

自由振動解析における2段階動的縮小法の効果

Effect of two-phase dynamic condensation method in free vibration analysis

函館工業高等専門学校 ○正員 渡辺 力
 長岡技術科学大学 正員 林 正
 函館工業高等専門学校 中村 大

1. まえがき

固有値問題の縮小において、Craigらの動的縮小法¹⁾は局所モードの数を多く採ることによって精度を改善できる。しかし、局所モード数が増大するに従い、行列のバンド幅が広がるなど全体解析における縮小効果は減少し、静的縮小法²⁾に比べ記憶容量も増大することから大次元の問題では不利となる。さらに、全体剛性行列と質量行列の組み立て手順が複雑で、汎用プログラムとして実用化することが難しいことが指摘されている³⁾。

この動的縮小法を改良した2段階動的縮小法が開発されている⁴⁾。この2段階動的縮小法では、固有値計算を要素ごとの局所モード解析、構造全体モード解析及びこれらの連成モード解析に分けて行う。各要素についての固有値解析と全体系の固有値解析は、それぞれ通常の動的縮小法と静的縮小法と同じである。最後の連成モード解析では、全ての要素についての局所モードと構造全体モードのそれぞれから必要とするモード数だけの低次モードを選び出して計算するので、この縮小された連成モードの固有値問題の次元数は、大規模構造において総自由度数の1/100以下になる。また、この解法での全体剛性行列と質量行列の組み立て手順は線形応力解析と同じで特別なアルゴリズムを必要としない。

本報告では、2段階動的縮小法をハイアラーキ有限要素法に適用し、薄肉I形断面はりの自由振動解析を行って局所モード数と加算全体モードの採り方が縮約誤差と計算効率に与える影響について検討を行う。

2. 2段階動的縮小法

ここでは、ハイアラーキ有限要素法に2段階動的縮小法を適用する⁴⁾。

(1) ハイアラーキ要素の固有方程式

自由振動解析に用いるハイアラーキ要素として、図-1のように4つの節点と要素境界線上に節線①～④を持つ四辺形要素を用いる。

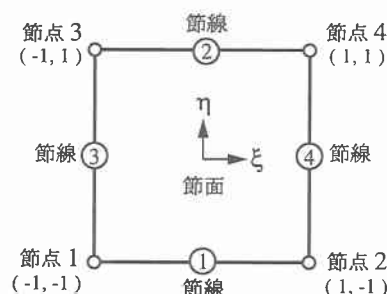


図-1 ハイアラーキ四辺形要素

ハイアラーキ要素は、節点自由度の他に節線・節面自由度を有する高次の多自由度要素であるので、全体解析の前にできるだけ多くの自由度を消去しておくことが望ましい。そこで、全体解析での自由度数を少なくするために、内部(節面)自由度とともに自由辺の節線自由度も縮約する。

一般化変位ベクトル $\mathbf{d}$ を非縮約自由度(結合自由度) $\mathbf{d}_1$ と縮約自由度(内部自由度と自由辺) $\mathbf{d}_2$ に分けて要素の固有方程式を次のように分割する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{12}^T & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{12} \\ \mathbf{m}_{12}^T & \mathbf{m}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{k}$ は剛性行列、 $\mathbf{m}$ は質量行列、 λ は固有円振動数 p の二乗である。

2段階動的縮小法では、以下の手順で構造全体モード解析、局所モード解析、連成モード解析の計算を行う。

(2) 構造全体モード解析

式(1)に静的縮小法を用いて、 $\mathbf{d}_2$ を消去したものを構造全体に組み立てると次式が得られる。

$$[\widehat{\mathbf{K}}_{11}] \mathbf{D}_1 = \lambda [\widehat{\mathbf{M}}_{11}] \mathbf{D}_1 \quad (2)$$

式(2)の固有値を Λ_i 、固有ベクトルを ψ_i とし、低次モードから次数 n だけ選び出したモーダルマトリックスとスペクトル行列を次のように表す。

$$\Psi_1 = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots], \quad \Lambda_1 = \text{diag}[\Lambda_i] \quad (3)$$

