

集中質量を有する傾斜したケーブルの固有振動解析について

Natural Vibration Analysis of Sloped Cables with Concentrated Mass

北海道大学大学院工学研究科
北海道大学大学院工学研究科
北海道大学大学院工学研究科
北海道大学大学院工学研究科

F 会員 林川 俊郎(Toshiro Hayashikawa)
○学生員 目時 政紀(Masanori Metoki)
正 員 及川 昭夫(Akio oikawa)
正 員 小幡 卓司(Takashi Obata)

1. まえがき

近年、景観や環境への配慮から木橋が多く架設されるようになってきている。現在の木橋は集成材を用い、コンクリートや鋼との複合構造となることが多く、その橋梁形式も多種多様なものとなっている。このような背景のもと、斜張橋やニールセン橋などのケーブル構造を用いた木橋が架設されている。これらの橋梁形式は架設時や維持管理を行う上でケーブル張力の調整が重要であり、簡便かつ精度の良いケーブル張力の測定が必要となる。最近では、精度の良さと簡便さからケーブルの固有振動数から張力を推定する振動法がよく利用されている。

振動法の研究として、1次または2次の固有振動数から張力を算出する新家らの研究¹⁾が知られている。高次モードの固有振動数から傾斜したケーブルの張力を推定する方法²⁾も示されている。これらの方法ではケーブルが素線の集合体であり、曲げ剛性が断面形状から一義的に決定されるものではないため³⁾、曲げ剛性を予備実験にて求めておく必要がある。しかし、導入張力や境界条件により曲げ剛性値が異なり⁴⁾、ケーブル架設時の状態を正確に把握し再現することは困難である。そこで最近では、複数の固有振動数とそのモード次数を用いて曲げ剛性と張力を同時に算定する方法⁵⁾、GAによる最適化を用いた集中質量を有するケーブルの構造同定⁶⁾、拡張カルマンフィルターによるケーブルの曲げ剛性と張力の同時同定⁷⁾などの研究が進んでいる。

ケーブルの固有振動数からケーブルの張力、曲げ剛性を推定する場合、ケーブルの固有振動解析が重要となる。木橋などの比較的小さいケーブル構造に用いられるケーブルは、ターンバックルなどを用いて人為的に締め付けられる場合が多く、弛緩した状態になっていることがある。そのため斜めに張り渡されたケーブルは自重によりサグを生じ、ケーブルに働く引張力がかなり低い場合がある。サグのあるケーブルのヤング係数はケーブル張力に応じて見かけ上ヤング係数が低下することが知られている⁸⁾。また、ターンバックルなどの集中質量が固有振動数に与える影響を考慮する必要がある。さらに、張力が小さくケーブル長の短いケーブルでは振動法に基づく張力計算においてその境界条件が大きく影響する⁹⁾。

本研究では、木橋などで用いられる比較的小さいケーブルを対象とし、サグの影響を考慮したケーブルの運動方程式から、両端単純支持、両端固定支持の境界条件のもと、集中質量の影響を考慮した振動数方程式を導く。数値計算により境界条件、サグ、集中質量、傾斜が固有振

動数に与える影響を調べる。サグや集中質量を考慮したケーブルの固有振動数を把握することで張力、曲げ剛性を同時同定する場合に役立つと考えられる。

2. 固有振動解析

図-1に示すような張力を受ける傾斜角 θ のケーブルの初期形状は、自重 w が等分布すると考え、ケーブル方向成分 $w\sin\theta$ を無視し、自重 $w\cos\theta$ を受ける水平ケーブルとみなすと次式となる。

$$y_e(x) = \frac{w\cos\theta}{T}x(l-x) \quad (1)$$

ここで、 T :初期ケーブル張力、 l :ケーブル長である。曲げ剛性、集中質量は初期形状には影響しないと仮定する。運動方程式は、ケーブル軸方向の振動変位成分を無視し、ケーブルのサグは十分小さく $dx/ds=1$ と考え、高次の微小項を省略すると次式となる。

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 y_e}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

