

河川水温 1 次元解析の非線形解と線形解

Non-linear and linear solutions of one-dimensional analyses on river water temperature

北見工業大学大学院 ○学生員 杉山一郎 (Ichiro Sugiyama)
 北見工業大学工学部 フェロー 佐渡公明 (Kimiteru Sado)
 北見工業大学工学部 正員 中尾隆志 (Takashi Nakao)

1. まえがき

植物プランクトンの増殖は水温の影響を受け、また魚の生育環境は選好温度や耐容温度から分かるように水温に大きく影響される。純放射量、顕熱・潜熱フラックスから成る水面熱収支量は、水面逆長波放射量、水面の飽和水蒸気圧および接水気層が不安定なときの顕熱・潜熱伝達率のために水温に関し非線形である。したがって、河川水温に関する微分方程式(1次元熱収支方程式)は非線形となる。しかし、水温に関する非線形微分方程式の解の挙動を扱った研究は見当たらない。

本論文では、最初に著者らが提案した、一般化した1次元熱収支方程式を閾値のある Bernoulli の微分方程式に変形することにより、解の挙動—平衡温度への収束、一定値、発散—を示し、ある水理・気象条件下における水温の解軌道の傾向を明らかにする。次に、水面上とある一定の高さの湿潤空気の仮温度差により、接水気層の安定状態を判別する。最後に、仮温度差と風速の変化による水温非線形解と線形解の差を比較する。

2. 河川水温の1次元解析

2.1 線形解析

著者は、文献1)において、横断面内の水温分布を一定とする解析を行うために、次の1次元熱収支方程式を提案している。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (AD_t \frac{\partial \theta}{\partial x}) + \frac{H_T(\theta)}{c_w \rho_w h} \quad (1)$$

$$H_T(\theta) = H_S(\theta) + H_b(\theta) + c_w \rho_w r(\theta_r - \theta) + \overline{C_k} \mu_k h + \frac{c_w \rho_w q_{tr}}{B} (\theta_{tr} - \theta) + \frac{\rho_w g}{J} i_f q \quad (2)$$

$$H_S(\theta) = (1 - \alpha)I + \varepsilon(0.51 + 0.066\sqrt{e_a})\sigma T_a^4 - \varepsilon\sigma T_w^4 + \alpha_H(\theta)(\theta_a - \theta) + \alpha_E(\theta)\{e_a - e_S(\theta)\} \quad (3)$$

$$\alpha_E(\theta) = \frac{\rho_w L}{24 \times 3600} \{0.112 V + 0.094(\Delta\theta_v)^{1/3}\} \quad (4)$$

$$\alpha_H(\theta) = \frac{c_a p}{622 L} \alpha_E(\theta) \quad (5)$$

ここで、 θ : 水温、 T_w : 水温の絶対温度、 U : 断面平均流速、 A : 横断面積、 h : 断面平均水深、 B : 水面幅、 D_t : 乱流拡散係数、 c_w : 水の比熱、 ρ_w : 水の密度、 H_T : 全熱収支量、 H_S : 水面熱収支量、 H_b : 河床伝熱量、 i_f : 摩擦勾配、 q : 単位幅当りの流量、 J : 熱の仕事当量、 q_b : 本川単位長さ当りの横流入量、 θ_r : 横流入水の温度、 r :

雨量、 θ_r : 雨水の温度、 $\overline{C_k}$: 水中にある物質 k の断面平均濃度、 μ_k : 水中物質 k による単位質量・単位時間当りの(生)化学的反応熱量、 α : アルベド、 I : 全日射量、 ε : 射出率、 σ : ステファン・ボルツマン定数、 α_H : 顕熱伝達率、 α_E : 潜熱伝達率、 θ_a : 気温、 T_a : 気温の絶対温度、 e_a : 空気の水蒸気圧、 e_s : 水面上の空気の飽和水蒸気圧、 L : 蒸発の潜熱、 V : ある一定の高さの相対風速、 $\Delta\theta_v$: 水面上とある一定の高さの湿潤空気の仮温度差、 c_a : 空気の定圧比熱、 p : 気圧である。

