

近接モデルを使った新しい粒子法の試み

new particle method using contact model

北海道大学工学部
北海道電力株式会社
北海道大学大学院
北海道大学大学院

○学 生 員 市 川 忠 志 (Tadashi Ichikawa)
正 員 平 井 祐 次 郎 (Yujiro Hirai)
正 員 森 明 巨 (Akio Mori)
フェロー会員 板 倉 忠 興 (Tadaoki Itakura)

1. はじめに

数値解析には、構造格子や非構造格子を有する差分法や有限要素法などのEuler型と、計算点を追跡するLagrange型がある。Euler型では跳水のように水面が急変する場合には計算格子の変更が必要なることから数値解析が難しいが、Lagrange型ではこの計算格子の変更がなく有利である。Lagrange型には越塚のMPS法¹⁾があるが、連続条件を満たすために圧力に関するPoisson方程式を陰的に解いている。今回、連続式が不要で、陽的に解くことのできるLagrange型の新しい計算手法として、Navier-Stokes式によらず、斥力を用いたモデルを試みた。本研究は、本モデルに用いるパラメータや計算領域に関する性質を調べたものである。

2. モデルの概要

近接した粒子(二次元の場合、4~6個)からのみ斥力を受ける近接モデルの基本式を式(1)に示す。

$$m_i \frac{du_i}{dt} + \sum_{j \neq i} A_{ij} \mu_{ij} \nabla u_{ij} + \sum_{j \neq i} \sigma_{ij} G(\Delta r_{ij}) = f(t, x) \quad (1)$$

ここに、 m_i は*i*番目の粒子の質量、 u_i は*i*番目の粒子の速度ベクトル、 A_{ij} は*i*番目と*j*番目の粒子に関する投影面積、 μ_{ij} は*i*番目の粒子と*j*番目の粒子に作用する粘性の係数、 σ_{ij} は*i*番目の粒子と*j*番目の粒子との間に働く粒子間力と粒子間距離とに関する係数である。左辺第1項は加速度項、第2項は粘性項、第3項は粒子間力の項、右辺は外力項である。本モデルでは、流体の連続条件はこの粒子の配列を粒子間力で陽的に調節することにより満足させる。式(1)を書き換えると次式になる。

$$\frac{du_i}{dt} + \sum_{j \neq i} \alpha \nabla u_{ij} + \sum_{j \neq i} \beta G(\Delta r_{ij}) = F(t, x) \quad (2)$$

ここに、 $\alpha = A_{ij} \mu_{ij} / m_i$ 、 $\beta = \sigma_{ij} / m_i$ であり、斥力は粒子間距離に一次比例すると考えて、 $G(\Delta r_{ij}) = -(\Delta r_{ij})$ と仮定する。なお、式(2)は振動方程式と同じである。

3. モデルの特性

式(2)の構造を見るために、骨格のみ取り出して式(3)のようにおく。これは、図-1のように固定した粒子Aの上に置いた粒子Bの運動を表す。

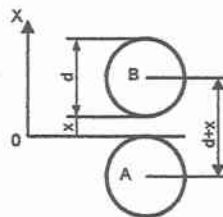


図-1 2つの粒子位置の関係

$$\rho d^n \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu_A d^{n-1} \frac{1}{d+x} \frac{dx}{dt} + \rho d^n \beta x = -\rho d^n g \quad (3)$$

ここに、 n は空間次元数で2または3、外力は重力である。式(3)を式(4)に書き直す。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{v_A}{d} \frac{1}{d+x} \frac{dx}{dt} + \beta x = -g \quad (4)$$

ここに、 $\mu_A = \rho v_A$ である。

式(4)を無次元化するために、次式を用いる。

$$\begin{cases} x = L \tilde{x} \\ u = U \tilde{u} \\ t = \frac{L}{U} \tilde{t} \end{cases} \quad (5)$$

ここに、 L 、 U は長さや流速の基準量、 $\tilde{\cdot}$ 付きの変数は無次元量を表す。式(5)を式(4)に代入すると、

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \frac{v_A}{U d \tilde{L}} \frac{1}{1+\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} + \beta \frac{L^2}{U^2} \tilde{x} = \frac{L}{U^2} g \quad (6)$$

本モデルは重力場における粒子の動きを解析するので、 L 、 U を d 、 g で表し、 $L=d$ 、 $U=\sqrt{gd}$ とする。式(6)は次式となる。

