

動的システムの初通過確率における時間刻みの影響について

(株)地崎工業 土木部技術課 正会員 須藤 敦史
○(株)地崎工業 技術情報センター 正会員 渋谷 卓

1. はじめに

動的な信頼性解析は 1)初(閾値)通過問題と 2)累積損傷問題¹⁾に分類され、初通過問題は図-1 に示すように不規則外乱の下で応答値 $Z(t)$ が規定した閾値 λ を継続時間中に超過する確率(破壊確率)を定量的に求めるものであり、算出方法としては a) Fokker-Planck-Kolmogorov 方程式を初期値・境界値問題として直接解く方法²⁾と b) Level・Crossing 法³⁾がある。

a)Fokker-Planck-Kolmogorov 方程式を直接解く方法は、応答過程のマルコフ性を仮定して Stochastic Averaging 法²⁾により求めるが、システムが線形低自由度で入力ガウス性のホワイトノイズという特殊な場合のみ理論解が得られる。b)Level・Crossing 法は応答が poisson 過程の場合には有効な方法であるが、これ以外では異なる時間において変位・速度の同時確率密度関数または初期通過時間の同時確率密度関数が必要となるため、多自由度・非線形システムの初通過確率を正確に求めることは難しい。

そこで解析的に求める方法として Monte Carlo Simulation⁴⁾ (以下 MCS)が用いられているが、それでも膨大なサンプルが必要となるため、Double and Clump (D&C)⁵⁾, Russian Roulette and Splitting (RR&S)⁶⁾, Importance Sampling Method (ISM)⁷⁾などの効率化手法が提案されている。

一方、信用リスク(Credit Risk)や債務不履行(Default)確率や Life Cycle Cost(LCC)の Risk 分析においても、初通過確率が効率化 MCS などで求められている。

そこで本研究は初通過確率値の精度向上を目的として、D&Cの時間刻みによる影響を検討している。

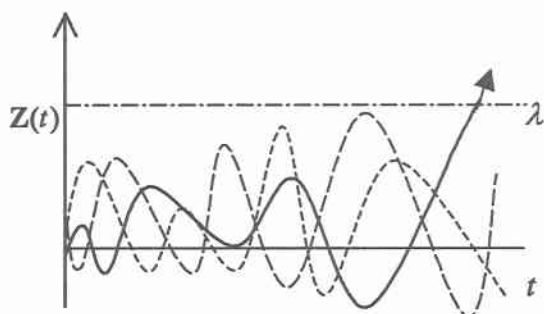


図-1 First Passage Probability

$$P_f(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I[Z_n(t)] \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I[Z_n(t)] \quad (1)$$

$$I[Z_n(t)] = \begin{cases} 1 & ; g(Z_n(t)) \leq 0, 0 \leq t \leq T \\ 0 & ; g(Z_n(t)) > 0, 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} Z_1(t_k) \\ Z_2(t_k) \\ \vdots \\ Z_i(t_k) \\ \vdots \\ Z_{nSim}(t_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t_k) \\ w_2(t_k) \\ \vdots \\ w_i(t_k) \\ \vdots \\ w_{nSim}(t_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t_k) \\ C_2(t_k) \\ \vdots \\ C_i(t_k) \\ \vdots \\ C_{nSim}(t_k) \end{pmatrix} \quad (2)$$

2. 効率化 Monte Carlo Simulation

MCS による初通過確率は式(1)に示すように応答値 $Z_n(t)$ が全継続時間 T 内に基準レベル $\lambda, -\lambda$ を超過する確率あり、不規則外乱を受ける多自由度システムの応答値は $Z_n(t) = [x_n(t), \dot{x}_n(t)]^T, n=1,2,\dots,N$ となる。

ここで $I[Z_n(t)]$:指標関数, $g(Z_n(t))$:システムの性能関数, N :サンプル数, またサンプルが多ければ初通過確率 $P_f(T)$ は不偏推定値となるが、正確に求めるには多くのサンプル(多大な計算時間)を要するため、MCSの効率化が必要となる。