全熱収支量 H_T は水面熱収支量 H_S のために水温 θ の非線形関数である。式(2)の $H_T(\theta)$ を θ に近い基準温度 θ_B を用いて Taylor 級数に展開し、 θ の1次の項までとると次式のようにになる。

$$H_T(\theta) = K(\theta_B)\{\theta^*(\theta_B) - \theta\} \quad (6)$$

$$K(\theta_B) = K_S(\theta_B) + 2\sqrt{\frac{c_g \rho_g \lambda_g}{\pi \Delta t}} + \frac{c_w \rho_w q_{tr}}{B} + c_w \rho_w r \quad (7)$$

$$\theta^*(\theta_B) = \theta_B + \frac{H_T(\theta_B)}{K(\theta_B)} \quad (8)$$

ここで、 $K(\theta_B)$ と $\theta^*(\theta_B)$ はそれぞれ水体に作用する全熱収支量を考慮したときの熱交換係数と平衡温度で、 K_S は水面熱収支量に対する熱交換係数である。また、 c_g 、 ρ_g 、 λ_g はそれぞれ河床地盤の比熱、密度、熱伝導率である。なお、水面熱収支のみを考慮すると、熱交換係数 $K_S(\theta_B)$ および平衡温度 $\theta_S^*(\theta_B)$ は次式となる。

$$K_S(\theta_B) = 4\varepsilon\sigma T_w^3 + \alpha_H(\theta_B) - \alpha'_H(\theta_B)(\theta_a - \theta_B) + \alpha_E(\theta_B)e'_S(\theta_B) - \alpha'_E(\theta_B)\{e_a - e_S(\theta_B)\} \quad (9)$$

$$\theta_S^*(\theta_B) = \theta_B + \frac{H_S(\theta_B)}{K_S(\theta_B)} \quad (10)$$

次に、式(6)を式(1)に代入し、乱流拡散項を無視すると押し出し流れとなり、水温計算式は式(11)となる。

$$\frac{dx}{dt} = U \quad \text{上で} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{K(\theta^* - \theta)}{c_w \rho_w h} \quad (11)$$

この式は、水温の時間的な変化が平衡温度と水温の差に比例していることを表している。なお乱流拡散の影響については、次の式(12)が成立すれば乱流拡散項を無視できることが著者の文献2)で明らかにされている。

$$\frac{U^2}{4D_t} \gg \frac{K}{c_w \rho_w h} \quad (12)$$

式(11)を水塊の出発点 $x=x_0$ 、 $t=t_0$ で $\theta=\theta_0$ の初期条件

のもとに解き、 U, h, K, θ^* を一定とすると水温線形解は次のように表される。

$$x = x_0 + U(t - t_0) \quad (13)$$

$$\theta = \theta^* + (\theta_0 - \theta^*) \exp\left\{-\frac{K}{c_w \rho_w h}(t - t_0)\right\} \quad (14)$$

$$= \theta^* + (\theta_0 - \theta^*) \exp\left\{-\frac{K}{c_w \rho_w q}(x - x_0)\right\} \quad (15)$$

2.2 非線形解析

式(3)の $H_S(\theta)$ を $\theta = \theta_B$ を用いて Taylor 級数に展開し、 θ の2次の項までとり、 θ^2 、 θ および定数項でまとめると

$$H_S(\theta) \doteq \frac{H_S''(\theta_B)}{2} \theta^2 + \{H_S'(\theta_B) - H_S''(\theta_B) \times \theta_B\} \theta + H_S(\theta_B) - H_S'(\theta_B) \times \theta_B + \frac{H_S''(\theta_B)}{2} \times \theta_B^2 \quad (16)$$

