

流体を考慮した片持ちばりの自由振動解析

Free vibration analysis of cantilever considering fluid

北海道大学大学院工学研究科 ○フェロ— 三上 隆 (Takashi Mikami)

北海道大学工学部土木工学科

飯田 譲 (Yuzuru Iida)

北海道大学大学院工学研究科

正員 蟹江 俊二 (Shunji Kanie)

北海道大学大学院工学研究科

正員 小池 明夫 (Akio Koike)

1. まえがき

構造物の振動は、それが空中や水中、さらには土中にあるかどうかによりその挙動は異なる。一般に構造物が流体中にある場合には、その影響を付加質量や付加質量係数で評価しており、文献1)では流体-構造物について、液高と構造物の高さが等しい場合の固有値を求めている。

本論文では、橋脚のような水中にある円柱構造物を片持ちばりにモデル化し、液面で断面の変化があるかどうかにより、振動特性にどのような影響を与えるかを固有値、固有振動モードおよび動圧力について検討し、流体の影響を付加質量係数で評価した。なお、流体は非圧縮性・非粘性で渦なし運動をするものと仮定した。

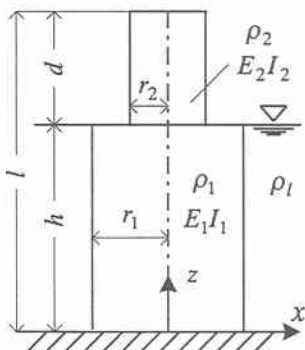


圖-1 流体—構造系

2. 連成自由振動解析

図-1 に示すような流体—構造系について考える.

(1) 速度ポテンシャル

渦なし運動をする流体を仮定した場合には速度ポテンシャル $\Phi(r, \theta, z, t)$ が存在し、非圧縮性流体の円筒座標での波動方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

また，流体の境界条件と放射条件，はりと流体との連成条件はそれぞれ次のように表される．

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \Phi|_{z=h} = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \cos \theta \quad ; \quad r = r_1 \quad (4)$$

また, 任意の時間 t での流体中のはりの変位 $u_1(z, t)$ を次のように仮定する.

$$u_1(z, t) = U_1(z)e^{i\omega t} \quad (5)$$

ここに、 ω は流体-構造系の固有円振動数、 i は虚数単位である。

速度ポテンシャル Φ は $\Phi = R(r)\Theta(\theta)Z(z)e^{i\alpha t}$ と変数分離すれば、式(1)および式(2)~(4)より次のように得られる。

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i\omega}{\mu_n K_1'(\alpha_n r_1)} K_1(\alpha_n r) \cos\theta \cos\alpha_n z e^{i\omega x} \int_0^h \mu_1(\xi) \cos\alpha_n \xi d\xi \\ \alpha_n &= \mu_n / h, \quad \mu_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)\end{aligned}\quad (6)$$

ここに, K_m は次数 m の第一種変形 Bessel 関数^{2,3)}, K'_m は r に関する一階微分である.

(2) はりの運動方程式および固有振動数方程式

動圧力を考慮すると，流体中のはりの運動方程式は次のような微積分方程式で表される。

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + m_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \rho_l r_1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cos \theta d\theta \quad ; \quad r = r_1 \quad (7)$$

ここに、 E_1 、 I_1 、 m_1 はそれぞれ流体中のはりのヤング係数、断面二次モーメント、単位長さ当りの質量であり、 ρ_f は流体の密度を表す。また、流体中のはりの変位を上式に代入し解を求めれば次のようになる。

$$U_1(z) = C_1 \cos \beta_1 z + C_2 \sin \beta_1 z + C_3 \cosh \beta_1 z + C_4 \sinh \beta_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} F_n (C_1 J_1 + C_2 J_2 + C_3 J_3 + C_4 J_4) \cos \alpha_n z \quad (8)$$

ここに, $C_1 \sim C_4$ は積分定数,

$$\beta_1^4 = \frac{m_1 \omega^2}{E_1 I_1}, \quad F_n = \frac{D_n}{1 - D_n/2} \quad (9)$$

$$D_n = \frac{4\pi\rho_l r_1 h}{m_1} \frac{(\beta_1 h)^4}{\mu_n^4 - (\beta_1 h)^4} \frac{K_1(\alpha_n r_1)}{\mu_n (K_0(\alpha_n r_1) + K_2(\alpha_n r_1))}$$

