

振動流中の剥離を伴う場合の楕円柱まわりの流れ構造について

Flow structure around an elliptical body in oscillating flow

北見工業大学土木開発工学科 ○学生員 志田 紀子 (Noriko Shida)

北見工業大学土木開発工学科 正 員 佐藤 幸雄 (Yukio Sato)

1. まえがき

たとえば、海底油田の開発等で構築される海洋構造物の部材には円柱状のものが多く使われるが、円柱より流水の抵抗力が小さい楕円柱のものも好材料である。本研究の目的は、波動場中に置かれた楕円柱の表面に剥離を伴う場合の楕円柱に働く流体力を求めることにあり、その基本的な問題として、まず、波動場中に置かれた楕円柱の場合について考えることとした。

解析方法は円柱の場合の解法と同様に、基本方程式に渦度方程式と流れ関数に対するポアソン方程式を用い、それにスペクトル法を適用して、差分法により数値解析を行うものである。楕円柱は円柱と異なり、流水中に没水させて設置する場合、その置き方により、楕円柱まわりの流れ構造も種々異なった様相を示すこととなり、興味深い現象と言える。本研究は、楕円柱まわりの流れの様子についての数値解析結果を円柱の場合と対比させて示したものである。

2. 解析方法

2次元振動流の中に、円柱または楕円柱を流れに直角・水平に没水させて設置（固定）した場合を考える。楕円柱の形状を

$$\begin{aligned}\hat{x} &= R_0 e^r \cosh \lambda \cos \theta \\ \hat{z} &= R_0 e^r \sinh \lambda \sin \theta\end{aligned}\quad (1)$$

で与える。円柱の場合は

$$\begin{aligned}\hat{x} &= R_0 e^r \cos \theta \\ \hat{z} &= R_0 e^r \sin \theta\end{aligned}\quad (2)$$

となる。

式(1)で λ は楕円柱の形状を表わす定数、 R_0 は楕円柱の大きさを与える。

いま、各次元変量 $\hat{\cdot}$ に $\hat{\cdot}$ を付したものを、 $\hat{R}_0$ と振動流の角振動数 $\hat{\sigma}$ で無次元化する。

$$(x, z) = (\hat{x}, \hat{z}) / \hat{R}_0, \quad t = \hat{\sigma} \hat{t}, \quad (u, w) = (\hat{u}, \hat{w}) / \hat{\sigma} \hat{R}_0$$

動粘性係数； $\nu = \hat{\nu} / \hat{\sigma} (\hat{R}_0)^2$

渦度； $\omega = \hat{\omega} / \hat{\sigma}$

流れ関数； $\psi = \hat{\psi} / \hat{\sigma} (\hat{R}_0)^2$

このとき、

$$\begin{aligned}x &= e^r \cosh \lambda \cos \theta = e^r \varepsilon_x \cos \theta \\ z &= e^r \sinh \lambda \sin \theta = e^r \varepsilon_z \sin \theta\end{aligned}\quad (3)$$

ここで、 $\varepsilon_x = \cosh \lambda$ 、 $\varepsilon_z = \sinh \lambda$ であり、円柱の場合

は $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 1$ に相当する無次元化された渦度方程式と流れ関数に対するポアソン方程式は、それぞれ、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\omega \quad (5)$$

基本方程式の式(4)・(5)を、式(3)を用いて (x, z) 座標より (r, θ) 座標に変換すると、

渦度方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial t} + J^{-1} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} \\ - \varepsilon_x \varepsilon_z J^{-1} \nu \left\{ \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right. \\ \left. + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial r} + \delta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \delta \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \theta} \right\} = 0\end{aligned}\quad (6)$$

流れ関数に対するポアソン方程式は

$$\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial r} + \delta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{J}{\varepsilon_x \varepsilon_z} \omega \quad (7)$$