となる。 θ の2次、1次の係数、および定数項をそれぞれ a, b, c とおき、 H_T として H_S のみを考えると、次のRiccatiの微分方程式を得る。

$$\frac{dx}{dt} = U \quad \text{上で} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{a\theta^2 + b\theta + c}{c_w \rho_w h} \quad (17)$$

式(17)の特殊解を $\psi, z(t)$ を未知関数として、 $\theta = z + \psi$ とおくと、式(17)は次の閾値のあるBernoulliの微分方程式となる。

$$\frac{dz}{dt} \mp \frac{\sqrt{D}}{c_w \rho_w h} z = \frac{a}{c_w \rho_w h} z^2 \quad (D \equiv b^2 - 4ac) \quad (18)$$

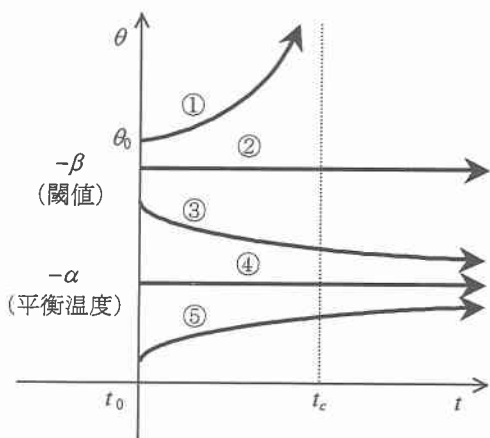


図-1 $a > 0$ の場合の水温の挙動

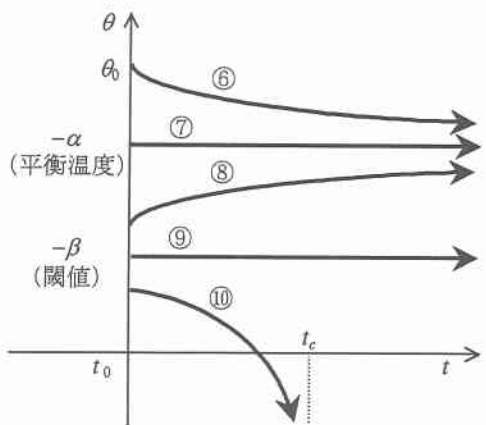


図-2 $a < 0$ の場合の水温の挙動

上式を解いて、水温非線形解 θ は次式で求められる。

$$\alpha \equiv \frac{b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \beta \equiv \frac{b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{において}$$

$$\theta = \frac{-\alpha(\theta_0 + \beta) + \beta(\theta_0 + \alpha) \exp\left\{-\frac{\sqrt{D}(t - t_0)}{c_w \rho_w h}\right\}}{(\theta_0 + \beta) - (\theta_0 + \alpha) \exp\left\{-\frac{\sqrt{D}(t - t_0)}{c_w \rho_w h}\right\}} \quad (19)$$

以上から、水温の解軌道は式(17)の係数 a を場合分けして分類される。それらの解の挙動を図-1, 2に示す。なお、図-1において①の場合、

$$t = t_c = t_0 + \frac{c_w \rho_w h}{\sqrt{D}} \log \left\{ \frac{a}{a - \sqrt{D}/(\theta_0 + \alpha)} \right\} \quad (20)$$

で解は発散する。同様に図-2において⑩の場合、

$$t = t_c = t_0 + \frac{c_w \rho_w h}{\sqrt{D}} \log \left\{ \frac{a - \sqrt{D}/(\theta_0 + \alpha)}{a} \right\} \quad (21)$$

で解は発散する。図-1, 2より解の挙動を整理すると次のように分類される。

(i) $a > 0$ の場合 ($-\beta > -\alpha$)

- | | | | |
|-------------------------------|-------|---|-------------------|
| $\theta_0 > -\beta$ | | ① | 発散 |
| $\theta_0 = -\beta$ | | ② | 一定値 |
| $-\alpha < \theta_0 < -\beta$ | | ③ | 平衡温度に収束
(単調減少) |
| $\theta_0 = -\alpha$ | | ④ | 一定値 |
| $\theta_0 < -\alpha$ | | ⑤ | 平衡温度に収束
(単調増加) |

