

非対称支間長を有する吊橋の三成分固有振動解析

Free Vertical, Torsional and Lateral Vibration Analyses of Asymmetrical Suspension Bridges Based on Deflection Theory

北海道大学大学院工学研究科
北海道大学大学院工学研究科
北海道大学大学院工学研究科

F 会員
○学生員
F 会員

林川俊郎(Toshiro HAYASHIKAWA)
化 鍾福(Fa Chong Pok)
佐藤浩一(Koichi SATO)

1.はじめに

吊橋は他の橋梁形式に比べて剛性が比較的低いため、風荷重、地震荷重および列車走行荷重などの外部荷重に対して影響を受けやすく、常に振動しやすいという特徴を持っている。そのため、吊橋の建設に当たっては、動的外力に対する安全性を検討する必要がある、その最も基本となる吊橋の固有振動数を正確に求めることが重要である。

これらの動力学的な諸問題を解明するためには、吊橋の固有振動性状を明確に知る必要がある。吊橋はケーブル、塔、補剛桁および吊材などよりなる複合構造物であるから、その固有振動性状は非常に複雑である。厳密に吊橋の自由振動を考えると、ケーブルは空間曲線をなし、補剛桁も最初からキャンバーを持っているため、ねじり変位と水平曲げ変位が連成することになる。さらに、補剛桁の断面変形としては、鉛直曲げたわみ(Vertical deformation)、ねじり(Torsional deformation)および水平曲げたわみ(Lateral deformation)があり、それらはお互いに連成し独立しては起こり得ない。つまり、厳密には鉛直曲げたわみ、ねじりおよび水平曲げたわみの連成を考慮した非線形自由振動解析を行う必要がある。しかし、微小変位を対象とする場合には実用上、連成振動による影響は無視してよいと考えられる¹⁾。つまり、鉛直、水平曲げおよびねじり振動をそれぞれ1つの独立した振動系として取り扱い、三成分固有振動解析を行っても差し支えないと考えられる。

吊橋の固有振動解析として、Bleich ら²⁾は境界条件を満足する近似関数を用いたエネルギー法による解析を示している。また、高橋ら³⁾は連成を考慮した吊橋の基礎微分方程式を最小ポテンシャルエ

ネルギー原理を適用して導き、Galernkin 法によりその解を求めている。80 年代、Abdel-Gaffar⁴⁻⁷⁾は鉛直曲げたわみ、ねじりおよび水平曲げたわみ、3つの振動系に対し有限要素法を用いて定式化を行い、運動の基礎微分方程式を誘導し、さらに計算値と振動実験結果との比較により、その妥当性を示している。

吊橋の固有振動解析には、簡便性のある撓度理論に基づく計算方法が用いられ、吊橋の動的設計に広く使用されている。従来、撓度理論に基づいた吊橋の固有振動解析は、側径間の支間長が等しい2ヒンジ対称吊橋について研究されてきた^{1,4-7)}。しかし、架設位置における地形条件や地盤条件により、吊橋の径間割りは必ずしも対称とはならない場合がある。最近の建設事例としては広島県の安芸灘大橋⁸⁾や香港の青馬大橋⁹⁾などが挙げられる。

そこで、本研究の目的は左右非対称の支間を有する3径間2ヒンジ吊橋を対象として、簡便性のある撓度理論による三成分固有振動解析の適用性について考察することである。具体的には、起振機加振および常時微動振動測定により水平曲げ振動およびねじり振動に対する実験結果が得られた安芸灘大橋を対象として、数値計算を行う。さらに、鉛直曲げ振動については、立体骨組(魚骨モデル)を用いた固有振動解析結果と比較検討することにより、その解の妥当性について考察する。

