

II-57

交互砂州形状の予測に関する研究

北海道大学工学部 ○学生員 倉林 弘志
北海道大学大学院 正 員 清水 康行

1. はじめに

日本の河川において、よく見られる交互砂州形状の予測は、河川工学において大変重要である。古くから、この交互砂州に関する様々な実験、理論解析および、数値解析が行われてきた。また、実験と理論解析、実験と数値解析などのような比較も数多く行われている。しかしながら実験、理論解析、数値解析の3者を比較したものはなく、本研究では、それらの比較を行うことを目的とし、その第一歩として、川幅水深比と波長の関係をそれぞれについて解析し、比較・検討を行う。

理論解析においては、線形理論を用いて解析を行い、数値解析では、非線形解析の手法を用いて計算を行う。

長谷川ら¹⁾の行った実験について、これらの解析を照合した結果、川幅水深比と波長の関係において、両者ともに高い整合性があることが確かめられた。

2. 基礎式

理論解析に用いた基礎式である、2次元流れの運動方程式、連続の式および、流砂の連続の式はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= - \frac{\tilde{\tau}_x}{\tilde{\rho} \tilde{h}} - \tilde{g} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= - \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\rho} \tilde{h}} - \tilde{g} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial(\tilde{u} \tilde{h})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{v} \tilde{h})}{\partial \tilde{y}} &= 0 \\ \frac{\partial(\tilde{H} - \tilde{h})}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{1-p} \left(\frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial \tilde{y}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

A Study on Prediction of Bed Form of Alternate Bars

By Hiroshi KURABAYASHI, Yasuyuki SHIMIZU.

ここで、 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}$ は流下、横断方向の座標軸および流速、 $\tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y$ は河床せん断力、 $\tilde{\rho}$ は流体の密度、 \tilde{h} は水深、 \tilde{H} は水位、 \tilde{g} は重力加速度である。

数値解析に用いた基礎式は、理論解析で用いた基礎式に、乱流による運動量の拡散効果を考慮した拡散項を付加している。この拡散項を加えることにより流れの急変部などにおいても安定した計算が可能になる。

3. 理論解析

Seminara²⁾の手法には、前述の基礎式を用いて砂州が発生する領域を与えた微小攪乱が増幅するか減衰するかを判断する。まず基礎式を無次元化し、次に線形化するという手順を経てこれを判断する。その後、交互砂州が安定する波長を求める。以下この方法の概略を示す。

河床摩擦係数 C はアインシュタインの式を用いて流下方向流砂量 q は Meyer-Peter, Muller の式を用いて計算を行った。

$$\begin{aligned} C^{-1/2} &= 6 + 2.5 \ln \left(\frac{\tilde{h}}{2.5 \tilde{d}} \right) \\ q &= 8(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} \end{aligned}$$

ここで、 \tilde{d} は河床材料の粒径、 τ_* は無次元掃流力、 τ_{*c} は無次元限界掃流力である。

基礎式の各変量を無次元化した後、それらを微小な摂動パラメータを用いて1次オーダーまで展開し、線形化を行う。

次に流速水位、水深の微小攪乱は並みの形で表されるものと考え、以下のように与える。

$$\begin{aligned} u_1 &= A \hat{u}_1 S_1 E_1 + c.c \\ h_1 &= A \hat{h}_1 S_1 E_1 + c.c \\ H_1 &= A \hat{H}_1 S_1 E_1 + c.c \\ v_1 &= A \hat{v}_1 C_1 E_1 + c.c \end{aligned} \quad (c.c : \text{共益複素数})$$

ただし、上式において

$$A = \exp(\Omega t)$$

$$S_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

$$C_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

$$E_1 = \exp\{i(\lambda x - \omega t)\}$$

である。また Ω は増幅率、 ω は無次元角速度、 λ は

無次元波数、 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{H}, \hat{h}$ はそれぞれ u, v, H, h の振幅量である。

これらの式を行列で表現すると以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{H}_1 \\ \hat{h}_1 \end{pmatrix} = 0$$

この行列が任意の $\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{H}_1, \hat{h}_1$ について成立するためには、行列式が 0 になる必要がある。行列式 = 0 としたものは、一般的な表現として次のように表される。行列内の値に関しては、Seminar²⁾ らの研究に基づく。

$$f(\Omega, \omega, \lambda, \beta; \tau_*, d) = 0$$

ここで、 β は川幅水深比である。

交互砂州の発生条件を求めるためには、上式において、 $\Omega = 0$ となる条件を見つけることが必要である。

図-1 に長谷川¹⁾らの実験の条件を用いて計算を行った結果を示す。

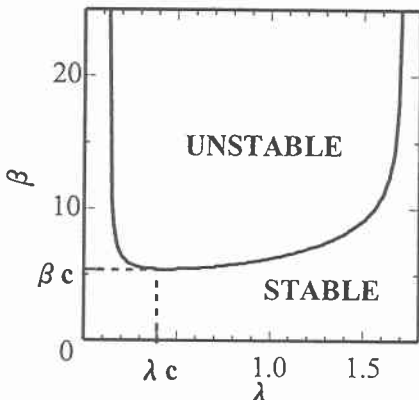


図-1 中立曲線 ($\tau_* = 0.15, d = 0.056$)