3. D&C(Double and Clump)の概要

D&C は破壊基準レベル $\lambda, -\lambda$ に対して不規則外乱を $nSim$ 組サンプリングして動的応答解析を行う。

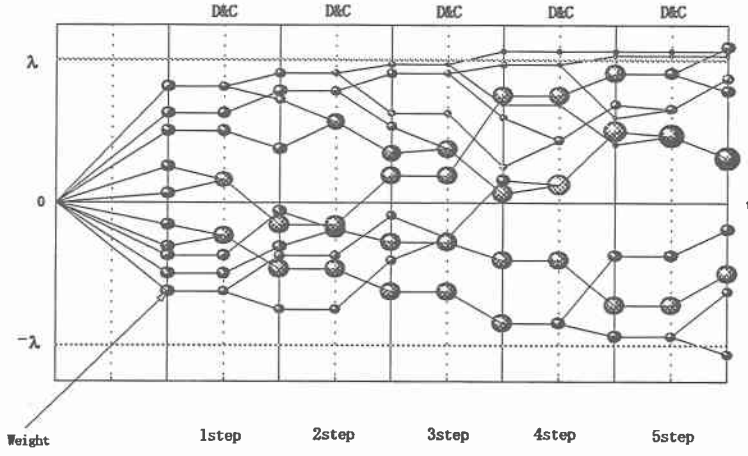


図-2 D&C Procedure

$$C_{j,1}(t_k) \leq C_{j,2}(t_k) \leq \dots \leq C_{j,nSim}(t_k) \quad j=1,2,\dots,nSim \quad (3)$$

ここで選定基準の上位 M 個(サンプル総数の 20%以下)を $2M$ 個に増加(Doubling)させ,同時にサンプル $nSim$ 個を維持するように選定基準の小さい $2M$ 個を M 個に減少(Clumping)させる.(図-2 参照)これにより,基準レベルの通過確率が高いサンプルを増加させることで,効率的かつ正確に初通過確率を算定する方法である.

4. 統計量の修正

上記の操作ではサンプル全体の統計量が歪むため, Doubling したサンプルの重みは $1/2$ に減少させ, Clumping したサンプルの重みは Clumping 以前に保有していた重みの和とする.

$$w_{k,nSim-M+1}^{(t_k)} \Rightarrow \frac{1}{2} w_{k,nSim-M+1}^{1(t_k+1)}, \frac{1}{2} w_{k,nSim-M+1}^{2(t_k+1)} \quad (4), \quad w_{k,M}(t_k+1) = w_{k,2M-1}(t_k) + w_{k,2M}(t_k) \quad (5)$$

$nSim-M+1(M \rightarrow 2M)$: Doubling 個数, $M(2M \rightarrow M)$: Clumping 個数, t_{k+1} : 時間ステップ

したがって, 重みの変更後の初通過確率は式(6)となるが不十分である. そこでサンプル全体の統計量に影響を与えないサンプルの組み合わせ基準として式(7)に示す正規化した距離を用いる.

$$P_f(T) = CDF(T) = \sum_{n=1}^{nSim} I[Z_n(T)] \cdot w_n(T) \quad (6), \quad d_{j1,j2}(t_k) = \sqrt{\sum_{m=1}^{nState} (Y_{j1,m}(t_k) - Y_{j2,m}(t_k))^2} \rightarrow \min \quad (7)$$

$w_n(T)$: 全時刻 T の各重み

$$Y_{j,m}(t_k) = \frac{Z_{j,m}(t_k) - \hat{z}_m(t_k)}{\sigma_m(t_k)} \cdot q(m)$$

m : ベクトル構成要素, $j1, j2$: 異なるサンプル実現値,
 $\sigma_m(t_k)$: 残存サンプル標準偏差, $\hat{z}_m(t_k)$: 残存サンプル平均値,
 $q(m)$: 相対的重要度 ($q(m)=1, m=1,2,\dots,nState$)