2.撓度理論による固有振動解析

解析の対象とした3径間2ヒンジ形式安芸灘大橋の側面図を図-1に示す。

鉛直変位、水平変位およびねじり変位が連成せ

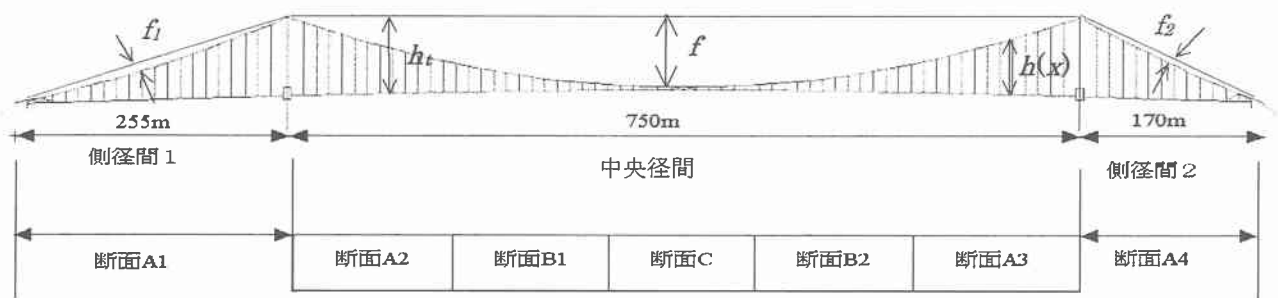


図-1 安芸灘大橋側面図

ず、つまり独立に生じるという仮定のもとで、Hamilton 原理により、吊橋の自由振動に関する運動方程式が以下のように導かれる。

(1)鉛直曲げ振動

$$m_s \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + E_s I_{vs} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - 2H_w \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2H_{pv} \frac{w}{H_w} = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{L_c}{E_c A_c} H_{pv} - \sum_{i=1}^n \frac{w}{H_w} \int_0^{l_i} v dx = 0 \tag{1b}$$

$$\frac{L_c}{E_c A_c} H_{pv} - \sum_{i=1}^n \frac{w}{H_w} \int_0^{l_i} v dx = \delta_i^t + \delta_i^r \tag{1c}$$

ここで、 $E_s I_{vs}$ は鉛直曲げ剛性、 v は補剛桁の鉛直変位、 w は補剛桁とケーブル死荷重の和、 H_w は死荷重によるケーブルの水平張力であり、 L_c はケーブルの水平投影長、 E_c はケーブルの弾性係数、 A_c はケーブルの断面積である。また、 H_{pv} は活荷重あるいは振動による水平付加張力である。式(1b)、(1c)はそれぞれの塔頂のケーブル結合状態がローラー結合、ヒンジ結合を表す。つまり、ローラー結合は、側径間と中央径間のケーブルの水平付加張力が等しい場合であり、ヒンジ結合は各径間によってケーブルの水平付加張力が異なる場合である。

(2)ねじり振動

$$I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + E_s I_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2H_{p\theta} \frac{bw}{H_w} = 0 \tag{2a}$$

$$I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + E_s I_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \left(G_s J_s + \frac{b^2}{2} H_w \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2H_{p\theta} \frac{bw}{H_w} + w_s d \theta = 0 \tag{2b}$$

$$\frac{L_c}{E_c A_c} H_{p\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{wb}{2H_w} \int_0^{l_i} \theta dx = 0 \tag{2c}$$

$$\frac{L_c}{E_c A_c} H_{p\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{wb}{2H_w} \int_0^{l_i} \theta dx = \delta_i^t + \delta_i^r \tag{2d}$$

ここで、 I_m は極慣性モーメント、 $E_s I_w$ はそりねじり剛性、 $G_s J_s$ はねじり剛性、 b は補剛桁の幅、 θ は補剛桁のねじり角である。式(2a)、(2b)それぞれは重力剛性を無視した場合と考慮した場合の運動方程式である。重力剛性とは、吊橋の補剛桁が重心位置で吊られていないことによるもので、ねじり変位に対する桁自重の復元力のことである。塔頂のケーブル結合条件は鉛直振動と同様である。

(3)水平曲げ振動

$$m_c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2H_w \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - w_s \left(\frac{u-v}{h(x)} \right) + (w_s + w_c) \frac{v}{y_c(x)} = 0 \tag{3a}$$

$$m_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + E_s I_{hs} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + w_s \left(\frac{u-v}{h(x)} \right) = 0 \tag{3b}$$

ここで、 $E_s I_{hs}$ は水平曲げ剛性、 $y_c(x)$ はケーブルのたわみ曲線、 $h(x)$ はハンガーの長さである。式(3a)はケーブル、式(3b)は補剛桁の運動方程式を示す。また、 u 補剛桁の水平変位、 v はケーブルの水平変位を表す。また、 w_s は補剛桁、 w_c はケーブルの死荷重である。

3.数値計算結果

数値計算に必要な断面諸元を表-1 に示す。なお、安芸灘大橋の中央径間は図-1 に示すように、板厚

表-1 断面諸元

(1)補剛桁 (1/Bridge)