図中の STABLE は、初期の乱れが時間と共に成長する。すなわち、 $\Omega > 0$ 。UNSTABLE は、初期の乱れは時間と共に減衰する。すなわち、 $\Omega < 0$ の領域である事を示している。

長谷川¹⁾らの実験の値を用いて計算を行ったところ、交互砂州の安定する波長に関してかなり近い値が得られた。

4. 数値解析

ここでは、前述の基礎式を用いて 2次元流れの計算を行い、それをもとに河床変動計算を行う。

基礎式は直交座標系における 2次元、定常、非圧縮性流体の運動方程式であり、これらの式のすべての項を省略せずに計算した。

以下に流下方向の水深平均流速の計算方法を示し、その他の計算等はここでは省略する。なお、図-3 に計算のフローチャートを示す。

ここで、計算の便宜上 x, y 方向の格子を図-2 に示すように $\Delta s, \Delta s', \Delta n, \Delta n'$ に分割する。

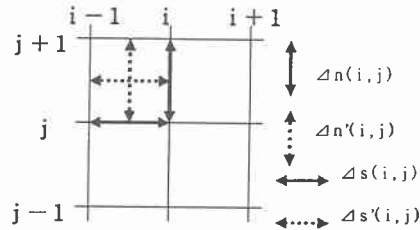


図-2 計算格子の分割定義図

次に、基礎式の各項を以下のように差分化する。

$$u \frac{\partial u}{\partial s} = \hat{u}(i, j) \frac{u(i, j) - u(i-1, j)}{(\Delta s(i, j) + \Delta s(i-1, j)) / 2}; u(i, j) \geq 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} = \hat{u}(i, j) \frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{(\Delta s(i+1, j) + \Delta s(i, j)) / 2}; u(i, j) < 0$$

ここで $\hat{u}(i, j)$ は繰り返し計算における前のステップでの $u(i, j)$ の値である。

$$v \frac{\partial u}{\partial n} = v_M(i, j) \frac{u(i, j) - u(i, j-1)}{\Delta n'(i, j)}; v_M(i, j) \geq 0$$

$$v \frac{\partial u}{\partial n} = v_M(i, j) \frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\Delta n'(i, j)}; v_M(N_j, j) > 0$$

ただし、

$$v_M(i, j) = \frac{v(i, j) + v(i, j+1) + v(i-1, j) + v(i-1, j+1)}{4}$$

である。

同様に、各項を差分化する。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{p(i, j) - p(i-1, j)}{\Delta s(i, j)}$$

$$\frac{\tau_s}{\rho h} = u(i, j) \sqrt{\tilde{u}(i, j)^2 + v_M(i, j)^2}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{gn^2}{h^{4/3}} \right) (i, j) + \left(\frac{gn^2}{h^{4/3}} \right) (i-1, j) \right\} / 2$$

$$2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial s} \right) = \frac{2}{\Delta s(i, j)}$$

$$\times \left\{ \varepsilon(i, j) \frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{(\Delta s(i+1, j) + \Delta s(i, j)) / 2} \right.$$

$$\left. - \varepsilon(i-1, j) \frac{u(i, j) - u(i-1, j)}{(\Delta s(i, j) + \Delta s(i-1, j)) / 2} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \right) = \frac{2}{\Delta n'(i, j+1) - \Delta n'(i, j)}$$

$$\times \left\{ \varepsilon'(i, j+1) \frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\Delta n(i, j+1)} - \varepsilon'(i, j) \frac{u(i, j) - u(i, j-1)}{\Delta n(i, j)} \right\}$$

ただし、

$$\varepsilon'(i, j) = \frac{\varepsilon(i, j) + \varepsilon(i, j-1) + \varepsilon(i-1, j) + \varepsilon(i-1, j-1)}{4}$$

である。また、 p は圧力、 ε は渦粘性係数である。

これらの式を基礎式に代入すると、 $u(i, j)$ についての1次式が得られる。これを $u(i, j)$ について解き、次式を得る。

$$u(i, j) = - \frac{B_1(i, j) + C_1(i, j)(p(i, j) - p(i-1, j))}{A_1(i, j)}$$

なお $A_1(i, j), B_1(i, j), C_1(i, j)$ は式をまとめた時に得られる $u(i, j), p(i, j)$ の係数および定数である。

