

係留索の復元力連成を考慮した長大浮遊円筒体の弾性床上梁へのモデル化

Modeling of huge floating cylindrical structure coupling with restoring force by a beam on elastic foundation

北海道大学大学院工学研究科 ○学生員 佐藤太裕 (Motohiro Sato)
 北海道大学大学院工学研究科 正員 小池明夫 (Akio Koike)
 北海道大学大学院工学研究科 正員 蟹江俊仁 (Shunji Kanie)
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 三上 隆 (Takashi Mikami)

1. はじめに

例えば水中浮遊式トンネルなどの長大構造物の外殻部や内部構造に生じる断面力を精度良く算定しようとした場合には、本来三次元解析が望ましいことはいうまでもない。しかしながら初期設計の段階においては膨大な量の解析を行う必要があり、そのため比較的簡単でかつ等価なモデル化を用いた各構造諸元の決定が要求されることとなる。このため等価なモデル化を行うことは初期設計においては非常に重要であるといえる。

長大な浮遊円筒構造体という特色を考慮すると、円筒体の断面径に比べその全長が長い場合は1次元弾性梁に置き換えることができる。そこで巨視的な弾性応答解析を行う場合のモデルとして係留索をばねとした弾性床上梁に単純化することが考えられる。弾性床上梁へのモデル化は簡単ではあるが、その有用性については例えば超大型浮体の解析モデルとして弾性床上梁にモデル化した場合、局部挙動は別として、全体挙動については比較的良好な精度で基本的特性が評価できるとした過去のいくつかの研究、報告^{1)~3)}からも示されている。ただし本研究で対象とする構造体は半潜式超大型浮体などとの相違点として、係留索を円筒体軸方向に対して離散的に数多く配置する点、さらに各係留位置において係留形式による復元力の連成を考慮しなければならない点、が挙げられる。このため一様分布ばねである弾性床上の梁へのモデル化を考える場合は、これら二点を考慮しなければならない。

本研究は水中浮遊式トンネルなどで考えられる長大浮体円筒体の初期設計における断面諸量決定に必要な情報を効率的に取り出す解析モデルとして、連成復元力を考慮した弾性床上梁の定式化とその妥当性の検証を行うことを目的としている。以下では係留索による離散的なばねと、復元力の影響を平均化した分布ばねをそれぞれ含めた支配方程式を導出し、得られる解析解の比較から等価性検討を行う。

2. 基本仮定と解析モデル

解析に関しては次の仮定に従うものとする。

- (1) 係留索の取り付け間隔 h は一定である。
- (2) 係留索は一定の軸剛性のみを有するバネである。
- (3) 断面はトンネル軸方向に対して一様の中空円である。
- (4) トンネルの運動は、曲げについては Bernoulli-Euler 梁理論に、ねじりについては St. Venant のねじり理

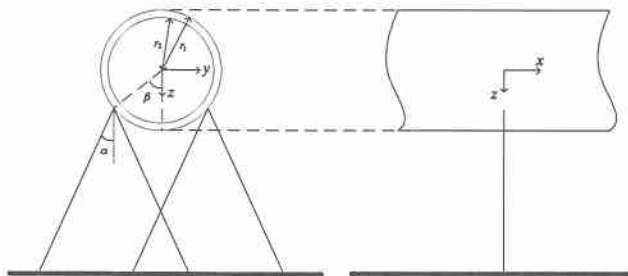


図-1 断面図

図-2 側面図

論に基づくものとする。

図-1は解析モデルの断面図を、図-2は側面図を示している。1カ所の係留索は伸び剛性 $E_l A_l$ 、長さ L_l の斜レグ4本からなる形式を考える。トンネルについては断面外径を r_1 、内径を r_2 とし、係留索の配置は傾角を α 、トンネル本体への取り付け角度を β とする。また座標系は図-1、2に示すとおりで、変位については x 、 y 、 z 方向の変位をそれぞれ u 、 v 、 w とし、 x 、 z 軸回りの回転角をそれぞれ θ 、 φ とする。

3. 係留索による復元力について

係留索を y - z 断面について図-1の形式で係留すると、その係留索による復元力を円筒体 y - z 断面の重心に関する力に変換することにより

①水平方向 (sway) とねじり (roll) の運動

② x 軸方向 (surge) と z 軸回りの回転 (pitch) の運動がそれぞれ連成することとなる。これより係留索配置点の重心に関する復元力 F を線形弾性の範囲内において求めると、それぞれ以下のように表される。