	単位	側径間 1	中央径間	側径間 2
E_s	t/m ²	2.1*10 ⁷	2.1*10 ⁷	2.1*10 ⁷
G_s	t/m ²	8.1*10 ⁶	8.1*10 ⁶	8.1*10 ⁶
L	m	255	750	170
f	m	7.935	74	3.568
W_s	t/m	13.230	13.256	13.576
J_s	m ⁴	1.795	1.829	1.759
I_{vs}	m ⁴	14.095	14.636	14.095
I_{hs}	m ⁴	0.711	0.718	0.711
A_s	m ²	0.589	0.598	0.589
I_w	m ⁶	574.269	585.146	574.269
I_p	t/sec ²	43.90	44.73	44.90
b	m	16	16	16
d	m	2.380	2.380	2.380

(2) ケーブル (1/Cable)

E_c	t/m ²	2.03*10 ⁷	2.03*10 ⁷	2.03*10 ⁷
W_c	t/m	2.658	2.782	2.716
A_c	m ²	0.1354	0.1354	0.1406

(3)塔 (1/Cable)

E_t	t/m ²	2.1*10 ⁷	2.1*10 ⁷	2.1*10 ⁷
I_t	m ⁴	3.32	3.32	3.32
h_T	m	121.385	121.385	121.385

が変化する箱形変断面である。ここでは、計算の便宜上、断面剛性を各部材長に応じて平均化した換算等価剛性を用いている。

3 次元骨組モデル(魚骨モデル)を用いた有限要素法(FEM)による解析結果、および現場振動測定により得られた実験値との比較について以下に述べる。なお、有限要素法(FEM)による解析結果は、要素数 916、節点数 612 を用いている。

3.1 鉛直曲げ振動の結果

表-1 に示した断面諸元を用いて、補剛桁の支持条件は単純支持、塔頂のケーブルの結合状態はローラー結合(Roller)とヒンジ結合(Hinge)の場合について鉛直曲げ固有振動解析を行った。その解析結果を表-2 示す。表-2 には 3 次元骨組モデルを用いた有限要素法(FEM)による解析結果を示し、そこで誤差をそれぞれ併記した。

以上の鉛直曲げ固有振動数の解析結果から次のようなことが分かった。塔頂におけるケーブルの結合状態の差異については、V2、V4 モードにおいて若干の差があり、高次のモードになるにつれ、ほとんどその差がないことが分かる。その原因としてはケーブルの死荷重による張力の H_w に比べて、付加張力である H_p の値が小さいためと

考えられる。さらに、式(1b)および式(1c)によるケーブル方程式から理解できるように、水平付加張力 H_p の影響は対称低次モードのみに現れたものと考えられる。各々の誤差を FEM(集中質量法)による計算結果と比較してみると、ローラー結合の場合が若干よい結果を与えている。

撓度理論により得られたローラー結合の場合における鉛直固有振動モードを1次から8次まで図-2 示す。ここで得られた固有振動モードは、FEM による固有振動モード形状とほぼ同じであることを確認している。

3.2 ねじり振動の結果

式(2a)および(2b)に示すように、重力剛性の影響を考慮しない、考慮する2通りの場合についてそれぞれ撓度理論によるねじり固有振動解析を行った。

塔頂の結合条件は鉛直曲げ振動の場合と同様にローラー結合とヒンジ結合について数値計算を行い、8 次モードまでの固有振動数(Hz)を表-3 に示す。ここで、数値計算結果との比較のため、FEM および実験値を表-3 に示す。なお、誤差(%)は実験値に対する比を意味している。

まず、ねじり固有振動解析結果から塔頂におけるケーブルの結合状態による差異はほとんど見受けられない。しかし、重力剛性を考慮した場合の固有振動の値は、無視した場合よりも大きいことが分かる。特に、低次モードにおいて両者の差異が大きいことが認められる。また、重力剛性を考慮したねじり振動解析結果は、実験値とよく一致していることが理解できる。

図-3 は重力剛性を考慮したローラー結合の場合における固有振動モードを示す。ここで、得られた第1次および第2次固有振動モードは振動測定により得られたモード形状とほぼ同じである。なお、FEM による第2次固有振動モード(T2)では、左右非対称の支間長を有する吊橋であることから、固有値の接近がみられ、重根が得られている。いずれにしろ、固有振動モード形状は同じであることを確認している。