である。記号 $J_1 \sim J_4$ の説明については紙面の都合上省略した。

次に、空中にあるはりの運動方程式は次のようになる。

$$E_2 I_2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4} + m_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

ここに、 E_2 、 I_2 、 m_2 はそれぞれ空中のはりのヤング係数、断面二次モーメント、単位長さ当りの質量である。空中でののはりの変位 $u_2(z, t)$ を次のように仮定する。

$$u_2(z, t) = U_2(z)e^{i\omega t} \quad (11)$$

表-1 固有値

r_2/r_1	r_1/h	固有値 λ			
		mode1	mode2	mode3	mode4
0.5	0.01	1.123	1.872	3.279	4.442
	0.50	1.125	1.903	3.299	4.508
	1.00	1.125	1.910	3.307	4.526
	空中	1.126	1.920	3.320	4.562
1.0	0.01	0.935	2.299	3.839	5.372
	0.50	0.937	2.328	3.879	5.449
	1.00	0.937	2.335	3.896	5.466
	空中	0.938	2.347	3.927	5.498

表-2 流体の影響

r_2/r_1	r_1/h	λ_0/λ			
		mode1	mode2	mode3	mode4
0.5	0.01	1.003	1.026	1.012	1.027
	0.50	1.001	1.009	1.006	1.012
	1.00	1.001	1.006	1.004	1.008
	λ_0	1.126	1.920	3.320	4.562
1.0	0.01	1.002	1.021	1.023	1.023
	0.50	1.001	1.008	1.012	1.009
	1.00	1.000	1.005	1.008	1.006
	λ_0	0.938	2.347	3.927	5.498

空中のはりの変位を用いて式(10)の解を求めると次のようになる。

$$U_2(z) = C_5 \cos \beta_2 z + C_6 \sin \beta_2 z + C_7 \cosh \beta_2 z + C_8 \sinh \beta_2 z \quad (12)$$

ここに、 $C_5 \sim C_8$ は積分定数。

$$\beta_2^4 = \frac{m_2 \omega^2}{E_2 I_2} \quad (13)$$

である。

はりの境界条件は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} z=0(\text{固定端}); \quad U_1=0, \quad U_1'=0 \\ z=l(\text{自由端}); \quad U_2''=0, \quad U_2'''=0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、 U_1' と U_2' はそれぞれ z に関する微分を表す。また、断面の不連続部での連続条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} U_1(h) &= U_2(h) \\ U_1'(h) &= U_2'(h) \\ E_1 I_1 U_1''(h) &= E_2 I_2 U_2''(h) \\ E_1 I_1 U_1'''(h) &= E_2 I_2 U_2'''(h) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(14)および式(15)から、流体を考慮した場合の固有振動数方程式は次のように得られる。

$$[K]_{8 \times 8} \{C_1, C_2, \dots, C_8\}^T = 0 \quad (16)$$

なお、 $[K]_{8 \times 8}$ の各要素については紙面の都合上省略した。

また、非粘性を仮定しているので一般化されたベルヌーイの式⁴⁾から、動圧力 p は速度に関する項を無視すれば次式より求まる。

$$p = -\rho_l \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (17)$$

3. 数値計算例

図-1に示す構造モデルについて固有値、固有振動モードおよび動圧力を計算した。解析にあたって液位比 l/h は2.0とし、流体中および空中にあるはりの半径比 r_2/r_1 は1.0(等断面)と0.5(変断面)の2ケース、半径 r_1 と液高 h との比 r_1/h は0.01, 0.5, 1.0の3ケースとする。なお、はりは流体中と空中とで同一材料とするのでヤング係数と密度は等しいものとし、密度比 ρ_l/ρ_1 は0.2とした。また、固有値 λ は $\lambda = \beta_1 h$ で定義し、以下、単に変断面といえは $r_1 > r_2$ を指すことにする。

3. 1 固有値

固有値の計算ははさみうち法を用いて行い、その計算結果を表-1に示す。また、流体の影響を調べるために、空中での固有値

λ_0 を流体を考慮した場合の固有値 λ で除した値を表-2に示した。

表-1および表-2から、固有値の比で流体の影響を比べた場合には、等・変断面に関わらず r_1/h が大きくなるほど流体の影響は小さくなることはいえる。これは、 r_1/h が大きいほど変形しづらくなるからである。また、 r_1/h の増加とともに流体の影響は少なくなるものの、 λ_0/λ の値は第1モードよりも高次のモードで大きい。