なお、次数 n は必要なモード数 n_0 よりも数個 (n_G 個) 多く用いることとする(以後、 n_G を加算全体モード数と呼ぶ)。

(3) 局所モード解析

縮約自由度 d_2 の動的な影響を考慮するために、式(1)の第2式で $d_1 = O$ として、要素周辺を固定した固有値問題を考える。

$$[k_{22}] \phi = \lambda [m_{22}] \phi \quad (4)$$

式(4)の i 番目の固有値を λ_i 、固有ベクトルを ϕ_i とし、モーダルマトリックス Φ_2 とスペクトル行列 A_2 を次式で表す。

$$\Phi_2 = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots], \quad A_2 = \text{diag}[\lambda_i] \quad (5)$$

ここで、 ϕ_i は λ_i の小さい低次モードから選ぶ。 ϕ_i は要素の局所振動モードである。

この動的効果を考慮して、動的縮小法における構造全体の固有方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \widehat{K}_{11} & O \\ O & \widehat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12} \\ \widehat{M}_{12}^T & \widehat{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここに、 C_2 は縮小された縮約自由度(局所振幅ベクトル)で、2段階動的縮小法では式(6)を直接解かず、次のような手順で全体モードの縮小を行う。

(4) 連成モード解析

式(3)の静的縮小法の解を用いて、式(6)の構造全体の振動モード D_1 について縮小を行うと2段階動的縮小法による連成モード解析の固有方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \widetilde{K}_{11} & O \\ O & \widetilde{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{11} & \widetilde{M}_{12} \\ \widetilde{M}_{12}^T & \widetilde{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここに、 C_1 は縮小された構造全体モード(全体振幅ベクトル)であり、 $\widetilde{K}_{11}$ などは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{K}_{11} &= \Psi_1^T \widehat{K}_{11} \Psi_1 = \text{diag}[P_i] \\ \widetilde{M}_{11} &= \Psi_1^T \widehat{M}_{11} \Psi_1 = \text{diag}[Q_i] \\ \widetilde{M}_{12} &= \Psi_1^T \widehat{M}_{12} \\ P_i &= \psi_i^T \widehat{K}_{11} \psi_i = \Lambda_i Q_i \\ Q_i &= \psi_i^T \widehat{M}_{11} \psi_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(5)の局所モードの採り方は、全要素の局所モードの中から固有値の小さい順に n_L 個を採るものとする。これにより、式(7)の次元数は $(n_0 + n_G + n_L)$ で与えられ、大規模問題でもせいぜい百元程度となる。し

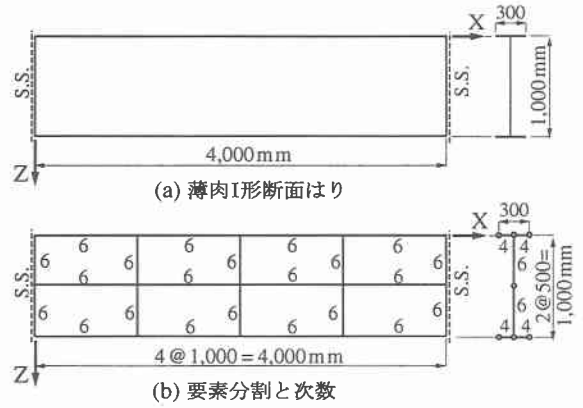


図-2 計算モデル

たがって、精度を改善するために局所モード数 n_L を多く用いても、動的縮小法ほど計算時間と記憶容量は急激に増大しない。

3. 数値計算例

(1) 計算モデルと要素分割

図-2に示す支間 4m、高さ 1m、上下フランジ幅 0.3m の I 形断面はりを計算して、2段階動的縮小法の解析精度と計算効率を調べる。計算モデルは、板厚を全て 10mm とし、境界条件は面外方向変位も拘束した単純支持とする。なお、軸方向変位 u は $X=0$ のウェブ中央点を固定している。材料定数はヤング係数 $E=206\text{GPa}(2.1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2)$ 、密度 $\rho=7.85\text{t/m}^3$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、せん断補正係数 $k=5/6$ を用いる。

要素分割は図-2(b)に示すように、断面内にはフランジとウェブの結合位置と、ウェブを中央点で分割し、 X 軸方向に 4 分割する。多項式の次数は図中に示してある。また、比較解には、8 節点要素を用いて、フランジを 50×8 、ウェブを 50×12 に細分割した h 法による値を用い、30 次までの固有値 ($n_0=30$) を計算する。

(2) 解析精度と計算効率

表-1には、 h 法および非縮小時の固有振動数 f_0 (Hz) と、静的縮小解、 $n_L=24 \sim 200$ を用いた動的縮小解、 $n_L=80$ とし $n_G=1, 3, 5$ と採ったときの2段階縮小解の非縮小解に対する誤差(%)を示した。また、表の下段には、各解法での縮約自由度数、静的縮小解に対する計算時間および記憶容量の比を示してある。

