

定山溪ダム貯水池の水位変動のカオス解析

Chaotic analysis of water level fluctuation of Johzankei dam reservoir

北海道大学大学院工学研究科
北海道大学大学院工学研究科

○学生員 星野 智紀(Tomonori Hoshino)
フェロー 藤田 睦博(Mutsuhiro Fujita)

1. はじめに

これまで著者らは、定山溪ダムの水位変動の時系列をウェーブレット解析により分析してきた。時系列解析において周波数解析を行う際にはスペクトル解析を用いるのが一般的である。しかし、スペクトル解析は波形を時間領域で積分し、周波数領域の情報に変換するために、時間領域の情報が失われるという欠点がある。ウェーブレット解析は、波形を高精度で時間領域と周波数領域にまたがって解析することが可能である。一般に時系列は局所的に周期的な信号であり、周波数が時間の流れとともに変化するようなものが多い。ウェーブレット解析を行うことにより、このような時系列の周波数を時間の流れとともに解析する時間周波数解析が可能となる。前回までの報告では、ウェーブレット解析を定山溪ダム貯水池の水位変動に適用することにより、有意義な結果を得ることができた。今回は、これらの周波数成分とは別に、スペクトル解析でもウェーブレット解析でも捉えることのできないカオス的な振動成分がダム水位振動の時系列中に存在していると仮定し、カオス解析を行う。

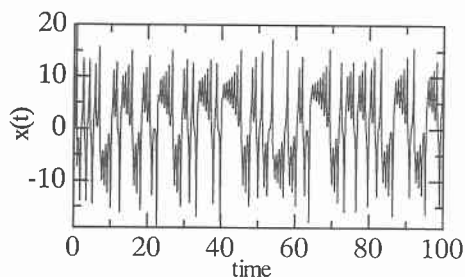
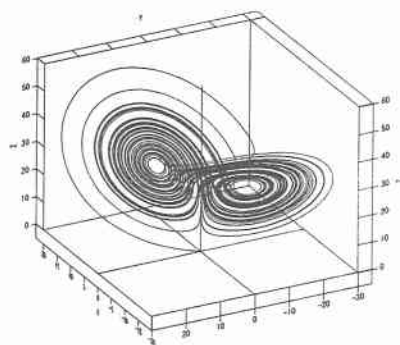
図1 ローレンツ方程式 $x(t)$ の波形

図2 ローレンツアトラクタ

2. カオスの定義

カオスの定義は、「複雑な振る舞いをしているように見えて、実は簡単な法則にしたがっているもの。」である。(1)式に示す常微分方程式はローレンツモデルと呼ばれカオス的な挙動を示すことが知られている。(x, y, zは状態変数, a, r, bは定数, tは連続な時間を表す。)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma y - \alpha x \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

ローレンツ方程式を、ルンゲ・クッタ法を用いて変数 x について解いた解の時間波形を図1に示す。この波形を見ると連続であり、かつ不規則的な挙動を示しているのが分かる。ここで、(1)式よりローレンツモデルの変数は3つあるので、同様にルンゲクッタ法で解いた解を三次元の相空間内にそれぞれ埋め込み、軌道を描いてみると図2のようなローレンツアトラクタを得ることができる。図1と図2を比較すると、一見不規則に見える波形でも、図2のような比較的簡単な規則に支配されて波形を構成しているという事が分かる。このような性質がカオスの特徴である。

3. アトラクタの再構成

前に示したローレンツモデルの場合、(x, y, z)の3つの状態変数によって、ある時刻の状態が表される。これらの状態変数を相空間内にプロットすることにより、ローレンツアトラクタが得られた(図2)。しかし、一般の時系列を扱う場合、n個の状態変数を観測するのは大変困難である。このような場合、1個の状態変数からアトラクタを構成する方法がTakensによって提案されている。

時系列 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ から、d次元の状態空間内にアトラクタを構成しようとするとき、適当な遅れ時間 τ を選び、その遅れ時間 τ ごとのd個のデータのベクトル $\mathbf{x}$ を作成する。

$$\mathbf{x}_i = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(d-1)\tau}) \quad (i = 1, 2, \dots, n - (d-1)\tau) \quad (2)$$