5. サンプルの選定

D&Cでは, GA⁸⁾と同様に選定基準が効率化の良否を決めるため, 以下のような選定基準を設定する. ここで絶対応答変位(破壊基準レベルまでの距離)を基準 1, 絶対変位と速度勾配を基準 2 とする.

$$C_n(t_k) = |z_n(t_k)| \quad n=1,2,\dots,nSim \quad (8), \quad C_n(t_k) = \left| a \cdot \left(\frac{x_n(t_k)}{\sigma_{x(t_k)}} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{\dot{x}_n(t_k)}{\sigma_{\dot{x}(t_k)}} \right)^2 \right| \cdot w_n(t_k)^p, \quad n=1,2,\dots,nSim \quad (9)$$

$z_n(t_k)$: 応答変位, $\dot{z}_n(t_k)$: 応答速度, $\sigma_{x(t_k)}$: 残存サンプル応答変位の標準偏差,

$\sigma_{\dot{x}(t_k)}$: 残存サンプル応答速度の標準偏差, $a = \begin{cases} 1; x_n(t_k) > 0 \\ -1; x_n(t_k) < 0 \end{cases}, \quad b = \begin{cases} 1; \dot{x}_n(t_k) > 0 \\ -1; \dot{x}_n(t_k) < 0 \end{cases}$

また, 式(9)では $w_n(t_k)$; 時刻 t_k における各重み, 変数 a, b は変位・速度の方向を表している.

各時間ステップ t_k における応答値

$Z_n(t_k), n=1,2,\dots,nSim$ は, Markov 性を示すものとし, 重み $w_n(t_k)$ および選定基準 $C_n(t_k)$ を式(2)とする.

ここで $w_n(t_k)$: 重み (初期値 $w_n(0)=1/nSim, n=1,2,\dots,nSim$), $C_n(t_k)$: 選定基準値である.

次に $nSim$ 組の応答値 $Z_n(t)$ が基準

レベル $\lambda, -\lambda$ を通過する可能性を大きい順に並び替える.

ここで、 $\beta=0.1\sim0.5$ と設定しており、 β が大きければ評価値は大きくなる。

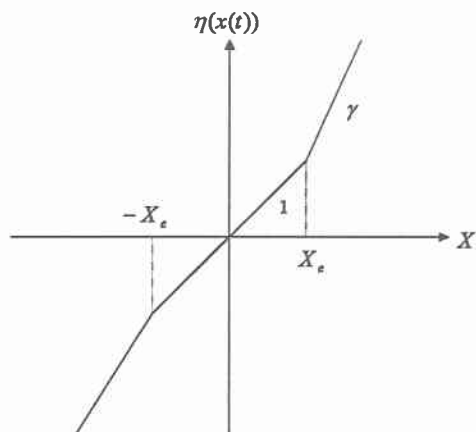


図-3 バイリニアモデル

4. 数値解析

式(10)に示すバイリニア系モデルの振動方程式により初通過確率をD&Cにより算定する。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\eta(x(t)) = -mF(t) \quad (10)$$

$$\eta(x(t)) = \begin{cases} x(t); & |x(t)| < X_e \\ \gamma x(t) - X_e; & |x(t)| < X_e \cap x(t) \geq 0 \\ \gamma x(t) + X_e; & |x(t)| < X_e \cap x(t) < 0 \end{cases}$$

ここで、減衰定数(β_s); 0.05, 固有円振動数(ω_s); 7.07 (rad/sec), $X_e=3.0$ (cm), $\gamma=2.0$, $F(t)$ は $\omega_1=0\text{Hz}$, $\omega_u=10\text{Hz}$ ($\approx 62.8\text{rad/sec}$) の