ここで、 EI :曲げ剛性、 v :ケーブルの動変位、 h :動変位のケーブル張力、 m :ケーブルの単位長さ当り質量である。ケーブルが調和振動すると考え、 $v = \hat{v} e^{i\omega t}$ 、 $h = \hat{h} e^{i\omega t}$ と変数分離すると、次の一般解が得られる。

$$\hat{v} = A \cos \mu x + B \sin \mu x + C \cosh \nu x + D \sinh \nu x + \frac{g \cos \theta}{\omega^2 T} \hat{h} \quad (3)$$

ここで、 ω :ケーブルの固有円振動数、 g :重力加速度。

$$\mu = \sqrt{\frac{T}{2EI}}(z-1)、\nu = \sqrt{\frac{T}{2EI}}(z+1) \quad (4)$$

$$z = \sqrt{1 + \frac{4mEI\omega^2}{T^2}} \quad (5)$$

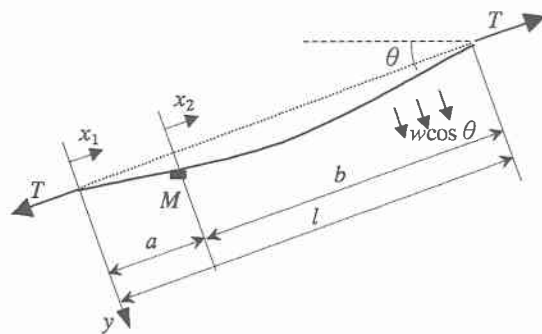


図-1 集中質量を有するケーブル

2.1 集中質量を持たないケーブルの場合

集中質量を持たないケーブルの境界条件は、両端単純支持の場合は式(6)、両端固定支持の場合は式(7)となる。

$$v^*(0) = 0, \frac{d^2 v^*(0)}{dx^2} = 0, v^*(l) = 0, \frac{d^2 v^*(l)}{dx^2} = 0 \quad (6)$$

$$v^*(0) = 0, \frac{dv^*(0)}{dx} = 0, v^*(l) = 0, \frac{dv^*(l)}{dx} = 0 \quad (7)$$

境界条件に式(3)の一般解を代入し、行列表示すると次式となる。

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{Hh} \quad (8)$$

ケーブルの方程式として次式が得られる。

$$\frac{hL_e}{EA} = \frac{w \cos \theta}{T} \int_0^l v(x, t) dx \quad (9)$$

ここで、

$$L_e = \int_0^l \left(\frac{ds_e}{dx} \right) = l \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{wl}{T} \cos \theta \right)^2 \right\} \quad (10)$$

式(9)に式(3)の一般解を代入し、行列表示すると次式となる。

$$\mathbf{Ga} = \mathbf{Eh} \quad (11)$$

式(8)、(13)より次式が成り立つ。

$$(\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{G})\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (12)$$

積分定数ベクトル $\mathbf{a}$ について有意な解を持つという条件から次の振動数方程式が得られる。

$$\det[\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{G}] = 0 \quad (13)$$

2.2 集中質量を有するケーブルの場合

集中質量を有するケーブルの場合、集中質量よりも左側の部分のたわみを v_1^* 、右側の部分のたわみを v_2^* で表すと、ケーブルの境界条件は両端単純支持の場合は式(14)、両端固定支持の場合は式(15)で表わされる。

$$v_1^*(0) = 0, \frac{d^2 v_1^*(0)}{dx_1^2} = 0, v_2^*(b) = 0, \frac{d^2 v_2^*(b)}{dx_2^2} = 0 \quad (14)$$

$$v_1^*(0) = 0, \frac{dv_1^*(0)}{dx_1} = 0, v_2^*(b) = 0, \frac{dv_2^*(b)}{dx_2} = 0 \quad (15)$$