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \frac{v_A}{\sqrt{gd}} \frac{1}{1+\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} + \beta \frac{d}{g} \tilde{x} = -1 \quad (7)$$

(1) 斥力のパラメータ $\beta d/g$

定常の場合を考えると式(7)の左辺第1項および第2項はゼロとなることから

$$\frac{\beta d}{g} \tilde{x} = -1 \quad (8)$$

この時の $\tilde{x} = \tilde{x}_c = -g/\beta d$ は、図-1において粒子Bに働く重力と粒子A、Bに働く斥力が釣り合う無次元化距離を表し、 $\tilde{x}_c \ll 1$ となることから、 $\beta d/g \gg 1$ となる。本研究では $\beta d/g=100$ とした。

(2) 非弾性衝突による人工粘性

2つの粒子が接近したときに生じる斥力のみを考え $B_* = g/\beta d$ とおくと、式(7)は次式となる。

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \frac{\tilde{x}}{B_*} = 0 \quad (9)$$

接近する相対速度を $\tilde{u}_0$ とすると、塑性解析上 $\Delta\tilde{t}$ 時間後には粒子間距離が $\tilde{u}_0\Delta\tilde{t}$ 近づくことになる。このとき2つの粒子間に作用する斥力は $\rho d^n \tilde{u}_0 \Delta\tilde{t} / B_*$ となり、この接近により2つの粒子は相対静止したとすると、 $\Delta\tilde{t}$ 時間後の斥力によって生じる速度 $\tilde{u}_2$ は次式となる。

$$\tilde{u}_2 = \frac{\tilde{u}_0 \Delta\tilde{t}}{B_*} \Delta\tilde{t} \quad (10)$$

斥力を受けた後の速度は受ける前の速度より速くなることはないから($\tilde{u}_2 < \tilde{u}_0$)、これを満足する計算時間ステップは次式となる。

$$\Delta t < \sqrt{B_* \frac{d}{g}} \quad (11)$$

今回計算で使用する値($B_*=1/100$, $d=0.01\text{m}$, $g=9.8\text{m/sec}^2$)を代入すると、

$$\Delta t < \sqrt{\frac{1}{100} \times \frac{0.01}{9.8}} = 3.2 \times 10^{-3} (\text{sec}) \quad (12)$$

となる。この Δt は非常に小さく、相当の計算時間を要する。

このような挙動は、弾性体同士の衝突による反撥に相当する。陰的スキームを用いればこのような物理的に不合理な動作は避けられる。しかし本研究では取り扱いの容易な陽的スキームの開発を目指すので、以下のような処理を行うことにした。

水粒子が衝突すると圧力に対応した斥力が働くが、粒子間速度差を解消するように働く。この作用の検証は未だ行っていないが、本研究では次のような処理を行うことにした。

- ① 1ステップ計算後、粒子間距離が d 以下となる粒子のペアは、重ね合わさった距離を $1/2$ にする。
- ② この粒子のペアにおける接近方向の速度差をゼロにする。

4. 人工動粘性係数の違いによるモデルの性質

斥力による粒子の振動を式(7)左辺第2項の人工粘性項を用いて調整する。二次元開水路流において人工動粘性係数を与えて計算を実行し、人工動粘性係数の大きさと粒子配置ならびに水深方向の流速分布との関係を調べた。

(a) 計算に用いた水理量

計算に用いた水理量は、水路勾配 $i=1/30$ 、粒子径 $d=0.01\text{m}$ 、初期粒子配置は図-2に示すように格子状で間隔を $|r_j - r_i|_{\text{min}} = d$ とおき、流下方向の粒子数を $n_x=20$ 個、水深方向の粒子数を $n_y=10$ 個とした。Reynolds数は表-1に示す4ケースとし、人工動粘性係数 ν_A との関係は式(7)左辺第2項から次式である。

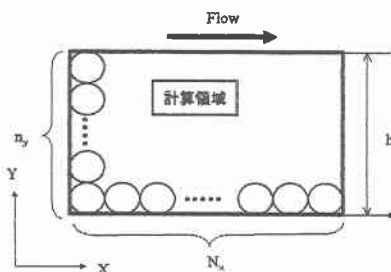


図-2 計算領域の概要

表-1 計算で与えた Reynolds 数および人工動粘性

	Reynolds数 Re	人工動粘性係数 ν_A ($\times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$)
①	3.13	1,000
②	6.26	500
③	12.52	250
④	31.3	100

$$R_e = \frac{\sqrt{gd^3}}{\nu_A} \quad (13)$$

(b) 計算方法

・初期設定

流下方向の初期流速 u_0 は、粘性係数を一定とした時の平均流速式(14)を水深方向に一定に与えた。

$$u_0 = \frac{g h_0^2 \sin \theta}{3 \nu_A} = \frac{g (n_y d_0)^2 i}{3 \nu_A} \quad (14)$$