(ii) $a < 0$ の場合 ($-\alpha > -\beta$)

- | | | | |
|-------------------------------|-------|---|-------------------|
| $\theta_0 > -\alpha$ | | ⑥ | 平衡温度に収束
(単調減少) |
| $\theta_0 = -\alpha$ | | ⑦ | 一定値 |
| $-\beta < \theta_0 < -\alpha$ | | ⑧ | 平衡温度に収束
(単調増加) |
| $\theta_0 = -\beta$ | | ⑨ | 一定値 |
| $\theta_0 < -\beta$ | | ⑩ | 発散 |

(iii) $a = 0$ の場合、2.1節の線形解となる。

2.3 変数分離法

変数分離法により式(17)を、初期条件 $t = t_0$ で $\theta = \theta_0$ のもとに解くと、

$$\int_{t_0}^t \frac{dt}{c_w \rho_w h} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{a\theta^2 + b\theta + c} \quad (22)$$

となり、水温 θ は次のように求まる。

(i) $D > 0$ の場合

解は式(19)に一致する。

(ii) $D = 0$ の場合

$$\theta = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{\frac{2a}{2a\theta_0 + b} - a \frac{(t - t_0)}{c_w \rho_w h}} \quad (23)$$

このときの平衡温度は、 $\theta^* = -b/(2a)$ である。さらに、 $a = \beta$ となるので、解の挙動は $a > 0$ のとき、図-1の①、②、⑤となり、 $a < 0$ のとき、図-2の⑥、⑦、⑩となる。また、①と⑩のとき、次式で解は発散する。

$$t_c = t_0 + \frac{2c_w \rho_w h}{2a\theta_0 + b} \quad (24)$$

(iii) $D < 0$ の場合

$\gamma = \sqrt{4ac - b^2}$ とおくと

$$\theta = \frac{\theta_0 + \left\{ \frac{\gamma}{2a} + \frac{b}{\gamma} \left(\theta_0 + \frac{b}{2a} \right) \right\} \tan \left\{ \frac{\gamma(t-t_0)}{2c_w \rho_w h} \right\}}{1 - \frac{(2a\theta_0 + b)}{\gamma} \tan \left\{ \frac{\gamma(t-t_0)}{2c_w \rho_w h} \right\}} \quad (25)$$

このときの平衡温度は虚根となり、求めることはできない。

変数分離法のみでは、解の発散を判別することは不可能である。以上より、水温非線形解析においては、 D の

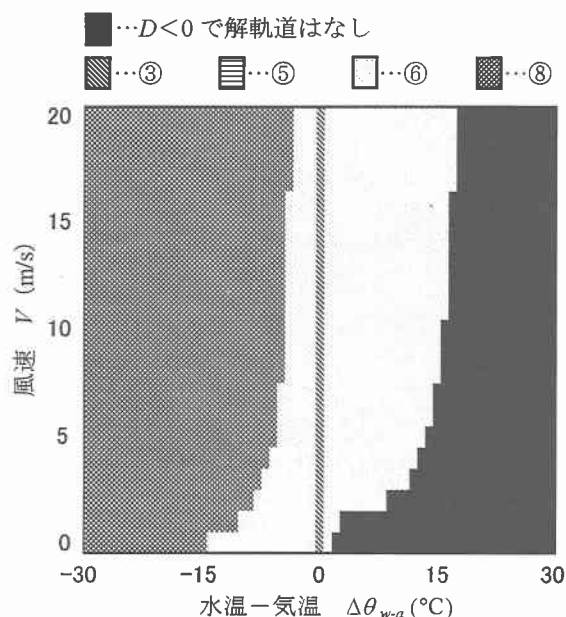


図-3 解軌道の領域区分図 ($\theta_0 = 10^\circ\text{C}$, $\theta_a = -20 \sim 40^\circ\text{C}$, $I = 0 \text{ W/m}^2$, $Rh = 70\%$, $p = 1000 \text{ hPa}$)