3.3 水平曲げ振動の結果

吊橋の水平曲げ振動は、式(3a)と式(3b)に示すように連成振動問題となる。そこで、本研究では

表-2 鉛直曲げ固有振動数(Hz)

モード 次数	FEM (Hz)	撓度理論(Hz)		誤差 (Roller)	誤差 (Hinge)
		Roller	Hinge		
V1	0.131	0.134	0.134	2.29	2.29
V2	0.165	0.165	0.164	0	0.61
V3	0.215	0.213	0.213	0.93	0.93
V4	0.284	0.291	0.289	2.26	1.76
V5	0.302	0.299	0.299	0.99	0.99
V6	0.386	0.388	0.387	0.52	0.52
V7	0.411	0.414	0.414	0.73	0.73
V8	0.516	0.517	0.517	0.19	0.19
平均				0.99	1.00

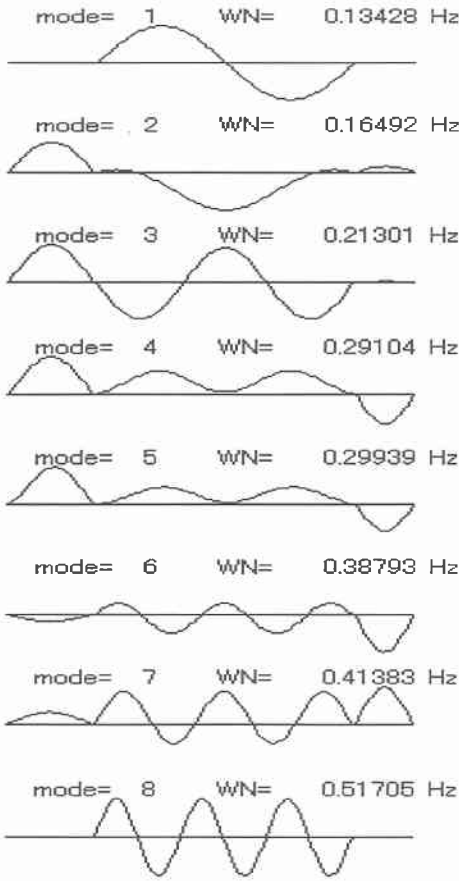


図-2 鉛直曲げ振動(ローラー結合)

表-3 ねじり固有振動数(Hz)

モード 次数	FEM	実験値	重力剛性無視		重力剛性考慮		誤差(無視)		誤差(考慮)	
			Roller	Hinge	Roller	Hinge	Roller	Hinge	Roller	Hinge
T1	0.527	0.536	0.519	0.519	0.531	0.531	3.17	3.17	0.93	0.93
T2	0.835	0.845	0.840	0.840	0.847	0.847	0.59	0.59	0.24	0.24
	0.855									
T3	•	•	1.307	1.307	1.312	1.312	•	•	•	•
T4	•	•	1.358	1.358	1.363	1.363	•	•	•	•
T5	•	•	1.817	1.817	1.820	1.820	•	•	•	•
T6	•	•	2.192	2.189	2.195	2.192	•	•	•	•
T7	•	•	2.392	2.392	2.394	2.394	•	•	•	•
T8	•	•	3.036	3.036	3.038	3.038	•	•	•	•
平均							1.88	1.88	0.59	0.59

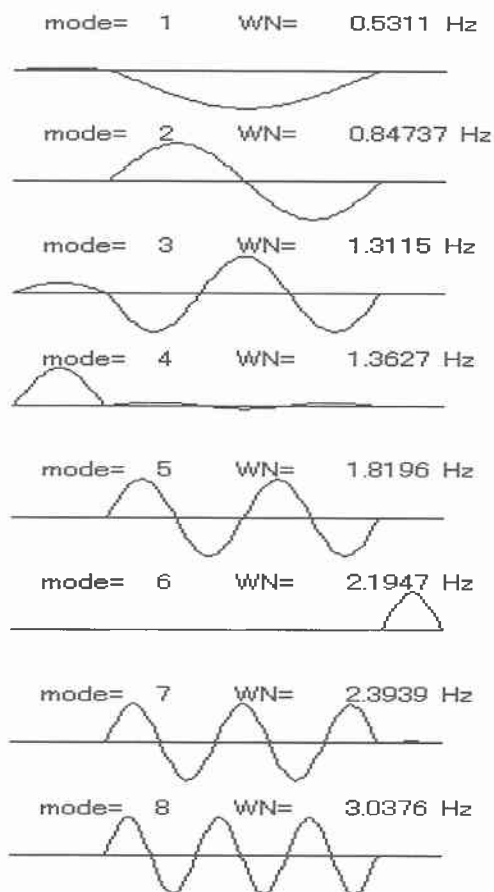


図-3 ねじり振動(重力剛性考慮)

