束性を改善し，ハイアラーキ要素による薄肉構造の局所応力解析に有効である．

### 参考文献


1) Szabó,B.A. : Mesh design for the p-version of the finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.55, pp.181–197, 1986.
2) 林　正, 渡辺　力, 斎藤道生 : ハイアラーキ要素による薄肉構造の局所応力解析, 土木学会論文集, No.654/I-52, pp.105–119, 2000.
3) 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦 : 有限要素法ハンドブック I , 基礎編, 倍風館, pp.416–421, 1981.
4) 小林道明, 石川博将, 秦　謹一 : 短い片持ばりの二次元応力問題について, 日本機械学会論文集 (第 1 部), pp.1355–1364, 1976.
5) NISAII ユーザーズ・マニュアル Version 93.0 : Engineering Mechanics Research Corporation, 1994.