ここで

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\frac{\cos \theta}{\varepsilon_x} \right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{\varepsilon_z} \right)^2 \\ \beta &= \left(\frac{\sin \theta}{\varepsilon_x} \right)^2 + \left(\frac{\cos \theta}{\varepsilon_z} \right)^2 \\ \gamma &= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_x^2} - \frac{1}{\varepsilon_z^2} \right) \\ \delta &= \sin 2\theta \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_x^2} - \frac{1}{\varepsilon_z^2} \right)\end{aligned}\quad (8)$$

円柱の場合は $\alpha = \beta = 1$ 、 $\gamma = \delta = 0$ である。

J はJacobianで

$$J = \varepsilon_x \varepsilon_z e^{2r} \quad (9)$$

である。

また、式(6)・(7)中の ω, ψ についての θ に関する微係数は、楕円柱まわりの流れが θ 方向に関して周期的であると仮定して、スペクトル法を適用する。

さらに、 r 方向には伸縮座標を導入して

$$r = r_T \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad (10)$$

とおく。式(10)は $\zeta = 0 \sim 1$ のとき、 $r = 0$ （楕円柱または円柱の表面） $r = r_T$ （最も遠い座標点）を与える。 b は

座標の疎密を表す定数。

つぎに、式(6)および(7)の定数 r を ζ で変換し、また、スペクトル法を適用して渦度 ω 、流れ関数 ψ をそれぞれ

$$\omega = \sum_m g_m e^{im\theta}$$

$$\psi = \sum_m f_m e^{im\theta}$$

とおくと

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \sum_m im g_m e^{im\theta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \sum_m im f_m e^{im\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = \sum_m -m^2 g_m e^{im\theta}$$

となり、 ω 、 ψ についての θ に関する微係数は、それぞれ g_m 、 f_m を使用し、フーリエ逆変換をして求めた値を使用することとする。いま、

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \tilde{\omega}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \tilde{\psi}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \hat{\psi}$$

とおくと

渦度方程式；

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \zeta_1 J^{-1} \left[\tilde{\psi} \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} - \tilde{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right] \\ - \varepsilon_x \varepsilon_z J^{-1} \left[\alpha(\zeta_1)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + (\alpha \zeta_2 + \gamma \zeta_1) \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right. \\ \left. + \beta \hat{\omega} + \gamma \tilde{\omega} - \gamma \zeta_1 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \zeta} \right] = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

流れ関数に対するポアソン方程式；

$$\begin{aligned} \alpha(\zeta_1)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + (\alpha \zeta_2 + \gamma \zeta_1) \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \\ + \beta \hat{\psi} + \delta \tilde{\psi} - \delta \zeta_1 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta} = - \frac{J}{\varepsilon_x \varepsilon_z} \omega \quad (12) \end{aligned}$$

ここで

$$\zeta_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{e^b - 1}{br^T} e^{-b\zeta}, \quad \zeta_2 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} = -b\zeta_1^2$$

である。

式(11)・(12)は、それぞれ $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 1$ のときは円柱の場合の式を与えるものである。

以上より、式(11)と(12)を差分化した式を連立させて、数値計算により渦度 ω と流れ関数 ψ を求めることとなる。差分化は、時間方向は前進差分、 ζ 方向は中央差分を用いた。

式(11)・(12)の基本方程式に対する境界条件は、流れ関数 ψ については

$$\zeta = 0 \text{ (楕円柱または円柱の表面) で } \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = 0$$

$$\zeta = 1 \text{ (楕円柱より遠く離れた点) でポテンシャル流の流速 } u \text{ を用いる。}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = e^{\tau} \varepsilon_z \cdot u / \zeta_1 \quad (13)$$

$$u = A \left[\frac{R^4 + R^2(a+1) + a}{R^4 + 2R^2a + a^2} \right] \sin t \quad (14)$$

ここで $a = (\varepsilon_x - \varepsilon_z)/2$, $R = e^{\tau}$, A ; 水平振動流の振幅渦度 ω に関しては

$$\zeta = 0 \text{ で、Thom の条件式 } \omega = -2\varepsilon_x \varepsilon_z \alpha J^{-1} (\zeta_1)^2 \frac{\psi(\Delta \zeta)}{(\Delta \zeta)^2}$$