<水平方向 (sway) とねじり (roll) の運動>

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_v & k_{v\theta} \\ k_{\theta v} & k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_v & -k_v r_1 \cos \beta \\ -k_v r_1 \cos \beta & k_v r_1^2 (\cos^2 \beta + p_1 \sin^2 \beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$p_1 = \frac{k_w}{k_v} = \frac{T_p \sin^2 \alpha + E_l A_l \cos^2 \alpha}{T_p \cos^2 \alpha + E_l A_l \sin^2 \alpha} \quad (2)$$

k_w : 鉛直方向ばね定数, T_p : 係留索の初期張力

< x 軸方向 (surge) と z 軸回りの回転 (pitch) の運動>

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_u \\ F_\varphi \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_u & k_{u\varphi} \\ k_{\varphi u} & k_\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ \varphi_r \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_u & -k_u r_1 \cos \beta \\ -k_u r_1 \cos \beta & k_u r_1^2 \cos^2 \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ \varphi_r \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで

$$p_2 = \frac{k_u}{k_w} = \frac{T_p \cos \alpha}{T_p \sin^2 \alpha + E_l A_l \cos^2 \alpha} \quad (4)$$

4. 支配方程式の定式化

ここでは長大浮遊円筒体を曲げ剛性 EI , 伸び剛性 EA , ねじり剛性 GJ の弾性梁としてその定式化を行う。離散的なばねをそのまま考慮する場合は3. の復元力によるつり合い式と変形-断面力の関係から, x 方向に等間隔である係留索配置点の断面重心 r を格点 (整数) とした差分方程式を誘導する。また一様分布ばねはそのばね定数 k' を

$$k' = \frac{k}{h} \quad (5)$$

つまり係留索のばね定数を係留索配置間隔で平均化した値を用いることで, 等価な弾性床上梁の微分方程式を導出する。

本研究で用いる無次元パラメータはそれぞれ次式で定義する。

$$\xi = \frac{x}{h}, V = \frac{v}{h}, W = \frac{w}{h}, R_1 = \frac{r_1}{h}, R_{1C} = R_1 \cos \beta$$

$$a_1 = \frac{EI}{GJ}, a_2 = \frac{I}{Ah^2}, K_v = \frac{k_v h^3}{6EI} = \frac{k'_v h^4}{6EI}$$

$$K_\theta = \frac{k_\theta h}{6GJ} = \frac{k'_\theta h^2}{6EI} = a_1 K_v R_1^2 (\cos^2 \beta + p_1 \sin^2 \beta)$$

$$K_w = \frac{k_w h^3}{24EI} = \frac{k'_w h^4}{24EI}$$

$$K_\varphi = \frac{k_\varphi h}{8EI} = \frac{k'_\varphi h^4}{8EI} = 3p_2 R_{1C}^2 K_w$$

$$K_u = \frac{k_u h}{EA} = \frac{k'_u h^2}{EA} = 24a_2 p_2 K_w$$

4.1 離散ばねを考慮した場合

(1) 水平方向 (sway) とねじり (roll) の運動

前述の通り, 格点におけるつり合い式と変形-断面力の関係より次の連立差分方程式が得られる。

$$\{E^2 + E^{-2} + (K_v - 4)(E + E^{-1}) + 4K_v + 6\}V_r - K_v R_{1C} (E + E^{-1} + 4)\theta_r = 0 \quad (6)$$

$$a_1 K_v R_{1C} V_r + \{E + E^{-1} - (2 + K_\theta)\}\theta_r = 0 \quad (7)$$

ここで, E は移動演算子をあらわす。式 (6), (7) に $V_r = A_1 e^{\phi_{D1} r}$, $\theta_r = B_1 e^{\phi_{D1} r}$ を代入し整理すると, 特性方程式として次の3次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} X_{D1}^3 + (K_v - 6K_\theta)X_{D1}^2 + 6K_v(1 - K_\theta + a_1 R_{1C}^2 K_v)X_{D1} \\ + 36K_v(a_1 R_{1C}^2 K_v - K_\theta) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $X_{D1} = 2(\cosh \phi_{D1} - 1)$ 。

(2) x 軸方向 (surge) と z 軸回りの回転 (pitch) の運動

4.1 (1)と同様に次の連立差分方程式が得られる。

$$2K_u R_{1C} \left\{ \frac{(E + E^{-1}) - 2(1 + K_w)}{E - E^{-1}} \right\} W_r + \{E - (2 + K_u) + E^{-1}\} U_r = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \{E^2 + E^{-2} + 4(-1 + K_w - 2K_\varphi)(E + E^{-1}) + 6 \\ + 16(K_\varphi + K_w + K_w K_\varphi)\} W_r + \frac{4K_\varphi}{R_{1C}} (E - E^{-1}) U_r = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