応答波形が設定した安全レベルを超過するには、D&C 手法を用いたとしても必ずある一定の時間を必要とする。



時間刻みを小さくしたことにより、状態量の単位時間刻みの変化量が小さくなる。



時間刻みと同じステップでD&Cを行ってもサンプルの単位変化量が微小なために効率化が図れない。また安全レベルを超過したサンプルの重みは正確な破壊確率を与えない。

表-1 検討フロー

周波数帯域をもつホワイトノイズで標準偏差は 100gal (=cm/sec²) である。

この条件で全継続時間 $T=10(\text{sec})$, 時間刻み $\Delta t=0.01(\text{sec})$ および $0.1(\text{sec})$ の計 1000step で応答解析を行う, また MCS の計算回数は 10 万回とした。

ここで、応答解析の時刻と D&C における時間ステップとの間には表-1 のような問題が生じる。

したがって、どの程度のステップ間隔を用いるべきかを検討する。ここで基準レベルを超過しない範囲において、時間ステップを変化させた応答解析で応答変位の標準偏差を求め、標準解析のときの標準偏差と比較する。

ここで判定には基準 2 を用い、重みの変動範囲をある程度制限する。また基準 2 における β 値を 0.1~0.5 間で 0.1 ずつ変化させて標準偏差を比較した結果を図-4 に示す。

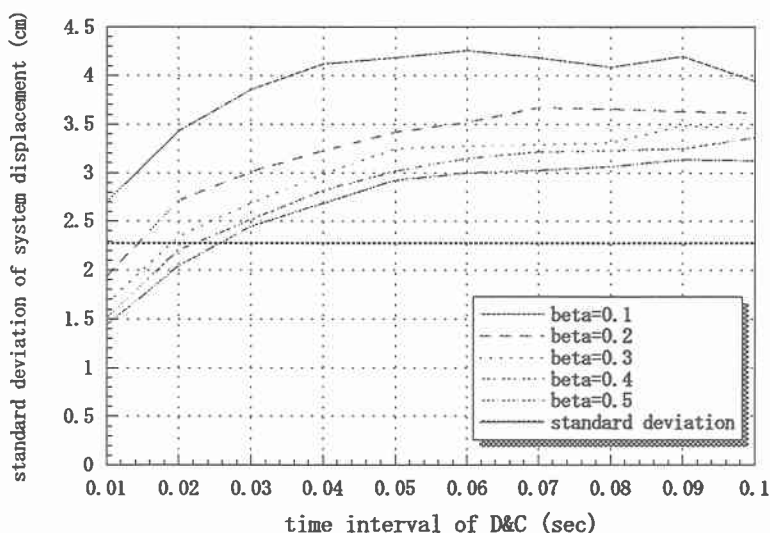


図-4 β 値とステップ間隔別の標準偏差の比較

図-4 より、標準偏差が大きい $\beta=0.1$ の場合の方が応答値が基準を通過確率は大きくなる。

また $\beta=0.1$ の時において D&C を行うステップ間隔別の標準偏差を比較したものを図-5 に示す。

図-5 より、標準偏差が安定する時間ステップ 0.07(sec) が D&C では最適な時間間隔であると言える。

以上の検討結果より、D&C により動的な初通過確率の算定を行う。

ここで比率 $L=20\%$ とし、サンプル 3000 で D&C 解析を行い、各レベルの破壊確率を算定した結果を図-6 に示す。

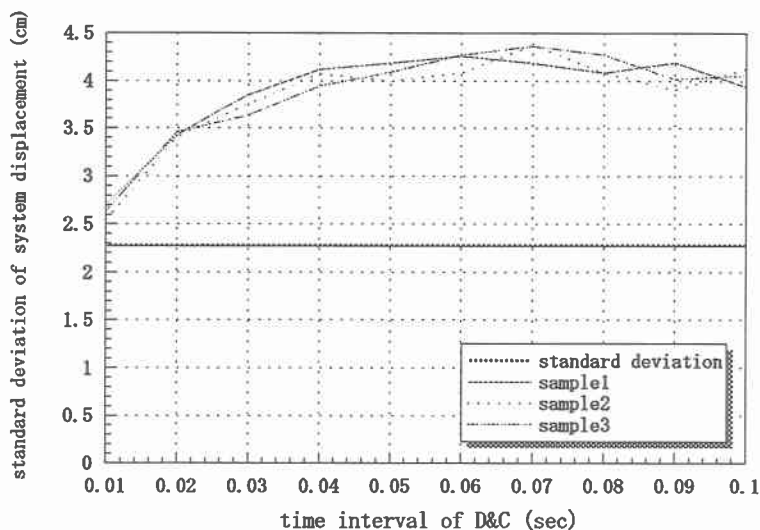


図-5 ステップ間隔と標準偏差の比較 ($\beta=0.1$)