$\zeta = 1$ で、ポテンシャル流として $\omega = 0$ を用いた。

3. 数値計算と計算結果

計算メッシュは θ 方向について $MM = 64$ 点、 ζ 方向に $NN = 32$ 点とし、1 cycle 当りの時間間隔は $\Delta t = 2\pi/NT$, $NT = 8000$ とし、計算は 1 cycle のみである。

また、 $r_T = 2.3$ ($e^{\tau} = 10$)、 $b = 2.0$ とした。また、K.C.数および Re 数は、それぞれ

$$\text{K.C.数} = \pi A$$

$$\text{Re 数} = 2A/\sqrt{\nu}$$

である。楕円柱近傍の計算メッシュは図-1 に示すような座標点である。

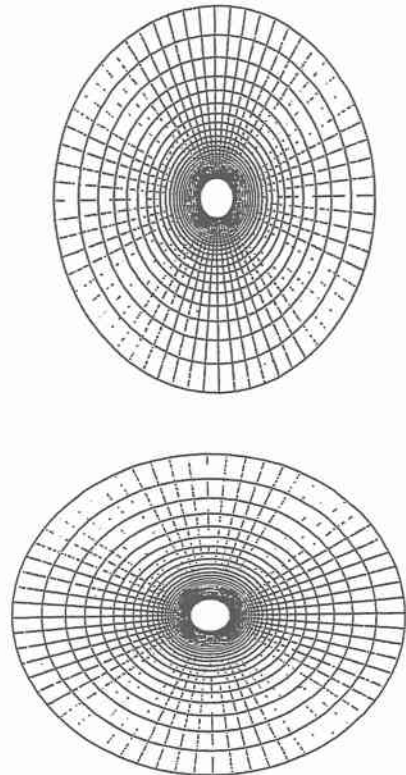
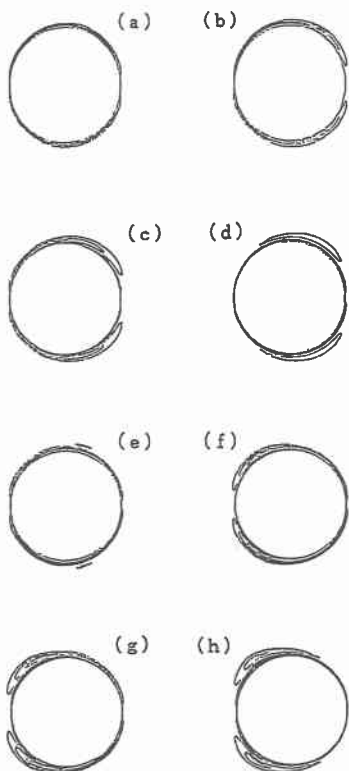


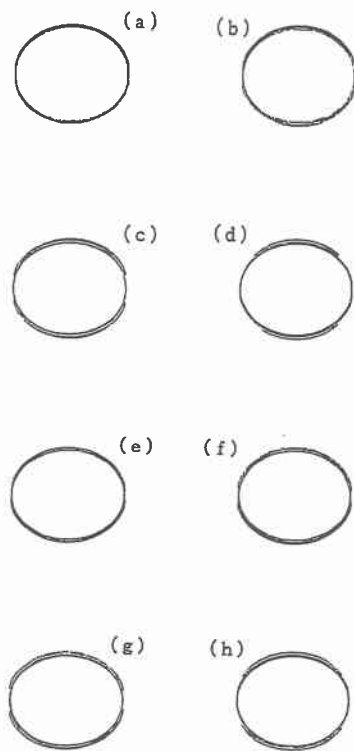
図-1 計算メッシュ (楕円柱)