式 (9), (10) に $W_r = A_2 e^{\phi_{D2} r}$, $U_r = B_2 e^{\phi_{D2} r}$ を代入し整理すると, 特性方程式は次の3次方程式となる。

$$\begin{aligned} X_{D2}^3 + (4K_w - 8K_\varphi - K_u)X_{D2}^2 \\ + 4(6K_w + 4K_w K_\varphi - K_w K_u)X_{D2} - 24K_w K_u = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで $X_{D2} = 2(\cosh \phi_{D2} - 1)$ 。

4.2 一様分布ばねを考慮した場合 (等価な弾性床上梁)

(1) 水平方向 (sway) とねじり (roll) の運動

復元力の連成を考慮した等価な弾性床上梁の全ポテンシャルエネルギー Π_1 は次式となる。

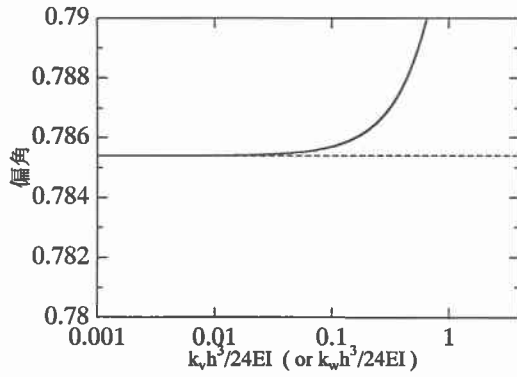
$$\begin{aligned} \Pi_1 = \frac{1}{2} \int \left\{ EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + GJ \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right\} dx \\ + \int \{ k'_v (v - r_1 \cos \beta \cdot \theta)^2 + k'_\theta \theta^2 \} dx \end{aligned} \quad (12)$$

上式を Euler-Lagrange の方程式に代入し, 無次元化すると次の連立微分方程式が得られる。

$$\frac{d^4 V(\xi)}{d\xi^4} + K_v V(\xi) - K_v R_{1C} \theta(\xi) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \theta(\xi)}{d\xi^2} + a_1 K_v R_{1C} V(\xi) - K_\theta \theta(\xi) = 0 \quad (14)$$

特性方程式は $V(\xi) = A_3 e^{\phi_{C1} \xi}$, $\theta(\xi) = B_3 e^{\phi_{C1} \xi}$ を代入し



図－3 非連成時特性解の偏角（実線：離散的な係留索を考慮した場合、破線：等価な弾性床上梁）

整理することで次式となる．

$$X_{C1}^3 - 6K_\theta X_{C1}^2 + 6K_v X_{C1} + 36K_v (a_1 R_{1C}^2 K_v - K_\theta) = 0 \quad (15)$$

ここで $X_{C1} = \phi_{C1}^2$.

(2) x 軸方向 (surge) と z 軸回りの回転 (pitch) の運動

4.2(1)と同様にしてポテンシャルエネルギー Π_2 と連立微分方程式がそれぞれ次のように得られる．

$$\begin{aligned} \Pi_2 = \int \frac{1}{2} \{ EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \} dx \\ + \int \{ k'_w w^2 + k'_u (u - r_1 \cos \beta \frac{dw}{dx})^2 \} dx \end{aligned} \quad (16)$$

$$K_u R_{1C} \frac{dW(\xi)}{d\xi} + \frac{d^2 U(\xi)}{d\xi^2} - K_u U(\xi) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d^4 W(\xi)}{d\xi^4} - 8K_\varphi \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} + 24K_w W(\xi) + \frac{8K_\varphi}{R_{1C}} U(\xi) = 0 \quad (18)$$

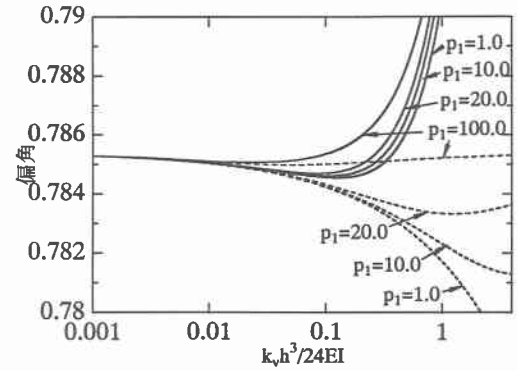
$W(\xi) = A_4 e^{\phi_{C2} \xi}$, $U(\xi) = B_4 e^{\phi_{C2} \xi}$ を上式に代入して次の特性方程式が得られる．

$$X_{C2}^3 - (8K_\varphi + K_u) X_{C2}^2 + 24K_w X_{C2} - 24K_w K_u = 0 \quad (19)$$