ここに、 h_0 は初期の水深である。

・計算時間ステップ

計算時間ステップ Δt は、次式で与えた。

$$\Delta t = \min(\Delta t_0, \alpha_{dt} d_0 / u_{\max}) \quad (15)$$

ここに、 Δt_0 は初期計算時間ステップ、 α_{dt} は時間ステップと Courant 数の比で、本計算では $\alpha_{dt}=0.1$ を与えた。 $u_{\max}$ は各計算時間ステップにおける粒子の最大速度である。

・底面の境界条件

図-3のA、Bのように、底面近傍を流下する水粒子に対して底面粒子を配置する。底面粒子の速度はゼロとする。これはnon slip条件である。

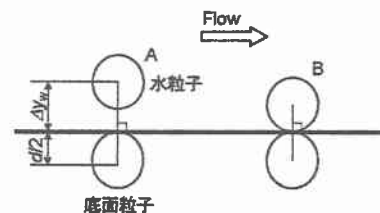


図-3 底面の境界条件模式図

・上流端および下流端の境界条件

下流端から流出した粒子を上流端にその粒子を置く周期境界条件を用いる。例えば、粒子 A_0 を A_1 に置いて、粒子 A_1 の速度は粒子 A_0 のものを与える。

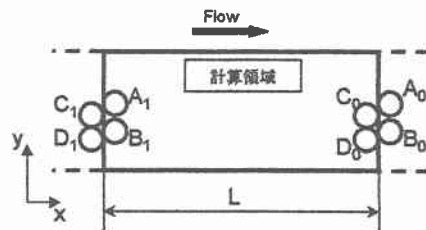


図-4 周期境界条件

(c)計算結果

各 Reynolds 数 Re における流下方向の流速分布を図-5 に、繰り返し計算後の粒子配列を図-6 に示す。図-5 中の細線は粘性係数を一定値にした理論解であり、太線は乱流粘性を考慮した滑面の対数則分布である。式(16)、式(17)にそれぞれ示す。

$$u = \frac{g \sin \theta}{v_A} h y \frac{y^2}{2} \quad (16)$$

$$u = u_* \left[5.5 + \frac{1}{0.4} \ln \frac{u_* y}{v} \right] \quad (17)$$

ここに、 $\sin \theta = i$ 、 h は計算後の水深、 y は底面からの水深方向距離、 u_* は摩擦速度 $u_* = \sqrt{ghi}$ である。

Reynolds 数が小さいと、人工粘性の影響が強くなる。 $Re \leq 6.26$ では水深方向の流速分布は一定で平均流速に対して流速変動が大きくなり、粒子は規則的配列で一団となって流下する。

反対に Reynolds 数が大きいと、粒子間の人工粘性の影響が弱くなる。 $Re = 31.3$ では水面粒子は上方に飛ばされる。

これらの中間の $Re = 12.52$ のときの水面粒子は若干上方に飛ばされているが、計算された流速分布は、境界層流れの特徴を表すものとなった。以後の計算では Reynolds 数を $Re = 12.52$ とする。

5. 計算領域の違いによるモデルの性質

図-2 に示す計算領域の n_x 、 n_y を変化させて、繰り返し計算後の粒子配列ならびに流速分布を調べた。図-7 に水深方向の流速分布を、図-8 に粒子配列を示す。

流速分布を見ると、流下方向の粒子数 n_x による違いは認められないが、水深方向の粒子数 n_y の違いにより次のことが言える。 n_y が少ないと水面粒子が初期位置よりも低くなり、流速分布は水深方向にほぼ一様となる。反対に n_y が多いと水面粒子が初期位置よりも上方へ飛び上がり、流速は対数分布よりも大きくなる傾向にある。水深方向の粒子数 n_y の違いにより粒子配列および流速分布が異なるのは、式(2)で示したように本モデルが振動方程式と同じであり、共振などの非線形効果が働いたものと考えられる。