また、 $x_1=a$ 、 $x_2=0$ 点における連続条件として以下の式が得られる。

$$v_1^*(a) = v_2^*(0), \frac{dv_1^*(a)}{dx_1} = \frac{dv_2^*(0)}{dx_2}, \frac{d^2 v_1^*(a)}{dx_1^2} = \frac{d^2 v_2^*(0)}{dx_2^2}$$

$$\frac{d^3 v_1^*(a)}{dx_1^3} - \frac{d^3 v_2^*(0)}{dx_2^3} = -\frac{M}{EI} \omega^2 v_2^*(0) \quad (16)$$

境界条件、連続条件に一般解を代入し、行列表示すると式(8)と同じ形で表わすことができる。集中質量より左側と右側の両方でケーブル方程式が成り立つことからこれを行列表示すると式(11)となり、振動数方程式は式(13)と同じ形となる。両端固定支持の場合のそれぞれの行列を示すと以下ようになる。

$$\mathbf{a} = \{A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1 \ A_2 \ B_2 \ C_2 \ D_2\}^T, \mathbf{h} = \{h_1^* \ h_2^*\}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \nu \\ \cos \mu a & \sin \mu a & \cosh \nu a & \sinh \nu a \\ -\mu \sin \mu a & \mu \cos \mu a & \nu \sinh \nu a & \nu \cosh \nu a \\ -\mu^2 \cos \mu a & -\mu^2 \sin \mu a & \nu^2 \cosh \nu a & \nu^2 \sinh \nu a \\ \mu^3 \sin \mu a & -\mu^3 \cos \mu a & \nu^3 \sinh \nu a & \nu^3 \cosh \nu a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{g \cos \theta}{\omega^2 T} & 0 & -\frac{g \cos \theta}{\omega^2 T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g \cos \theta}{\omega^2 T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Mg \cos \theta}{EIT} & -\frac{g \cos \theta}{\omega^2 T} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\sin \mu a}{\mu} & -\frac{(\cos \mu a - 1)}{\mu} & \frac{\sinh \nu a}{\nu} & \frac{(\cosh \nu a - 1)}{\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin \mu b}{\mu} & -\frac{(\cos \mu b - 1)}{\mu} & \frac{\sinh \nu b}{\nu} & \frac{(\cosh \nu b - 1)}{\nu} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{L_a}{EA} \frac{T}{w \cos \theta} - \frac{g \cos \theta}{\omega^2 T} a & 0 \\ 0 & \frac{L_b}{EA} \frac{T}{w \cos \theta} - \frac{g \cos \theta}{\omega^2 T} b \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$L_a = \int_0^a \left(\frac{ds_a}{dx_1} \right) = a \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{wa \cos \theta}{T} \right)^2 \right\}$$

$$L_b = \int_0^b \left(\frac{ds_b}{dx_2} \right) = b \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{wb \cos \theta}{T} \right)^2 \right\} \quad (18)$$

3. 数値計算結果

表-1に数値計算に用いたケーブルモデルの諸元を示す。本研究では、比較的小規模なケーブル構造物で用いられるケーブルを対象としていることから、一般的な丸鋼の諸元を用いている。 $\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{G}$ の加減の計算をする際に双曲線関数が非常に大きな値になることから、パソコンで桁落ちの可能性のある要素を含む行を余因子展開し、双曲線関数とそれ以外の値を展開することで計算を行った。

両端固定支持、張力 1000N、ケーブル長 5m、集中質量 120g、集中質量の位置左端から 0.5m、サグを無視した場合の水平なケーブルの1次から10次までのモード形状を図-2に示す。集中質量の影響により対称性がくずれ非対称モードとなり、高次のモードになると集中質量のある

点において振幅が小さくなっていることがわかる。

新家らの示した無次元数 $\xi (=T/EI)^{(1/2)} \times l$ を用いて、境界条件に着目して整理した1次から10次の固有振動数を表-2に示す。計算値はサグを無視した場合の集中質量を持たない水平なケーブルの固有振動数であり、()内は固定支持と単純支持の固有振動数の比を百分率で示したものである。境界条件の影響は低次、高次に関係無く、 ξ が大きくなるにつれ固有振動数の差は小さくなっていることがわかる。 ξ の値が小さい場合、すなわち張力が低く、ケーブルが短い場合、境界条件が異なることで固有振動数の差が大きいことから、境界条件をしっかり把握し、適切な振動数方程式を用いることが重要となる。サグを考慮した場合、集中質量を有する場合も同様の傾向が見られる。