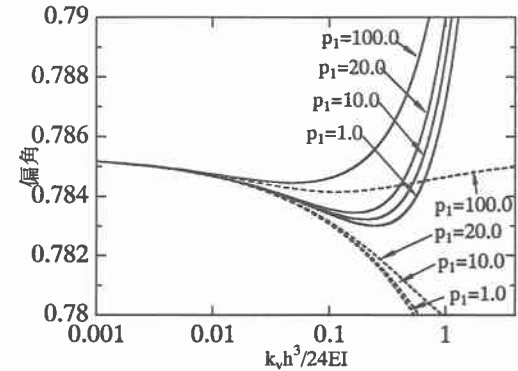
ここで $X_{C2} = \phi_{C2}^2$.

5. 等価性の検討

sway-roll 連成は K_v , p_1 と β , surge-pitch 連成は K_w , p_2 と β を支配パラメータとして，ここではそれぞれの特性方程式を解くことにより得られる特性解の影響から等価性について検討する．図－3から図－7については実線が離散的な係留索を考慮した結果，破線が等価な弾性床上梁の結果をそれぞれ表している．また構造物の諸元として $R_1=0.1$, $R_2=0.09$ とした．

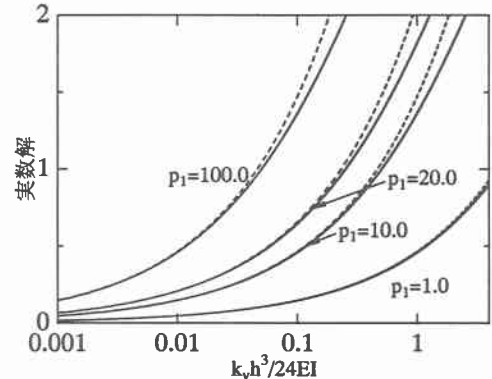


(a) $\beta = 60^\circ$

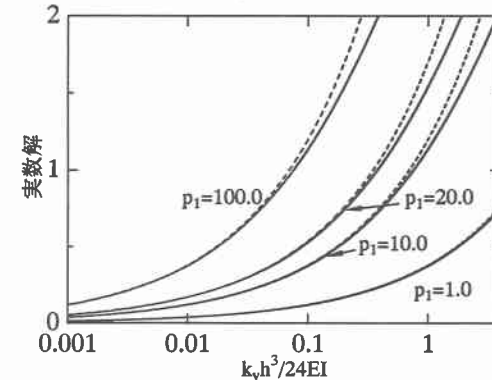


(b) $\beta = 45^\circ$

図－4 特性解の偏角（実線：離散的な係留索を考慮した場合、破線：等価な弾性床上梁）



(a) $\beta = 60^\circ$



(b) $\beta = 45^\circ$

図－5 実数解（実線：離散的な係留索を考慮した場合，破線：等価な弾性床上梁）

(1) 水平方向 (sway) とねじり (roll) の運動

図-3は非連成、つまり $\beta = 90^\circ$ の場合における特性解の偏角を示したものである。この図より非連成時においては、およそ $kh^3/24EI < 0.05$ を満たせば等価であることがわかる。このことは弾性支承上梁に関する既往の研究⁴⁾とよく一致している。一方図-4は式(8)と式

(15)より得られた特性解のうち、虚数解の偏角を比較したものである。 $\beta \neq 90^\circ$ で連成を生じるが、等価性という観点からみると、両者が一致する条件は非連成時と変わらずおよそ $kh^3/24EI < 0.05$ であることがこの図より読みとられる。図-5は実数解部分の比較を示したものである。実数解はその定式化から、ねじりに関する影響を反映するものである。図-5では p_1 の増加により不一致がみられる。 p_1 の増加はねじり復元力ばね定数の増加を意味するので、このことはねじりに関する定数からの検討の必要性を示唆していると考えられる。