計算結果を示すと、まず、円柱の場合の流れの様子を示したのが、図-2 と図-3 であり、図-2 は K.C.数=0.785, Re 数=333 の比較的、粘性が強く、また振動流の流速が小さい場合に相当した渦度の Contours 図を示したものである。



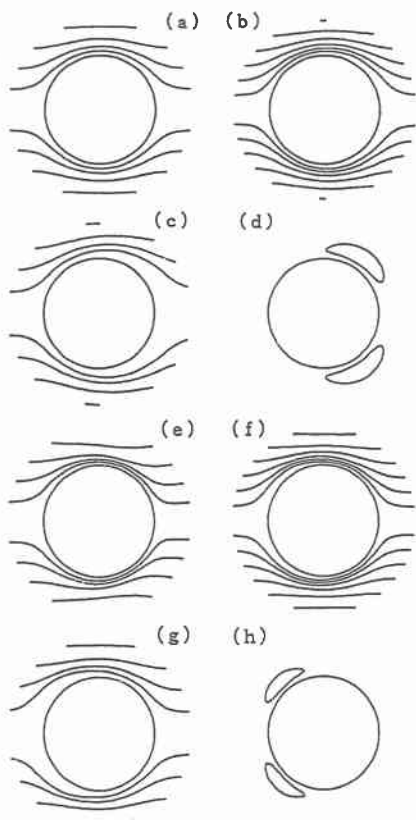
図—2 渦度の Contours

(円柱) $A=0.25$ $\nu=0.0015$
 $K.C.=0.785$ $Re=333$



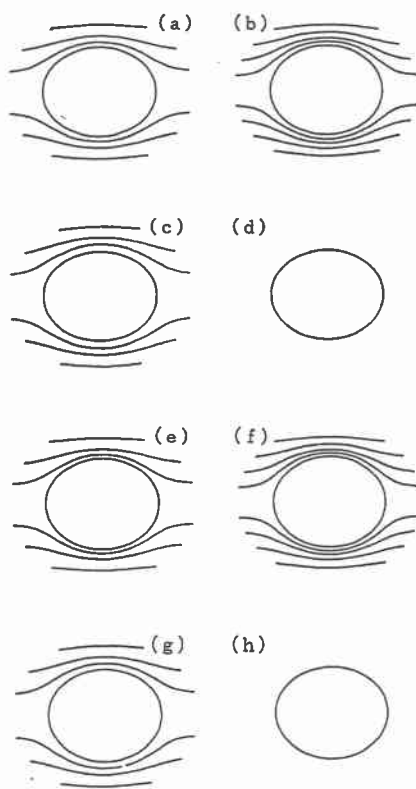
図—4 渦度の Contours

(楕円柱横置き) $A=0.25$ $\nu=0.0015$
 $K.C.=0.785$ $Re=333$



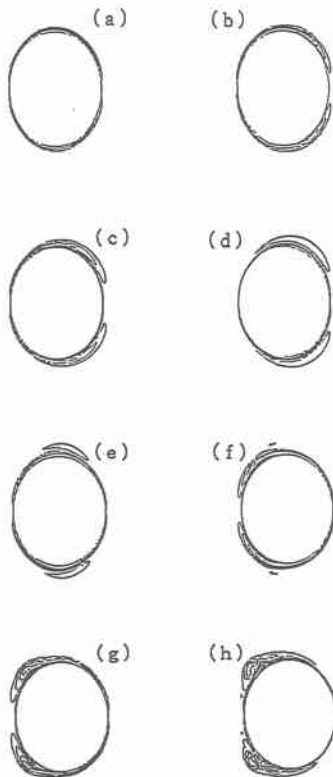
図—3 流れ関数の Contours

(円柱) $A=0.25$ $\nu=0.0015$
 $K.C.=0.785$ $Re=333$

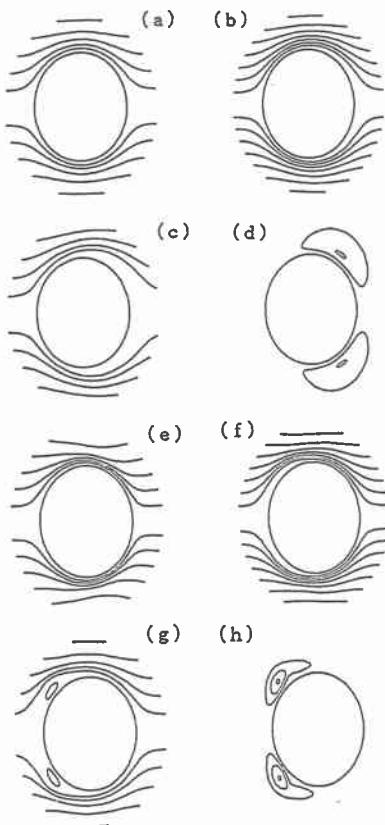


図—5 流れ関数の Contours

(楕円柱横置き) $A=0.25$ $\nu=0.0015$
 $K.C.=0.785$ $Re=333$



図一6 渦度の Contours
(楕円柱縦置き) $A=0.25$ $\nu=0.0015$
 $K.C.=0.785$ $Re=333$



図一7 流れ関数の Contours
(楕円柱縦置き) $A=0.25$ $\nu=0.0015$
 $K.C.=0.785$ $Re=333$

これは、円柱の場合と楕円柱の場合の相違を見るために掲載したものである。図-2 中の 8 個の図は、時間 $t=0$ (静止状態) より計算をはじめて (a) $t=2\pi \times 1/8$ (加速時), (b) $t=2\pi \times 2/8$ (最大流速時), (c) $t=2\pi \times 3/8$ (減速時), (d) $t=2\pi \times 4/8$ (停止時) の状態を示し、また、(e), (f), (g), (h) は流速方向が反対向きの場合の (a) ~ (d) に相当した場合である。