サグに着目して整理した固有振動数を表-3に示す。集中質量を持たない両端固定支持のケーブルの固有振動数であり、5次以上のモードではサグの影響が見られなかったことから5次モードまでを示した。()内はサグを考慮した場合と考慮しなかった場合の固有振動数の比の百分率である。表よりサグを考慮すると1次モード、3次モードなど低次の対称モードにおいて振動数が高くなり、逆対称モードと高次のモードでは変化が見られない。これは式(9)で示したケーブル方程式において、ケーブルの全長に渡って変位を積分していることから、逆対称モ

ード、高次のモードにおいて積分値が0に近付くためである。ケーブル長が長く、張力が小さくなるとサグが大きくなることからサグの影響は最も顕著に現れる。両端単純支持の場合や、集中質量を有するケーブルにおいても同様の傾向が見られる。

集中質量に着目して整理した固有振動数を表-4に示す。120gの集中質量がケーブルの1/10点に存在するとして計算を行った。計算値はサグの影響を考慮した両端固定支持の場合の固有振動数であり、()内は集中質量を有するケーブルと集中質量を持たないケーブルの固有振動数の比を百分率で示したものである。4次、5次モードな

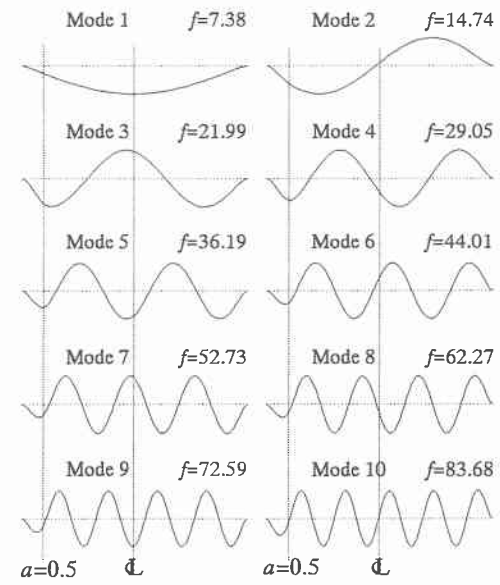


図-2 固有振動モード

(両端固定支持、 $T=1000\text{N}$ 、 $l=5.0\text{m}$ 、 $a=0.5\text{m}$ 、 $M=120\text{g}$)

表-1 丸鋼の諸元

密度	$7.85 \times 10^3 \text{kg/m}^3$
ヤング係数	$2.06 \times 10^{11} \text{N/m}^2$
半径	5.69mm

表-2 境界条件に着目した固有振動数の比較

(Hz)

$T(\text{N})$		1000			4000			1000			4000		
$l(\text{m})$		5			5			20			20		
ξ		48.56			97.13			194.26			388.51		
境界条件		単純	固定	(%)	単純	固定	(%)	単純	固定	(%)	単純	固定	(%)
モード次数	1	7.09	7.40	(4.13)	14.16	14.46	(2.06)	1.77	1.79	(1.04)	3.54	3.56	(0.53)
	2	14.27	14.89	(4.13)	28.37	28.97	(2.06)	3.54	3.58	(1.04)	7.08	7.12	(0.51)
	3	21.63	22.56	(4.14)	42.67	43.57	(2.06)	5.31	5.37	(1.03)	10.62	10.68	(0.52)
	4	29.24	30.51	(4.14)	57.10	58.30	(2.06)	10.67	10.78	(1.03)	14.16	14.24	(0.51)
	5	37.19	38.80	(4.14)	71.70	73.21	(2.07)	12.47	12.60	(1.03)	17.71	17.80	(0.52)
	6	45.55	47.52	(4.14)	86.52	88.35	(2.07)	14.27	14.42	(1.03)	21.26	21.37	(0.52)
	7	54.39	56.73	(4.13)	101.60	103.75	(2.07)	16.09	16.26	(1.03)	24.81	24.94	(0.52)
	8	63.76	66.49	(4.11)	116.98	119.45	(2.07)	17.92	18.11	(1.03)	28.37	28.52	(0.52)
	9	73.71	76.85	(4.09)	132.69	135.50	(2.07)	19.77	19.98	(1.03)	31.94	32.10	(0.52)
	10	84.30	87.86	(4.05)	148.78	151.93	(2.08)	21.63	21.86	(1.03)	35.51	35.69	(0.52)