側壁における境界条件は

$$v = 0$$

である。また、側壁でのせん断力を τ とし、側壁に接する計算点での流速を u_w とすると

$$\frac{\tau}{\rho} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} = C_d u_w |u_w|$$

で与える。なお、 C_d は側壁の摩擦係数であり、本研究では全て $C_d = 0.005$ としている。

下流端では水位を一定として与える。上流端においては流量が全流量に等しくなるように、流速を与える。また、上流端では v はすべて0である。

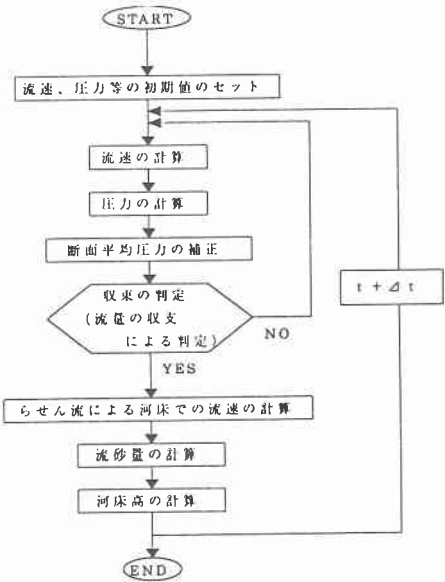


図-3 計算フローチャート

長谷川ら¹⁾の行った実験条件で計算した結果の一例の河床高のコンター図を図-4に示す。

5. 実験

表-1に長谷川ら¹⁾の行った実験の条件と要目を表-1に、河床高のコンター図を図-5に示す。

表-1 実験条件および要目

流路幅 \tilde{B} (cm)	30
平均流径 d (cm)	0.043
流量 Q (l/s)	0.75
平均河床勾配 I	0.0140
平均水深 \tilde{H}_0 (cm)	0.77
平均流速 \tilde{U}_0 (cm/s)	32.55
砂州波長 \tilde{L} (cm)	209

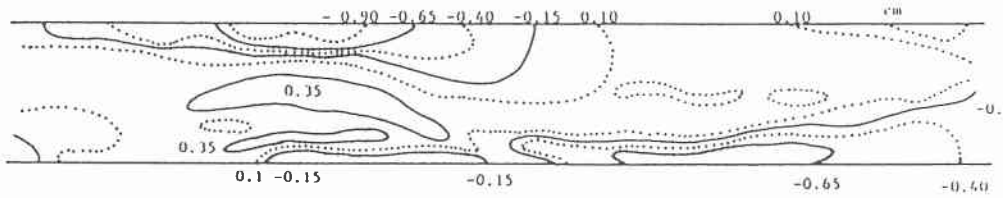


図-4 河床コンター図 (実験)

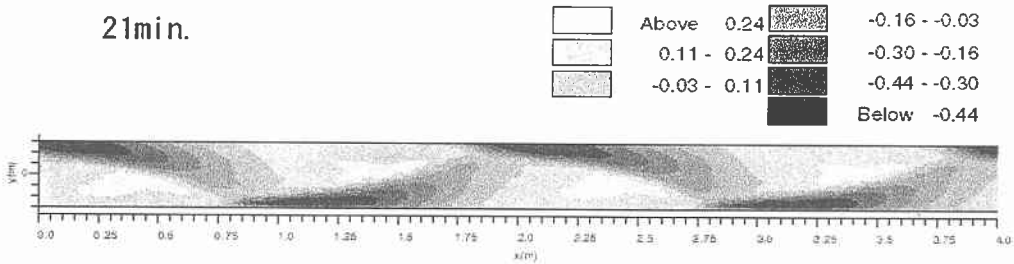


図-5 河床コンター図 (数値解析)

6. 終わりに

交互砂州が安定する波長を調べたところ、理論解析では200.5cm、数値計算では約200cmという結果が得られた。これらの値は実験で得られた209cmという値をよく再現している。実験、理論、数値計算の3者が川幅水深比と砂州波長との観点から一致することが、限られた一例のみの検討結果ではあるが、確かめられた。

今後は、砂州波高や移動速度などについても検討を進めたい。

<参考文献>

- 1) 長谷川和義: 沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究
- 2) M. COLOMBIN, G. SEMINARA and M. TUBINO: Finite-amplitude alternate bars, J. Fluid Mech. (1987) .vol. 181 pp213-232
- 3) G. Seminara and Tubino: Alternate Bars and Meandering: Free, Forced and Mixed Interaction, River Meandering, pp267-320(1989)
- 4) 清水康之: 沖積河川における流れと河床変動の予測手法に関する研究 (1991)
- 5) 渡邊康玄: わかりやすい理論解析入門(その1) - 交互砂州の安定解析を例として - (1991)