非縮小解の振動モードは細分割した h 法によるモードと全て一致しており、固有振動数は総自由度数が 6 倍の h 法に対して全てのモードで 1% 以下の誤差となっている。また、非縮約解の固有振動モードを図-3に示す。表中の縮小解は点線の次数までがこれらのモードと一致している。

まず、動的縮小法では局所モード数 (n_L) が多くなる

表-1 薄肉I形断面桁の固有振動数

モード	h 法 [Hz]	非縮約 f_0 [Hz]	誤差 $(f - f_0)/f_0 \times 100 (\%)$							
			静的 縮約	動的縮小法				2段階動的縮小法 ($n_L=80$)		
				$n_L=24$	$n_L=40$	$n_L=80$	$n_L=200$	$n_G=1$	$n_G=3$	$n_G=5$
1	20.31	20.33	0.23	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	31.98	32.04	0.59	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	34.38	34.40	0.22	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	41.99	42.07	0.87	0.04	0.02	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
5	46.03	46.05	0.17	0.08	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	54.02	54.12	1.74	0.07	0.04	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01
7	68.37	68.46	1.76	0.08	0.07	0.03	0.00	0.03	0.03	0.03
8	85.27	85.36	2.47	0.20	0.11	0.06	0.00	0.06	0.06	0.06
9	87.88	87.96	3.69	0.34	0.06	0.01	0.00	0.02	0.02	0.01
10	88.41	88.44	3.26	0.81	0.07	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01
11	102.08	102.25	5.10	0.28	0.14	0.01	0.00	0.02	0.02	0.02
12	104.93	105.04	3.40	0.42	0.16	0.10	0.00	0.11	0.11	0.11
13	117.37	117.62	10.70	0.54	0.01	0.01	0.00	0.06	0.06	0.06
14	127.49	127.87	5.67	0.32	0.28	0.23	0.00	0.24	0.24	0.24
15	135.08	135.38	5.93	0.48	0.36	0.02	0.01	0.08	0.08	0.08
16	141.21	141.46	1.84	0.54	0.21	0.03	0.01	0.03	0.03	0.03
17	141.43	141.68	4.73	0.83	0.22	0.02	0.01	0.05	0.04	0.03
18	144.45	144.46	3.68	2.99	0.70	0.06	0.00	0.09	0.09	0.09
19	151.66	151.74	3.87	2.01	0.93	0.11	0.01	0.11	0.11	0.11
20	153.01	153.67	3.73	1.26	0.31	0.24	0.00	0.27	0.27	0.27
21	155.10	155.44	4.88	1.02	0.52	0.03	0.01	0.22	0.20	0.16
22	156.37	156.37	8.62	1.30	0.15	0.03	0.02	0.03	0.03	0.03
23	162.22	162.45	7.05	1.78	1.20	0.13	0.01	0.14	0.14	0.14
24	177.26	177.65	1.36	1.14	0.70	0.02	0.00	0.02	0.02	0.02
25	177.40	177.77	8.67	1.74	0.69	0.03	0.00	0.86	0.29	0.29
26	179.32	179.56	9.66	3.00	0.06	0.06	0.04	0.06	0.06	0.06
27	181.55	183.38	11.58	2.12	0.41	0.35	0.01	0.41	0.41	0.41
28	195.83	196.39	7.68	3.18	2.74	0.30	0.01	0.32	0.32	0.32
29	202.05	202.62	17.63	1.20	1.10	0.03	0.00	6.95	4.54	0.31
30	212.77	213.00	11.87	1.46	1.23	0.08	0.01	2.87	1.74	1.74
縮約自由度数	—	—	966	990	1006	1046	1166	111	113	116
総自由度数	26142						4350			
計算時間比	—	9.17	1.00	1.44	1.57	1.65	1.98	1.46	1.44	1.43
記憶容量比	—	11.5	1.00	1.15	1.29	1.59	2.62	1.28	1.28	1.29