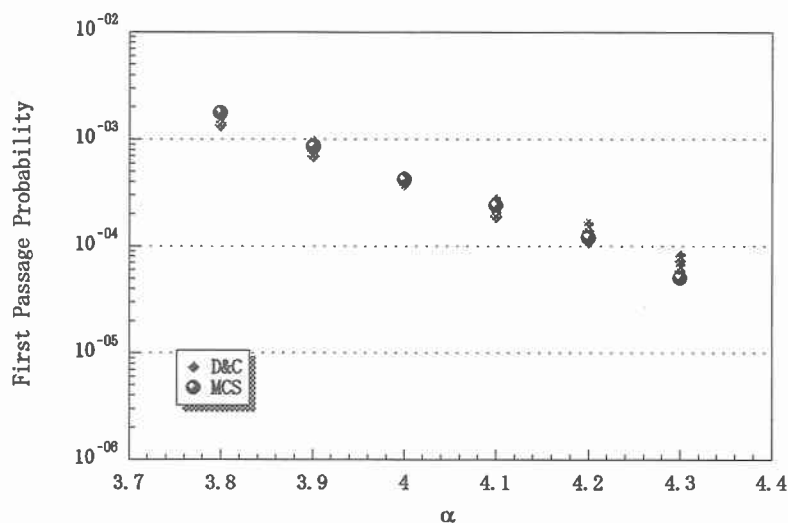


図-6 各レベルの破壊確率

ここで、 α は基準レベルが応答変位の標準偏差に対する倍率(離れ)であり、 α が大きい程初通過確率は小さい値を示す。

図-6 より、サンプルサイズを 3000 の D&C の解析で得られた初通過確率は計算回数は 10 万回の MCS とほぼ同程度の確率が得られている。

しかし、 10^{-4} 以下の初通過確率では算定誤差が大きくなっており、今後 D&C のさらなる改良が必要である。

6. 結 論

動的なシステムの初期通過確率を正確に算定することは、信頼性を定量的に評価する上で非常に重要なことである。

加えて、最近では金融工学や構造物の性能設計や事業評価において初期通過確率が指標の一つとなってきた。

そこで本研究では、D&C による効率化 Monte Carlo Simulation と MCS により求めた初期通過確率を比較することで D&C の有効性を示すと共に、システムの応答解析と D&C 解析における

安定した時間刻みを求めることができた。

参考文献

- 1) 持尾隆士: 荷重組合せを考慮した履歴系構造物の疲労損傷評価, JCOSSAR'95, Vol.3, pp.269-276, 1995.
- 2) Lin, Y.K. and Cai, G.Q.: Probabilistic Structural Dynamics, Advanced Theory and Applications, McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.
- 3) Rice, S.O.: Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover, pp.133-294, 1954.
- 4) Rubinstein, R.Y.: Simulation and Monte Carlo Method, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- 5) Pradlwarter, H.J., Schueller, G.I., and P.M. Melnikov: Reliability of MDOF-Systems, J. Probabilistic Engineering Mechanics, pp. 235-243, 1994.
- 6) Pradlwarter, H.J.: A Selective MC Simulation Technique for Nonlinear Structural Reliability Assessment, Proc. ASCE Specialty Conference, pp.451-454, 1992.
- 7) Bayer, V. and Bucher, C.: An Importance Sampling Procedure For First Passage Problem, Proc. of ICOSAR, Kyoto, 1997.
- 8) Goldberg, D.E.: Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning, Addison-Wesley, 1983.