3. 2 固有振動モード

最大値(自由端)を基準としたときの固有振動モードを図-2に示す。なお、同図の横軸は変位、縦軸は z/l を示したものであり、1は液面、2は自由端を表す。

図-2から、変断面の第1モードでは r_1/h に関係なく、液面下での挙動は直線的であることが分かる。また、第2～第4モードでの節の位置は等・変断面で異なり、変断面の方がより液面に近い位置となる。なお、紙面の都合上、断面ごとにまとめて r_1/h の影響を表した固有振動モード図は省略したが、等・変断面に関わらず第2～第4モードでは、 r_1/h が大きくなると節の位置はより液面に近づく。

3. 3 動圧力の分布

流体中のはりには常に静的な圧力が作用しているが、はりが振動すれば、流体はそれに抵抗するように動的な圧力(動圧力)を及ぼし、動圧力の最大値を基準にしたときの分布を図-3に示す。なお、同図の横軸は動圧力 p 、縦軸は z/l を表す。

図-3から、液高 h を固定すると、モードに関係なく r_1/h が大きくなると動圧力の分布は緩やかになり、第1～第3モードまでは流体中全体で一様分布に近づく。第4モードでは液面付近で符号の逆転がみられるが、液底付近で他のモードと同様の傾向にある。これは r_1/h が大きくなると、固有振動モードの場合と同様にはりが変形しづらくなり、それに抵抗するように作用する動圧力の変化が少なくなるからである。また、同じ r_1/h で比較した場合、最大値を示す位置は、第1モードでは等・変断面の影響はほとんどないものの、第2～第4モードでは変断面の方がより液面に近い位置となる。紙面の都合上、断面ごとにまとめて r_1/h の影響を表した動圧力の分布は省略するが、同じ断面でみた場合には、最大値の位置はモードに関係なく r_1/h の増加とともに液底方向に下がる。さらに、第4モードでは液面付近に動圧力が0となる位置が現れるが、その位置は r_1/h に関係なく変断面の方がより液面近くとなる。同じ断面で比較した場合には、 r_1/h が