() : (固定の振動数 - 単純の振動数) / 固定の振動数 $\times 100(\%)$

表-3 サグに着目した固有振動数の比較(両端固定支持)

(Hz)

$T(\text{N})$		1000			1000			4000			4000		
$l(\text{m})$		5			20			5			20		
サグ		無視	考慮	(%)	無視	考慮	(%)	無視	考慮	(%)	無視	考慮	(%)
モード	1	7.40	7.54	(1.86)	1.77	2.27	(22.03)	14.16	14.17	(0.07)	3.54	3.56	(0.56)
	2	14.89	14.89	(0.00)	3.54	3.54	(0.00)	28.37	28.37	(0.00)	7.08	7.08	(0.00)
	3	22.56	22.57	(0.04)	5.31	5.34	(0.56)	42.67	42.67	(0.00)	10.62	10.62	(0.00)
	4	30.51	30.51	(0.00)	10.67	10.67	(0.00)	57.10	57.10	(0.00)	14.16	14.16	(0.00)
	5	38.80	38.80	(0.00)	12.47	12.47	(0.00)	71.70	71.70	(0.00)	17.71	17.71	(0.00)

() : (サグ考慮の振動数 - サグ無視の振動数) / サグ考慮の振動数 $\times 100(\%)$

表-4 集中質量に着目した固有振動数の比較

(Hz)

T (N)		1000			4000			1000			4000		
l (m)		5			5			20			20		
a (m)		0.5			0.5			2			2		
M (g)		120			120			120			120		
モード 次数	1	7.54	7.47	(0.88)	14.47	14.31	(1.06)	2.31	2.31	(0.25)	3.58	3.57	(0.28)
	2	14.89	14.33	(3.76)	28.97	27.67	(4.48)	3.58	3.55	(1.00)	7.12	7.04	(1.07)
	3	22.57	20.86	(7.56)	43.57	39.86	(8.50)	5.39	5.28	(2.04)	10.68	10.45	(2.08)
	4	30.51	27.81	(8.86)	58.30	52.96	(9.16)	7.18	6.98	(2.70)	14.24	13.84	(2.77)
	5	38.80	35.79	(7.76)	73.21	67.72	(7.50)	8.98	8.73	(2.83)	17.80	17.30	(2.80)
	6	47.52	44.66	(6.03)	88.35	83.48	(5.51)	10.79	10.53	(2.38)	21.37	20.88	(2.30)
	7	56.73	54.26	(4.36)	103.75	99.84	(3.76)	12.61	12.39	(1.70)	24.94	24.55	(1.59)
	8	66.49	64.56	(2.91)	119.45	116.68	(2.32)	14.43	14.29	(1.00)	28.52	28.27	(0.88)
	9	76.85	75.56	(1.68)	135.50	133.93	(1.16)	16.27	16.20	(0.41)	32.10	32.00	(0.31)
	10	87.86	87.25	(0.69)	151.93	151.46	(0.31)	18.12	18.11	(0.05)	35.69	35.69	(0.01)

() : (質量なしの振動数 - 質量ありの振動数) / 質量なしの振動数 $\times 100(\%)$

ど集中質量のある点がモード形状の腹に近い場合集中質量の影響は大きくなり、1次、10次モードなど集中質量が節に近くなると影響が小さくなることがわかる。張力が大きくなることによって集中質量が固有振動数に与える影響はあまり変化しないが、ケーブルが長くなるとケーブル全体の質量に対して集中質量が相対的に小さくなることから、集中質量が固有振動数に与える影響は小さくなる。初期形状に集中質量が影響しないと仮定したのでサグを無視した場合も同様の傾向が見られる。