このベクトルをd次元の相空間内にプロットすることによりアトラクタを構成すればよい。このような手法で再構成されたアトラクタは、元のアトラクタの埋め込みが保証されることが証明されている。つまり、再構成されたアトラクタが元の系列の埋め込みになっている場合、リアプノフ指数あるいはフラクタル次元といったカオス特有の情報量が保存される。アトラクタの再構成において重要になってくるのが、後に述べる埋め込み遅延時間 τ の決定方法と、埋め込み次元dの決定方法である。



図3 定山溪ダム平面図

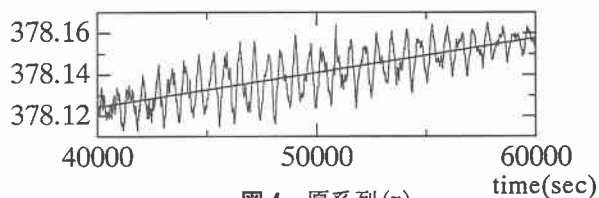


図4 原系列(m)

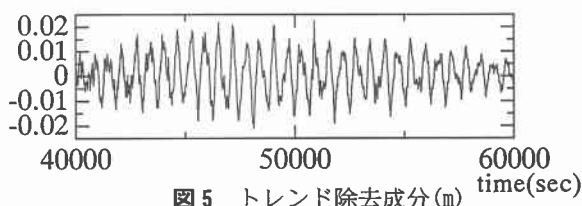


図5 トレンド除去成分(m)

4. 対象データ

図3は解析の対象とした定山溪ダムの平面図である．対象としたデータは，No. 6 水位観測点において観測された水位変動の時系列である．水位の観測は1997年10月22日午前0時から24時まで行われたが，今回はウェーブレット解析で強い振動の存在が確認された40000秒～60000秒における10秒おきの2000個のデータを解析対象とした．原系列に傾向成分として直線を仮定し，その偏差を取ったものが図5に示すトレンド除去成分を示す．さらに，この傾向成分の移動平均を取り，スムージングした系列を今回の解析対象とした．

5. 埋め込み遅延時間の決定

遅れ時間が小さすぎると各ベクトルの相関が極端に高くなってしまふ．この問題の決定的な解決方法は確立されていないが，目安としては用いる時系列の卓越周期や自己相関係数を目安とするのが一般的である．これらの目安は以下に示すとおりである．

1. 自己相関関数がはじめにゼロクロスする時刻
2. ゼロクロスしない場合は，はじめに極小値を取る時刻
3. 卓越周期の数分の1

図6に示すように，自己相関は200秒付近でゼロクロスしている．また，この値はNo. 6で確認された主な振動の周期であるおよそ600秒の約3分の1の値である．以上のことから，埋め込み遅延時間を200秒に設定する．

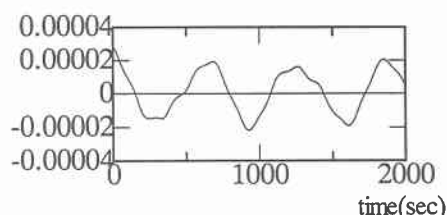


図6 自己相関(m²)