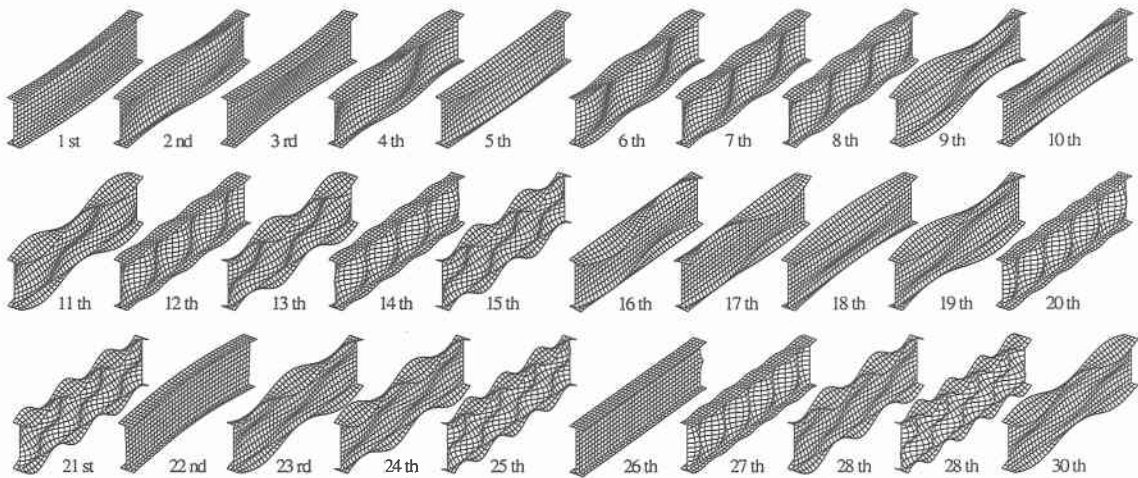


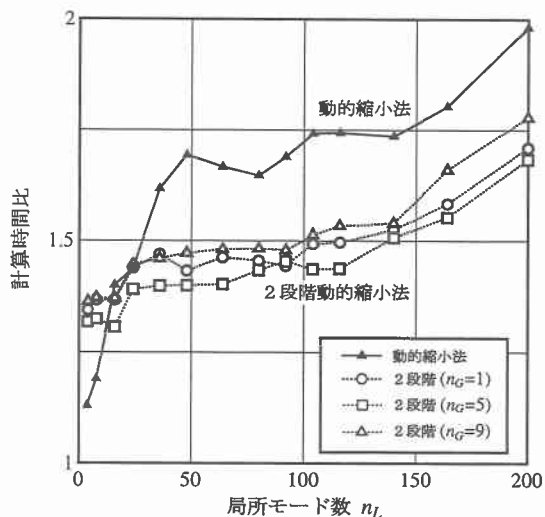
図-3 薄肉I形断面はりの固有振動モード

に従って精度が改善されており、 $n_L=80$ で 30 次モードまで全ての縮約誤差が 1% 以下となっている。2 段階動的縮小法では、この $n_L=80$ を用いて加算全体モード数 n_G を 1, 3, 5 と採っている。

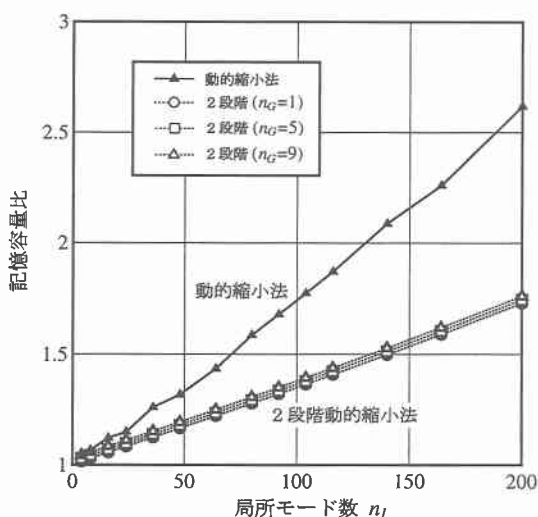
2 段階動的縮小法では、 $n_G=1$ で 28 次モードまでのモードが 1% 以下の誤差となっているが、29 と 30 次で数%の誤差が生じている。 n_G を増加すると 29 と 30 次モードの精度が改善され、 $n_G=5$ で 30 次モードが 2% 程度の誤差である他は全てのモードで 1% 以下の誤差となっている。2 段階動的縮小法では総自由度数を