傾斜角に着目して整理した固有振動数を表-5に示す。計算値は、サグ、集中質量ともに考慮した両端固定支持のケーブルの固有振動数である。集中質量の影響を自重のケーブル方向成分 $w \sin \theta$ を無視し、自重 $w \cos \theta$ を受ける水平なケーブルとして考えていることから、傾斜角が大きくなるにつれてサグの影響が小さくなり、サグを無視した場合の固有振動数に近付いていることがわかる。

4. あとがき

本研究では比較的短いケーブルを対象として、振動数方程式を導き、境界条件、サグ、集中質量、傾斜がケーブルの固有振動数にどのように影響するかについて調べた。ケーブルが短く張力が小さい場合には境界条件が大きく影響し、サグの影響は1次、3次モードにおいて見られた。ケーブルが長くなると境界条件の影響は小さくなるが、サグの影響は大きくなる。張力が大きくなると境界条件、サグともに影響は小さくなる。集中質量を有するケーブルの固有振動数は、集中質量を持たないケーブルの固有振動数と比べて張力の変化による差はあまりない。ケーブルが長くなるとケーブル全体の質量に対する集中質量の比が小さくなることから、集中質量の影響は小さくなる。また、集中質量がモード形状の腹に近いモードでは大きく、節に近いモードでは小さくなる。ケーブルの傾斜が大きくなるとサグの影響は小さくなり、水平なケーブルの固有振動数に近づく。

複数のモードの固有振動数を用いてケーブルの曲げ剛性、張力を同定する場合、本研究で対象としたような比較的短く、集中質量を有するようなケーブルでは適切な振動数方程式を用いることで、より精度の良い同定が行えると考えられる。

表-5 傾斜角に着目した固有振動数の比較 (Hz)

T (N)		1000				
l (m)		5				
傾斜角		0°	30°	45°	60°	サグ 無視
モード	1	7.54	7.50	7.47	7.43	7.40
	2	14.89	14.89	14.89	14.89	14.89
	3	22.57	22.57	22.56	22.56	22.56
	4	30.51	30.51	30.51	30.51	30.51
	5	38.80	38.80	38.80	38.80	38.80

参考文献

- 1) 新家 徹・広中邦汎・頭井 洋・西村春久：振動法によるケーブル張力の实用算定式について、土木学会論文報告集、第294号、pp.25-32、1980.2.
- 2) 島田忠幸：ケーブルの高次振動モードの固有振動数測定値からの張力推定法について、土木学会論文集、第501号/I-29、pp.163-171、1994.10.
- 3) 山口宏樹・宮田利雄・伊藤 学：曲げ剛性を考慮したケーブルの面内線形自由振動、土木学会論文報告集、第319号、pp.13-19、1982.3.
- 4) 島田忠幸・西村 昭：振動法によるケーブル張力測定値への曲げ剛性の影響、土木学会論文集、第398号、pp.314-318、1988.10.
- 5) 山極伊知郎・宇津野秀夫・菅野直紀・杉井謙一：振動法によるケーブル曲げ剛性と張力の同時推定法、構造工学論文集、Vol.42A、pp.547-554、1996.3.
- 6) 林川俊郎・目時政紀・及川昭夫・小幡卓司：集中質量を有するケーブルのGAによる構造同定について、土木学会北海道支部論文集、第56号(A)、pp.54-57、2000.2.
- 7) 濱崎義弘・頭井 洋・波田凱夫・新家 徹：拡張カルマンフィルタによるケーブル張力と曲げ剛性の同時同定、鋼構造年次論文報告集、第7巻、pp.587-594、1999.11.
- 8) 土木学会：鋼斜張橋－技術とその変遷－、鋼構造シリーズ5、1990.
- 9) 山極伊知郎・宇津野秀夫・遠藤浩司・杉井謙一：振動伝達関数法によるケーブル張力と曲げ剛性の同時推定法、構造工学論文集、Vol.44A、pp.853-860、1998.3.