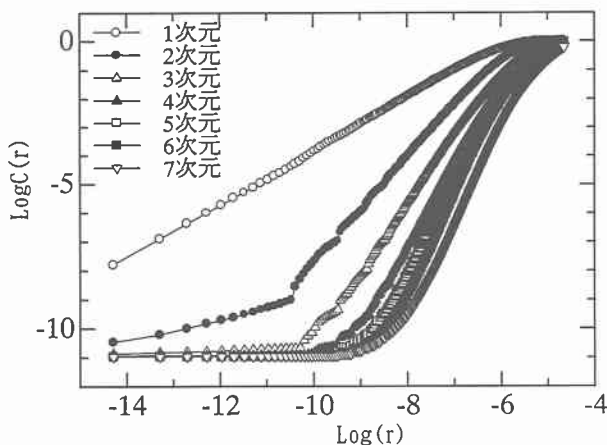


図7 それぞれの次元における r と $C(r)$ の関係

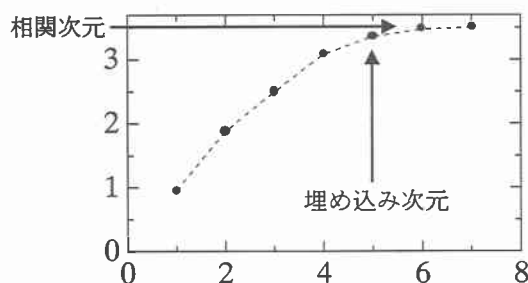


図8 収束図

6. 埋め込み次元の決定

アトラクタの埋め込み次元の決定にはG-P法(相関次元法)を利用する．前述したように時系列 $x(t)$ より， d 次元空間のベクトル $\mathbf{x}$ の集合を作り，これらの点を用いて(3)式に示す相関積分を行う．

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(r - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (3)$$

ここで， $H(x)$ は(4)式に示すヘビサイド関数である．

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (4)$$

また $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ はベクトル $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ の距離で，(5)式で示される

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = \left(\sum_{l=1}^m |x_i - x_j|^n \right)^{1/n} \quad (5)$$

$C(r)$ は，アトラクタに含まれる着目点1点を $\mathbf{x}_i$ としたとき，その点を中心とした半径 r の球(3次元の場合．2次元の場合は円，4次元以上では超球となる)の中に構成点が含まれる確率を示している．この結果を図7に示す．グラフ中で，それぞれの系列の直線部分に注目し，それらの傾きと次元の関係をグラフにしたのが図8である．このグラフは収束図と呼ばれ，横軸に次元，縦軸に傾きを取ってある．カオスは，ある程度高い次元に埋め込むと傾きが飽和するという性質があり，飽和した次元を読み取るにより相関次元(フラクタル次元)を求めることができる．(一般に相関次元が小さければ小さいほど時系列が単純である．また相関次元が大きければ，それだけ時系列が複雑なことを示している．)また，埋め込み次元には，傾きが飽和し始めたときの次元 d が用いられる．これらの値をグラフから読み取ると，相関次元は3.5，埋め込み次元は5が最適であることが分かる．