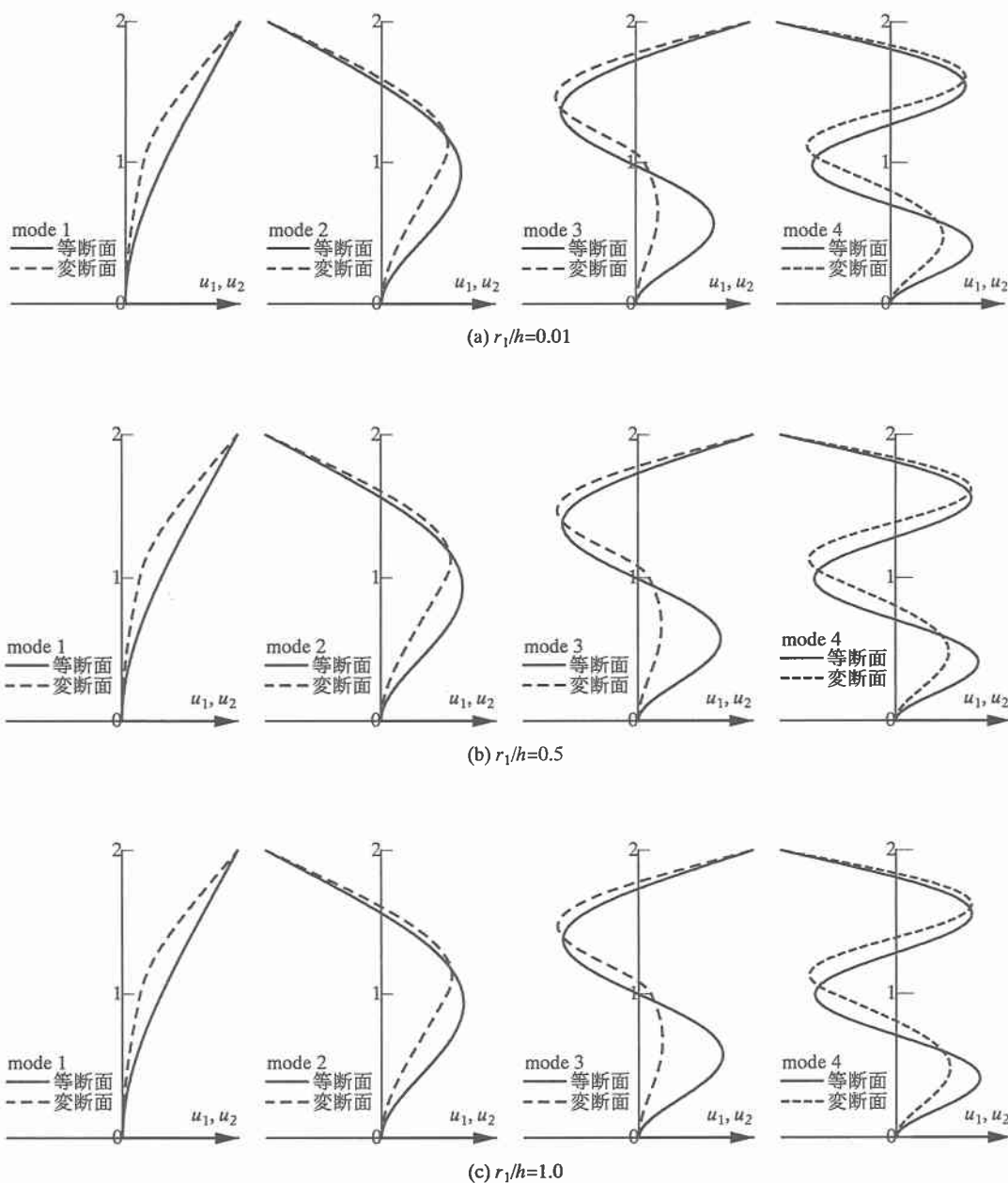


図-2 固有振動モード

大きいほど液面近くで動圧力は0となる。

3. 4 付加質量係数

流体の影響を付加質量や付加質量係数として評価しておけば、数式の上ではりが空中にある場合に置き換えることができ、流体-構造系の相関問題を容易に扱うことができる。本論文では、付加質量 m_0 を流体中にあるはりの単位長さ当りの質量 m_1 で割った付加質量係数 α として流体の影響を評価し図4に示す。なお、付加質量係数は、はりが空中および流体中にある場合の固有値から求めた。

図4から、高次モードほど付加質量係数 α が大きいことが分かる。また、断面で比較した場合には、第1,2,4モードでは変断

面の方が常に α は大きく、等・変断面でともに r_1/h が大きくなると α は小さな値となり、やがて一定値に近づく。一方、第3モードでは等断面の方が常に α は大きく、他の3つのモードと同様に、 r_1/h が増加すれば α は断面に関係なく一定値に近づく。

4. まとめ

数値計算例の結果から、次のことがいえる。

- (1) 断面の影響は固有振動モードで大きく、第1モードから顕著であるのに対し、動圧力の分布は高次になるほどその影響は大きくなるが、固有振動モードほどではない。
- (2) 半径・液高比 r_1/h の影響は動圧力で大きく、第1モードから顕著であるのに対し、固有振動モードは高次になるほどその影