図-2 より、円柱の場合の渦の発生状況は、ほぼ妥当に再現されていると思われる。また、渦どの Contours 図に対応して、図-3 の流れ関数の Contours (流線図) も現れていることが分かる。

図-4 は、楕円柱の長軸を水平にして置いた場合の渦度の Contours 図であり、計算条件は円柱の場合と同じ値を用いている。この場合は、楕円柱の形状が流れに対して slender な形を与えているため、円柱の場合より剥離渦の発生は小さく、楕円柱の表面上側と下側に、ほぼ対称的に貼り付いて発生している。

図-5 の流れ関数の Contours 図も渦度の発生に沿った形状で現れている。図中の (d), (h) の流速が停止している位相で Contour line が描かれていないのは、流速が小さいことと、渦の発生が小さいことによると考えられる。最後に、図-6 の楕円柱を立てた場合は、楕円の頂部あるいは、底部からの剥離渦の発生が強く見られ、これは、円柱より場合に比しても大きく、ほぼ妥当な結果となっていると言える。

図-7 の流れ関数の Contours も、他の図と同様に渦度に対応した流れの状況を表わしていると言える。

4. まとめ

- 1) 楕円柱まわりの剥離を伴った流れの状況を数値解析は良く再現していると言える。
- 2) 楕円柱を横置きにした場合、楕円柱の両端部からの渦の発生はあまりなく、円柱の場合より渦の発生は小さいことが分かった。
- 3) 楕円柱を縦置きにした場合は、当然ではあるが、頂部からの渦の発生が大きく現れる。
- 4) 今後は、計算条件および計算時間をかえて、さらに楕円柱まわりの様々な状況を把握することが必要である。

参考文献

- 1) 佐藤 幸雄、渡部 靖憲；
水平振動流中の円柱の表面に剥離を伴う場合の流体力について、海岸工学論文集、第 43 巻
pp.911~915 (1996)
- 2) 佐藤 幸雄、濱中 建一郎；
波動場中の円柱近傍の流れ構造に関する数値解析、
海洋開発論文集、Vol.15、pp.397~402 (1999)