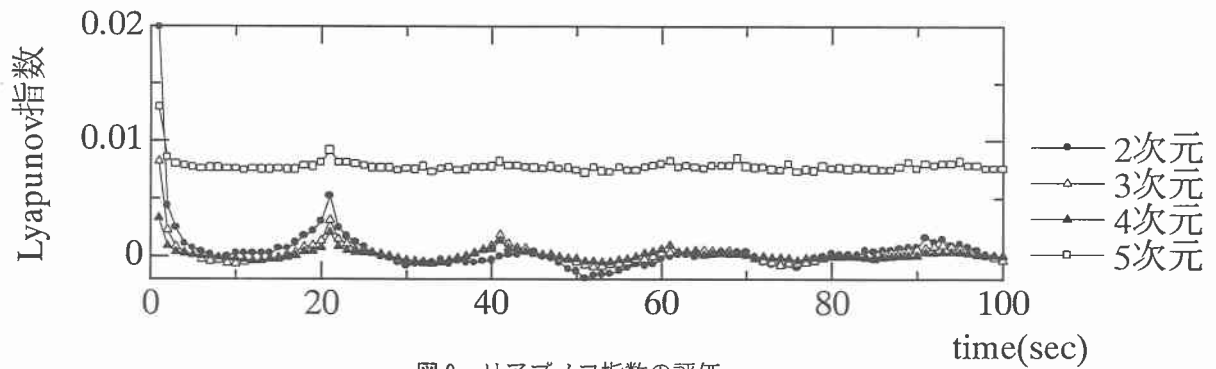


図9 リアプノフ指数の評価

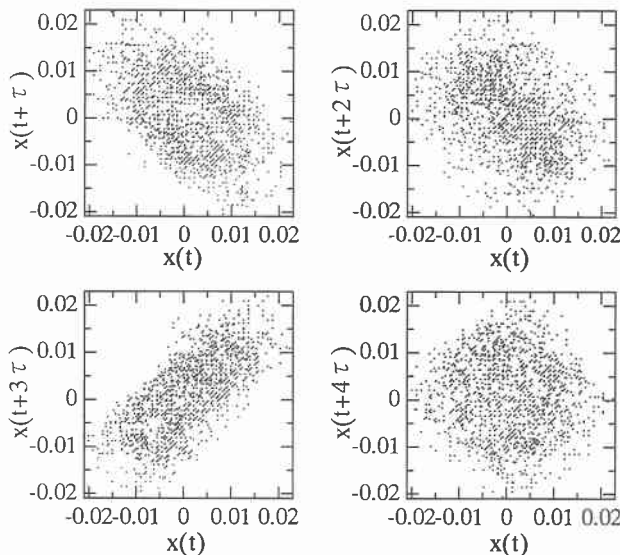


図10 τ おきのデータ間の関係

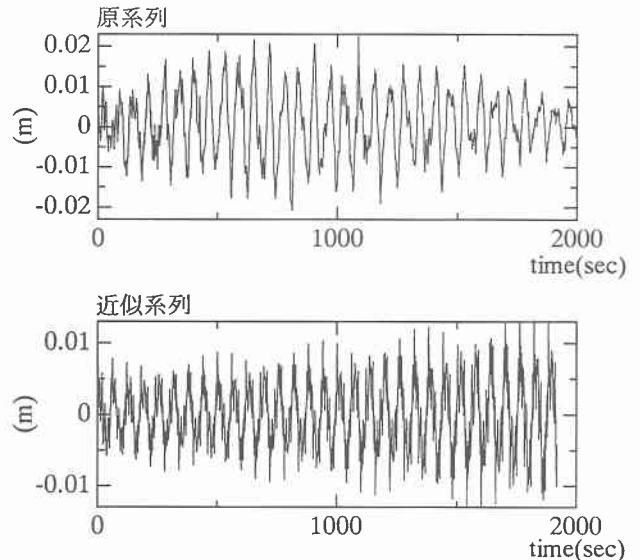


図11 原系列と近似系列

7. リアプノフ指数の算出

リアプノフ指数とは $x_{n+1} = f(x_n)$ という力学系において、近接した2点から出発した2つの軌道 $\{x_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のときにどれだけ離れていくかを測る尺度で以下の式で定義される。

$$\begin{aligned} \lambda(f) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)| \end{aligned} \quad (6)$$

リアプノフ指数が負の値の場合、軌道は周期点に収束するが、正の場合は、近接した2点から出発した2つの軌道が指数関数的にその距離を広げていく。つまり、リアプノフ指数が正ならば、その系はカオスであると判断できる。リアプノフ指数を実験・観測等で得られた時系列から求める場合、さまざまな手法が提案されているが、今回は佐藤・佐野らによって提案された手法⁽¹⁾を用いる。

埋め込み遅延時間は200秒、埋め込み次元は5と決定できたので、これに従い埋め込みを行う。こうして再構成されたアトラクタ中の点の中で最も近接した2点 x_i, y_i のペアをつくり、この2点の時間変化を追いながら、 τ 間隔の距離の比を(7)式に従い計算し、これを多くのペアについて平均操作を(8)式で行う。これを(9)式で τ で割ることにより、リアプノフ指数を得る。

$$\Lambda_i(t, \tau) = \frac{|x_i(t + \tau) - y_i(t + \tau)|}{|x_i(t) - y_i(t)|} \quad (7)$$

$$\langle \log \Lambda(t, \tau) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \Lambda_i(t, \tau) \quad (8)$$

$$\lambda(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \langle \log \Lambda(t, \tau) \rangle \quad (9)$$

計算結果は図9に示す。なお、埋め込み次元は5次元と決定したが、それぞれの次元におけるリアプノフ指数の評価を行うために、2次元から5次元までの計算を行った。これを見ると、1次元から4次元まではリアプノフ指数がゼロ付近で上下しているのが分かる。これは、4次元まではカオス性が薄いことを示している。しかし、5次元ではリアプノフ指数が安定して正の値を示しているのが分かる。このことから、カオス性が高いことが推測できる。以上のことから、水位変動の時系列は5次元のカオス成分を含むことが分かった。