約 1/40 に縮小しているが (動的縮小法では約 1/4)、動的縮小法と同程度の解析精度が得られていることが分かる。

次に、動的縮小法と 2 段階動的縮小法の計算効率を比較する。図-4 には、 n_L を 4 から 200 まで採ったときの静的縮小法に対する計算時間比と記憶容量比を示す。2 段階動的縮小法では、加算全体モード数 $n_G=1, 5, 9$ の 3 ケースを計算している。動的縮小法での計算時間はサブスペース法の反復回数によって変動するが、 n_L の増加とともに計算時間と記憶容量が急激に増加し



(a) 局所モード数と計算時間比



(b) 局所モード数と記憶容量比

図-4 計算時間比と記憶容量比

ている (図の実線). それに対して, 2段階動的縮小法では n_L が増加しても計算時間と記憶容量も動的縮小法のように急激に増大することはない. さらに, 記憶容量は n_G が増加してもほとんど増加することはない, 動的縮小法に対して約 25~30% 少なくなっている. また, 表-1より, $n_L=80$ を用いた 2段階動的縮小法の記憶容量は非縮小時の約 1/9 となっている (計算時間は約 1/6).

(3) 加算全体モード数の採り方

加算全体モード数 n_G には 3~5 程度を用いれば実用上十分であるが⁴⁾, (2) で示したように n_G が少ないと求める最高次数 (n_0 次) のモードが若干精度が悪くなる場合がある. この精度を改善するためには加算全体モード数 n_G を増やせばよい.

図-5は, $n_L=80$, $n_G=1\sim 15$ を用いた 2段階動的縮小法において, n_G と縮約誤差 (%) の関係を示したものである. 図からも分かるように 2段階動的縮小法の解は, n_G を増加させると動的縮小法の解に収束する. 1次 (弱軸まわりの曲げ振動), 22次 (強軸まわりの曲げ振動) や 26次 (縦振動) のような単純な振動波形では, n_G に依らず収束値が得られている. 最も収束の遅い 30次モードでも $n_G=9$ を用いれば 1% 以下の誤差となっている. n_G の採り方は一概に言えないが, 求める最高次数 (n_0 次) のモードの誤差も 1% 以下に抑えたいときには, $n_G=10$ 程度を用いれば十分である. なお, (2) で示したように, n_G を多く採っても記憶容量はほとんど増加しない.

4. まとめ

2段階動的縮小法をハイアラーキ要素による薄肉 I 形断面はりの計算に用いた結果から次のようなことが

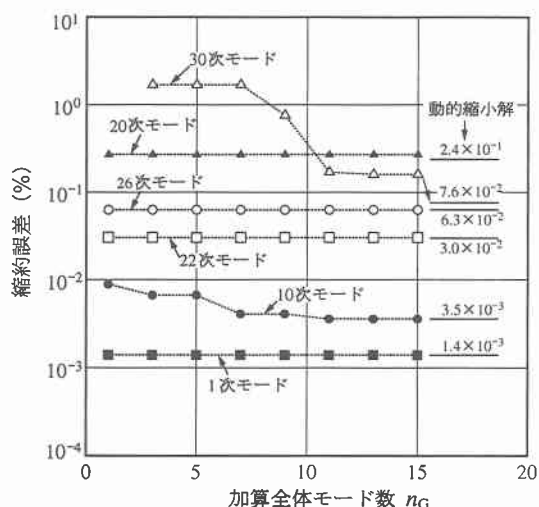


図-5 加算全体モード数 n_G と縮約誤差 ($n_L=80$)

言える.

2段階法による縮約を行っても精度が悪化することはない, 動的縮小法に比べて記憶容量を大幅に節約できる. 特に, 高次モードを求めるために局所モード数を多く用いる場合ほど効果が大きい. また, 加算全体モード数の採り方は, 求める最高次数 (n_0 次) のモードに必要な精度に応じて数個採ればよい.

本計算例は 4350 自由度と小さな問題であったが, 2段階法の効果は大次元の問題ほど大きくなる.

参考文献

- 1) Craig, Jr., R.R. and Bampton, M.C.C. : Coupling of substructures for dynamic analysis, *AIAA J.*, Vol.6, pp.1313-1319, 1968.
- 2) Guyan, R.J. : Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA J.*, Vol.2, pp.380, 1965.
- 3) 長松昭男, 大熊政明 : 部分構造合成法, 倍風館, 1991.
- 4) 林 正, 渡辺 力 : 2段階動的縮小法を用いたハイアラーキ要素による自由振動解析, 土木学会論文集, No.619/I-47, pp.35-46, 1999.