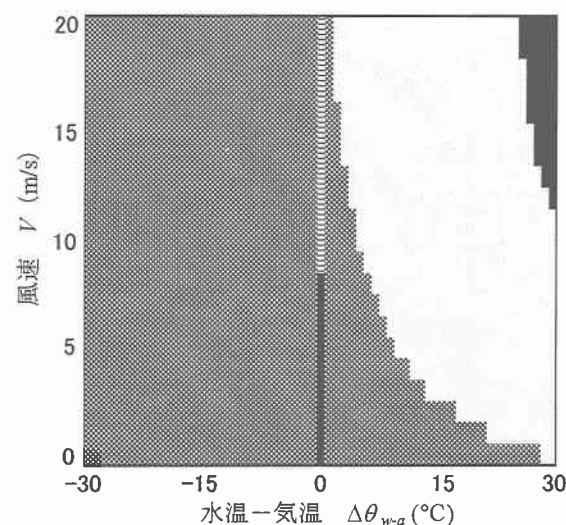


図-4 解軌道の領域区分図 ($\theta_0 = 10^\circ\text{C}$, $\theta_a = -20 \sim 40^\circ\text{C}$, $I = 500 \text{ W/m}^2$, $Rh = 70\%$, $p = 1000 \text{ hPa}$)

正, 0, 負に対応して解をそれぞれ式(19), (23), (25)から求めればよい。

2.4 解軌道の領域区分

2.2節で述べた Bernoulli の微分方程式の解軌道の領域区分を調べるため、初期水温 $\theta_0 = 10^\circ\text{C}$ 、気温 $\theta_a = -20 \sim 40^\circ\text{C}$ 、湿度 $Rh = 70\%$ 、気圧 $p = 1000 \text{ hPa}$ 、日射量 $I = 0, 500 \text{ W/m}^2$ の気象条件で水温計算を行った。このときの解軌道を図-3, 4に示す。縦軸を風速 V 、横軸を水温と気温の差 $\Delta\theta_{w-a}$ で表している。すなわち、 $\Delta\theta_{w-a}$ が正, 0, 負のとき、接水気層の成層状態はそれぞれ、不安定, 中立, 安定を意味している。しかし、これらの判定を厳密に行うには、3.1節で述べる仮温度差を用いなければならない。また、式(17)の判別式 D が負のとき、図-1, 2に該当する解軌道ない。

これらの図より、 I が増加すると、図-2で示された平衡温度へ単調増加していく解軌道⑧が増加していることが分かる。これは、 I が増加すれば、水面熱収支量 H_s は増加するので、式(10)から平衡温度は増加し θ_0 より大きくなる。よって、平衡温度へ単調減少する解軌道⑥から、⑧へ変化したものと考察できる。また、 $\Delta\theta_{w-a}$ が 0°C のとき、式(17)の係数 a が正になり、③と⑤がそれぞれ現れている。接水気層が安定ならば、⑧が大部分を占めているが、中立・不安定ならば、解軌道は I , V , $\Delta\theta_{w-a}$ の値に大きく影響を受けていることが分かる。

3. 非線形解と線形解

3.1 仮温度差による接水気層の安定状態の判別

本研究では、水面上の飽和空気仮温度とある一定の高さの湿潤空気仮温度の差 $\Delta\theta_v$ を用いる。 $\Delta\theta_v$ は式(26)によって表される。

$$\Delta\theta_v = \frac{T_w}{1 - 0.378e_s/p} - \frac{T_a}{1 - 0.378e_a/p} \quad (26)$$

$\Delta\theta_v$ の負, 0, 正は接水気層の成層状態がそれぞれ、安定, 中立, 不安定であることを示す。式(26)において、湿度 Rh が $0 \sim 100\%$ まで変化したときの $\Delta\theta_v = 0$ 満足する水温