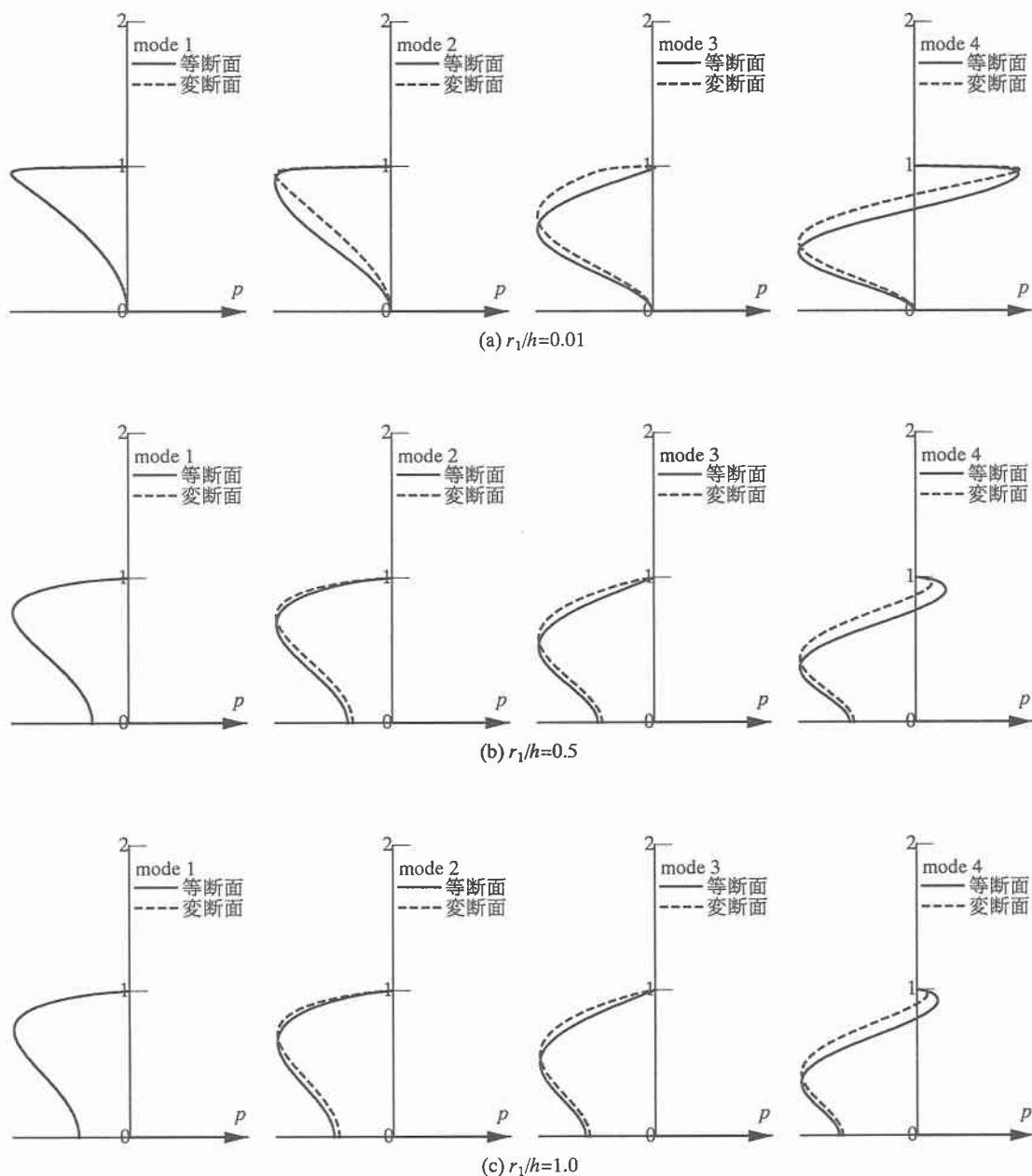


図3 動圧力の分布

響は大きくなるが、動圧力ほどではない。

- (3)付加質量係数は、同じ r_1/h でも等断面と変断面ではその値が異なるが、その値は r_1/h に対して反比例的な関係を示す。

参考文献

- 1)桜井彰雄：水中に立てられた柱状構造物の振動，土木技術，第16巻，第6号，pp.11-17，昭和36年6月
- 2)C.R.ワイリー：工業数学 上，ブレイン図書出版，1982年3月
- 3)山内二郎，宇野利雄，一松信共編：電子計算機のための数値計算法Ⅲ，培風館，昭和50年9月
- 4)日野幹雄：流体力学，朝倉書店，1992年12月

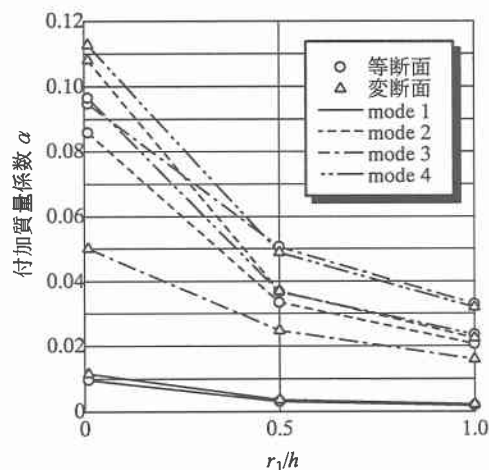


図4 付加質量係数