中央径間のみに着目し、その水平曲げ振動解析を行った。得られた固有振動数と固有振動モードをそれぞれ表-4 および図-4 に示す。なお、図-4 に示す太い線は補剛桁、細い線はケーブルの振動振幅を表している。

撓度理論により得られた水平曲げ固有振動数は、鉛直曲げ振動およびねじり振動に比較して、やや大きな誤差を得た。この原因としては、中央径間のみに着目して固有振動解析しることによるものと考えられる。

4.まとめ

本研究は、撓度理論に基づき非対称支間長を有する吊橋の三成分固有振動解析について示した。数値計算により得られた固有振動数と有限要素法(FEM)および実験値との比較検討を行い、その適用性について考察した。

数値計算結果より、鉛直曲げ振動およびねじり振動においては、塔頂のケーブルの結合状態による差異はあまりないことが分かった。

有限要素法(FEM)による解析結果および実験結果との比較より、固有振動数と固有振動モードともかなり近い数値計算結果を得た。したがって、撓度理論に基づいた非対称支間を有する吊橋の三成分固有振動解析には十分な適用性があるものと考えられる。

表-4 水平曲げ固有振動数(Hz)

モード形状	FEM	実験値	撓度理論	誤差
H1	0.077	0.0777	0.0802	3.217
H2	0.225	0.224	0.212	5.36
H3	0.465	0.466	0.466	0
H4	*	*	0.826	*
平均				2.86

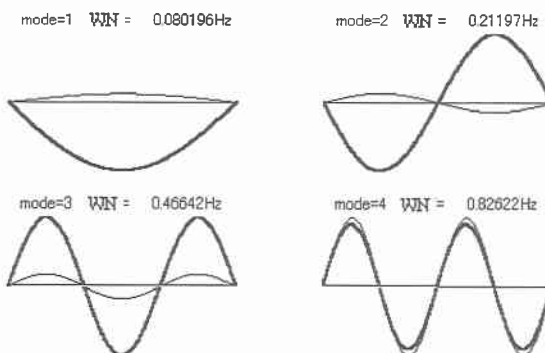


図-4 水平曲げ振動(中央径間)

参考文献

- 1) Hayashikawa, T., Watanabe, N., Vertical Vibration in Timoshenko Beam Suspension Bridge, Proc. of ASCE, Vol. 110, No. EM3, pp.341-356, 1984.
- 2) Bleich, F., et al., The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, U. S. Bureau of Public Roads, Government Printing Office, Washington, D. C., 1950.
- 3) 高橋和雄・室井智文・平野 徹：連成を考慮した吊橋の基礎微分方程式および風荷重を受けた場合への応用、土木学会論文報告集、第 227 号 pp.25-40, 1978.
- 4) Abdel-Ghaffar, A.M., Free Lateral Vibration of Suspension Bridges, ASCE, Vol. 104, No. ST3, pp.503-525, 1978.
- 5) Abdel-Ghaffar, A.M., Free Torsional Vibration of Suspension Bridges, ASCE, Vol. 105, No. ST4, pp.767-788, 1978.
- 6) Abdel-Ghaffar, A.M., Vertical Vibration Analysis of Suspension Bridges, ASCE, Vol. 106, No. ST10, pp.2053-2075, 1980.
- 7) Abdel-Ghaffar, A.M., Suspension Bridge Vibration Continuum Formulation, ACSE, Vol. 108, No. EM6, pp.1215-1232, 1982.
- 8) 西岡 直樹・鳥海 隆一・岡 清志・佐々木伸幸：安芸灘大橋の振動実験、土木学会第 55 回年次学術講演会、CDROM I -b104, 2000.
- 9) Wang, J. Y., Ko, J.M. and Ni, Y. Q., Advanced in Structural Dynamics, Participation of Local Modes in Seismic Response of Tsing Ma Suspension Bridge Vol. II pp.963-970, 2000.
- 10) 林川俊郎：橋梁工学, 朝倉書店, pp.17-18, 2000.