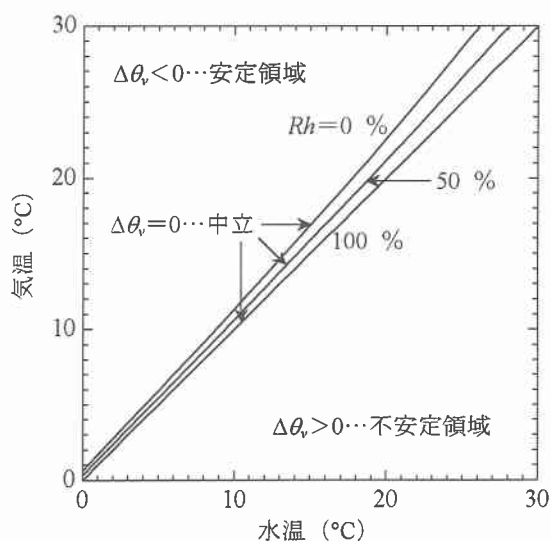


図-5 仮温度差による接水気層の安定度判定図 ($p = 1000 \text{ hPa}$)

と気温の関係を、Newton-Raphson 法を用いて数値解析した結果を図-5 に示す。

図-5 より、 $Rh=100\%$ で水温と気温が等しいとき、接水気層は中立であることが分かる。また、 Rh が減少するにつれ、水温より気温が若干高めのときに中立であることが分かる。その理由は、水面上ある高さの湿度が減少すると仮温度は減少するので、水面上の仮温度と同じ値になるには、気温は水温より高くなければならないからである。

3.2 非線形解と線形解の比較

水温非線形解と線形解の差を比較するため、2.4 節の気象条件と同様に、 $\theta_0=10^\circ\text{C}$ 、 $\theta_a=-20\sim 40^\circ\text{C}$ 、 $Rh=70\%$ 、 $p=1000\text{hPa}$ 、 $I=0$ 、 500W/m^2 と変化させ、水理条件は $(x-x_0)/q=50\text{km}/(\text{m}^2/\text{s})$ として数値計算を行った。図-6、7 は、非線形解と線形解の差 $\Delta\theta_{\text{NL-L}}$ と $\Delta\theta_v$ 、および風速 V の関

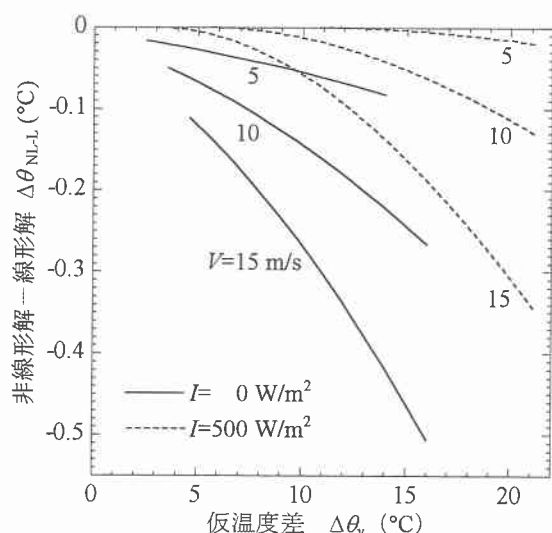


図-6 仮温度差と風速が及ぼす非線形解と線形解の差 (接水気層：不安定、解軌道⑥、 $(x-x_0)/q=50\text{km}/(\text{m}^2/\text{s})$ 、 $\theta_0=10^\circ\text{C}$ 、 $\theta_a=-20\sim 40^\circ\text{C}$ 、 $Rh=70\%$ 、 $p=1000\text{hPa}$)