(2) x 軸方向 (surge) と z 軸回りの回転 (pitch) の運動

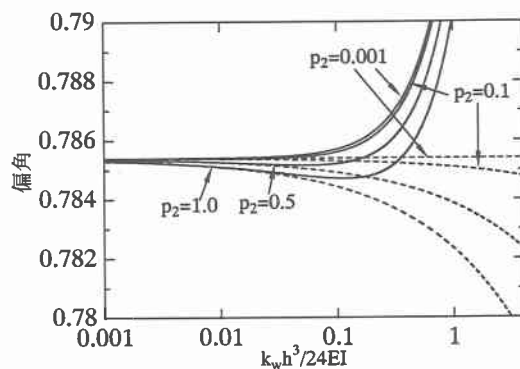
図-6は式(11)と式(19)より得られた特性解のうち、虚数解の偏角を比較したものである。ここでも連成の影響を考慮した場合において(1)と同様のことがいえる。また p_2 は鉛直方向復元力に対するトンネル軸方向復元力の比を表すパラメータであるが、この値が大きいほど連成(または回転復元力)の影響も大きくなる。ただし p_2 が解に及ぼす影響は p_2 の減少とともに指数関数的に減少していく。図-7は実数解であるがこれについては K_w に大きな影響は与えない。

6. まとめ

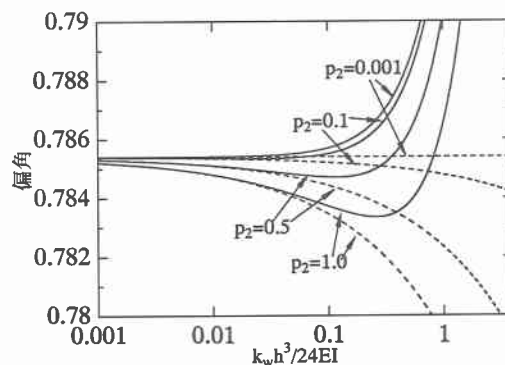
本研究では係留索配置に起因する復元力の連成を考慮した場合における、等価な弾性床・上梁モデルの適用範囲について検討したものである。その結果、係留索を離散ばねのまま評価したケースと比較すると、特性解自体は変化するものの、等価性については非連成時と大きな差はないことがわかった。ただし大きな鉛直ばね定数によりねじり復元力が大きくなるような場合には、 K_θ の変化に対応する等価性が決定されることも考えられる。

参考文献

- 1) 鈴木英之, 吉田宏一郎: 超大型浮体の構造挙動および構造設計に関する考察, 日本造船学会論文集, 第178号, pp.473-483, 1995.
- 2) 鈴木英之, 服部陽一, 為廣正起, 安澤幸隆, 岡田真三, 森川正夫: 大規模浮体の構造設計法に関する一考察, 第13回海洋工学シンポジウムテキスト, pp.31-36, 1998.
- 3) 坪郷 尚, 岡田博雄: 弾性支床の上の梁モデルによる長大浮体構造の動的撓み挙動特性に関する考察, 日本造船学会論文集, 第181号, pp.289-298, 1997.
- 4) Ellington, J.P.: The beam on discrete elastic supports, Bulletin of the International Railway Congress Association, Vol.34, No.12, pp.933-941, 1957.
- 5) 佐藤太裕, 蟹江俊仁, 三上 隆: 水中浮遊式トンネル解析における等価な弾性床・上梁モデルについて, 構造工学論文集, Vol.46A, pp.41-49, 2000.

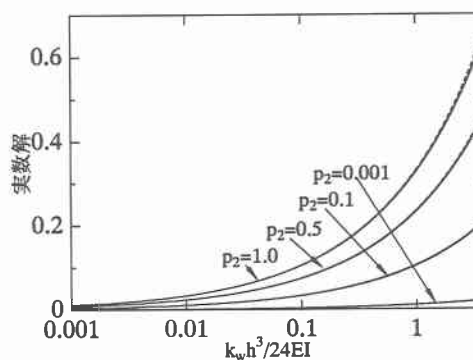


(a) $\beta = 60^\circ$

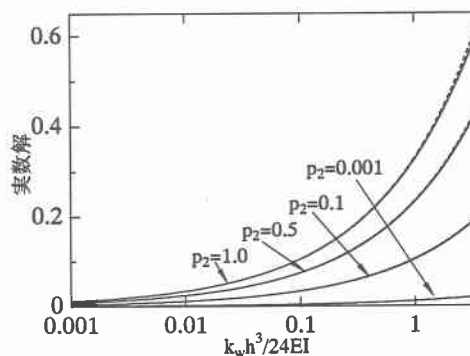


(b) $\beta = 45^\circ$

図-6 特性解の偏角 (実線: 離散的な係留索を考慮した場合, 破線: 等価な弾性床上梁)



(a) $\beta = 60^\circ$



(b) $\beta = 45^\circ$

図-7 実数解 (実線: 離散的な係留索を考慮した場合, 破線: 等価な弾性床上梁)