6. まとめ

本論文をまとめると以下のとおりである。

- ①急変する水面の数値解析に有利である Lagrange 型の計算手法として、連続式が不要であり、隣接する粒子間の距離に比例した斥力を用いる新しいモデルを考えた。
- ②本モデルのパラメータである α 、 β の考え方を、基本式を無次元化することにより明らかにした。
- ③Reynolds 数ならびに水深方向の粒子数によって、計算された粒子配列および水深方向の流速分布が異なることを得た。

参考文献

- 1)越塚誠一：数値流体力学，インテリジェントエンジニアリングシリーズ，培風館，p223，1997

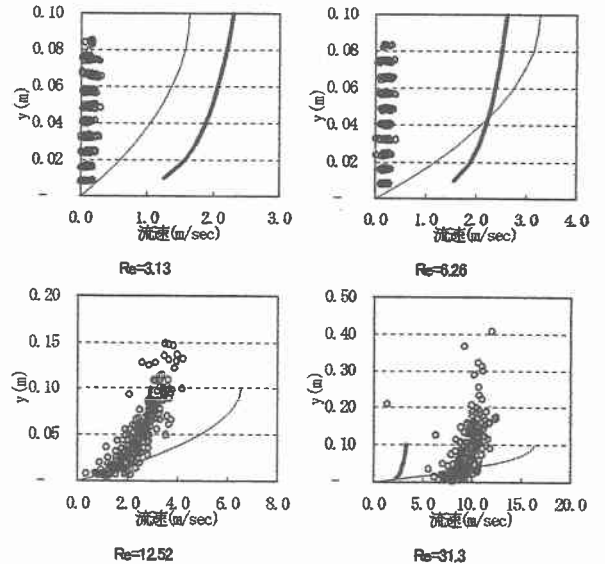


図-5 Reynolds 数と流速分布の関係

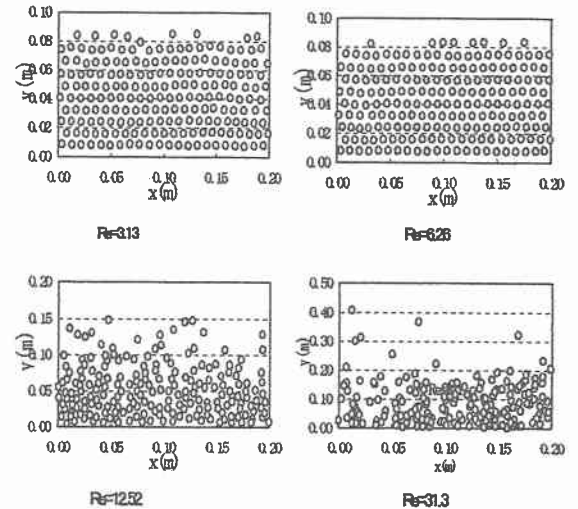


図-6 Reynolds 数と粒子配列の関係

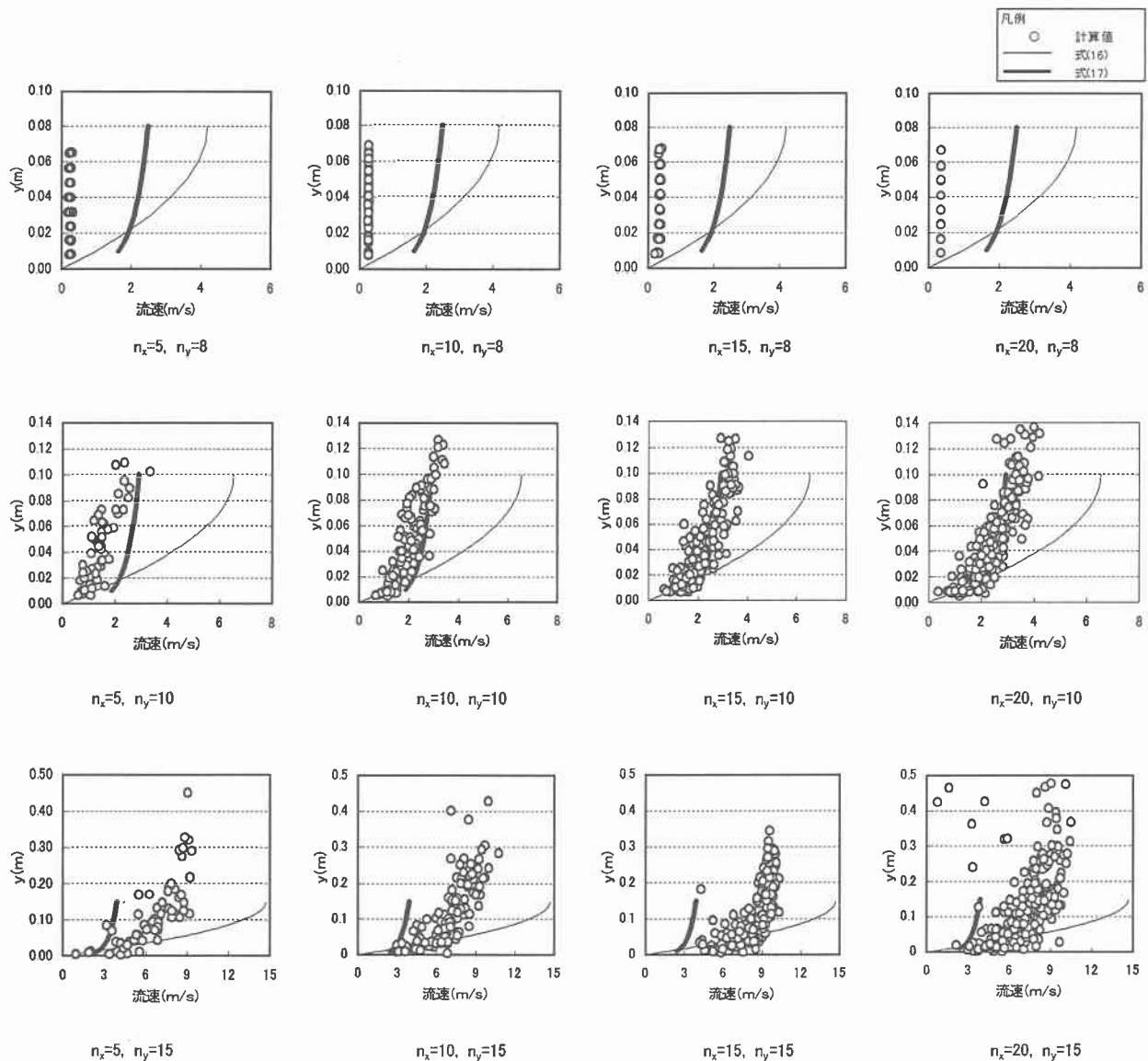


図-7 初期粒子配置と流速分布の関係

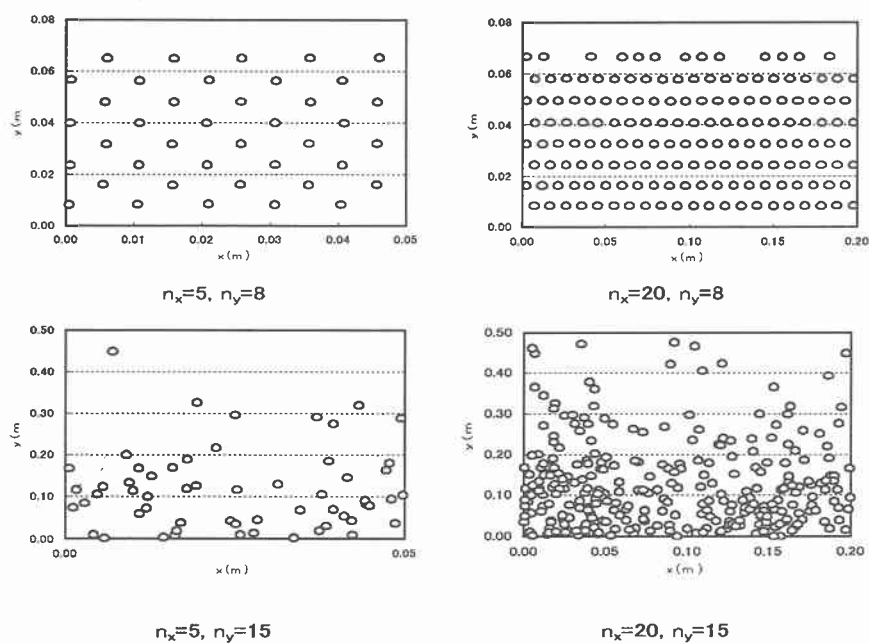


図-8 n_y の違いによる粒子の分布