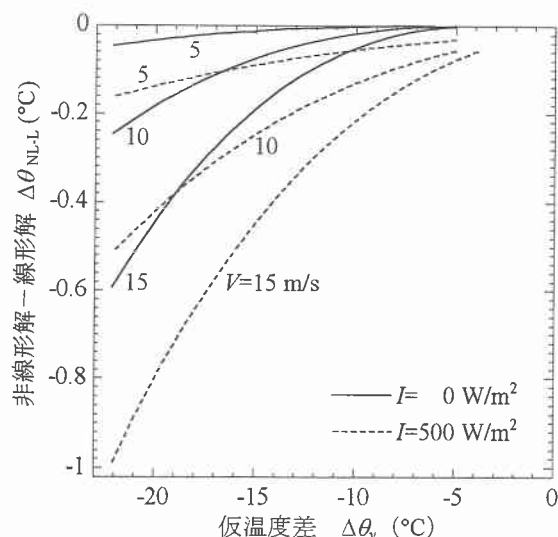


図-7 仮温度差と風速が及ぼす非線形解と線形解の差 (接水気層：安定、解軌道⑧、 $(x-x_0)/q=50\text{km}/(\text{m}^2/\text{s})$ 、 $\theta_0=10^\circ\text{C}$ 、 $\theta_a=-20\sim 40^\circ\text{C}$ 、 $Rh=70\%$ 、 $p=1000\text{hPa}$)

係を示している。図-6 は接水気層が不安定の場合、図-7 は安定の場合である。また、それぞれ、解軌道が⑥の場合のみ、解軌道が⑧の場合のみを選択している。さらに、 $\Delta\theta_v$ の符号が流下距離 $(x-x_0)/q=50\text{km}/(\text{m}^2/\text{s})$ で変化しているもの、また、水温の非線形解と線形解のどちらか一方が負になるものは省いている。これは、出来る限り等しい条件で非線形解と線形解の両者を比較するためである。なお、⑥と⑧を選択したのは、連続したより多くの計算結果が得られたためである。

図-6、7 より、 $\Delta\theta_v$ の絶対値の増加、および V の増加に伴い、 $\Delta\theta_{\text{NL-L}}$ が増加していることは明らかである。 I が増加すれば、接水気層が不安定の場合の水温差は減少している。一方、安定の場合の水温差は増加している。これは、解軌道が⑥の場合、前述したように、 I が増加すれば平衡温度も増加する。そのため、平衡温度と θ_0 の水温差が減少し、応答すべき水温変化の範囲が減少したためによるものと考察できる。また、解軌道が⑧の場合、同様に平衡温度は増加するが、平衡温度と θ_0 の水温差も増加し、応答すべき水温変化の範囲も増加したためによると考察できる。

図-6、7 とも 2.4 節に関連して、 I が増加したために比較できる計算結果の個数がそれぞれ増加していることも注目できる。

以上より水温非線形解と線形解の差が増加する条件として、

- (i) 接水気層が不安定で、 I が少なく、 V が大きいとき。
 - (ii) 接水気層が安定で、 I が多く、 V が大きいとき。
- に、両者の解の差は増加することが言える。

4. 結論

本論文で得られた結果をまとめると以下ようになる。

- (1) 閾値のある Bernoulli の微分方程式を用いて、河川水温の非線形解が、3 つの全く違った解軌道—平衡温度への収束、一定値、発散—となることを示した。
- (2) ある気象条件における、水温解軌道の領域区分図の一例を示した。
- (3) 仮温度差を用いて、接水気層の安定状態を判別し、日射量および風速の変化により、水温非線形解と線形解の差は増減することを示した。

今後の課題は、本論文で得られた水温非線形解析の手法を実河川を対象に実証し、気象要素と水理要素のどのような組み合わせに対して非線形解析が必要であるかを明らかにすることである。また、閾値、平衡温度と初期水温、気象要素との一般的な対応関係(領域区分図)を明確にすることも重要である。

参考文献

- 1) 佐渡公明、杉山一郎：河川水温に影響する水理・気象要素に関する基礎的研究，水工学論文集，第 44 巻，pp.1257-1262，2000。
- 2) 佐渡公明：平衡温度による河川水温の 1 次元解析，土木学会論文報告集，No. 333，pp.119-127，1983。