8. システムの近似

ダム水位水位振動系列は、 $\tau = 200$ 秒間隔の5次元のシステムで記述されることがわかった。 $x(t)$ と $x(t + n\tau)$ との関係を図10に示した。これを見ると、 $x(t + \tau) \sim x(t + 3\tau)$ に関しては、1次式で近似して問題はないと見られる。 $x(t + 4\tau)$ に関しては、推定が困難なので今回はすべて(10)式に示す近似式で原系列の近似を行った。

$$x(n) = c_1 x(n - \tau) + c_2 x(n - 2\tau) + c_3 x(n - 3\tau) + c_4 x(n - 4\tau) \quad (10)$$

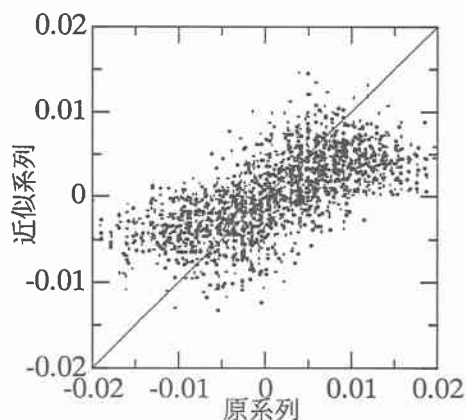


図 12 再現性の確認

近似式中に含まれる $C_1 \sim C_4$ の係数の計算は最小二乗法を用いて行った。この結果以下の結果が得られた。

$$C_1 = 0.6973 \quad C_2 = 0.5395$$

$$C_3 = -0.3561 \quad C_4 = -0.8635$$

これらの係数を用いて構成された系列を図11に示した。この再現性を確認するために図12に原系列と近似系列の比較のグラフを示す。今回の結果では、 $y=x$ に対する相関係数は0.6701であった。グラフを見ると、ややばらつきが大きいがある程度近似できたと言えると思う。

9. 考察

今回の研究から、いままではホワイトノイズとして見落としていた定山溪ダム貯水池の水面振動の時系列がカオス振動を含んでいるということが分かった。ホワイトノイズとカオスの判別においては、リアプノフ指数と相関次元の両面からアプローチしていくことが大切である。例えば、リアプノフ指数が正の値を取ったからといってカオスと断定することはできない。なぜならホワイトノイズのリアプノフ指数は正の値を取るからである。ホワイトノイズとカオスの判別をするためには相関次元の算出が重要となる。系列がカオスの場合、相関次元は次元を上げていくと相関次元が飽和するが、ホワイトノイズの場合は飽和することは無い。今回は、このリアプノフ指数と相関次元の両面から、カオスの判別をし、系列がカオスであるという結論に達した。以上のことから、今回の研究の主なテーマであった時系列含まれるカオスの判別という目的はある程度達成されたと言えると思う。今回の解析の結果、水面振動の時系列は遅れ時間は200秒で埋め込み次元は5次元のカオス振動であるという結果を得た。本解析では、水面振動のデータがカオス成分と確立変動成分の和として与えられることが分かった。今回は、式(10)を仮定したが、それでも図12に示すように原系列 $x(n)$ の予測に効果のあることがわかった。

＜参考文献＞

- (1) Shinichi Sato, Masaki Sano, Yasuji SAWADA: Practical Methods of the Largest Lyapunov Exponent in High Dimensional Chaotic Systems: Prog. Theor. Phys. Vol. 77, (1987) 1
- (2) 合原一幸編：カオス時系列の基礎と応用：産業図書
- (3) 合原一幸編：カオスセミナー：海文堂
- (4) 長島弘幸，馬場良和共著：カオス入門「現象の解析と数理」：培風館
- (5) 石田亨平，長谷川和義，鈴木洋之：多点同時水位計測による貯水池の水面変動解析：水工学論文集第41巻 pp1017-1022 1997