

II-51

定山溪ダム貯水池の水位変動のウェーブレット解析

北海道大学大学院工学研究科修士課程 学生員 ○星野 智紀  
 北海道大学大学院工学研究科教授 フェロー会員 藤田 睦博  
 日産建設(株)札幌支店 正会員 熊谷 進

1. はじめに

時系列解析において、フーリエ解析が多用されている。波形をフーリエ変換すると、横軸を周波数、縦軸を高調波の振幅で表すいわゆる周波数スペクトラムが得られる。通常の波形解析はこの周波数スペクトラムを観察し、波形の高調波含有率を吟味する。しかしこの際に、時間領域で積分し、周波数領域に変換するために時間領域の情報が失われるという欠点がある。フーリエ解析の欠点を補うために窓関数を用いるフーリエ変換や短時間フーリエ変換の手法が提案されているが、時間情報を増やそうとすると周波数情報が失われ、周波数情報を増やそうとすると時間情報が失われる欠点が指摘されている。ウェーブレット変換は、波形を高精度で時間領域と周波数領域にまたがって解析することが可能である。一般に時系列信号は局所的に周期的な信号で、周波数が時間とともに変化するようなものが多い。このように局所的に周期的な信号を時間の流れの中でとらえることを時間周波数解析という。ウェーブレット変換は信号の時間周波数解析を行う方法のひとつである。

前回の報告では、定山溪ダムの水位変動を離散値系ウェーブレットのひとつである、Harr (ハール)の基底関数を用いて解析した結果を述べた。今回はより高度な分解能を持つDaubechies (ドビッシ)の基底関数を用いて解析した結果を前回の結果と比較しながら述べ、前回よりもさらに高精度な解析を進めていく。

2. 使用するウェーブレットについて

① Harr wavelet

一般にトウスケール関係を満たす関数をスケール関数という。(1)式

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k) \quad (1)$$

ここで、数列  $\{p_k\}$  は、トウスケール数列とよばれ、スケール関数は、これによって決まる。 $\{p_k\}$  が有限数列であれば(1)式の和は、有限項の

和となる。Harr のスケール関数は0でない  $p_k$  が  $p_1 = 1$  という最も簡単な場合に相当する。一方、ウェーブレットは、(2)式によって与えられる。

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k \phi(2x - k) \quad (2)$$

この場合、数列  $\{q_k\}$  がウェーブレットを定義すると考えられる。図1にHarrのスケール関数、図2にHarrのウェーブレットを示す。

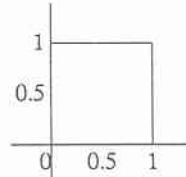


図1 harr の scaling 関数

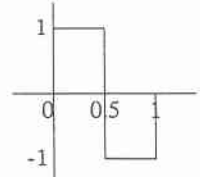


図2 harr の wavelet

② Daubechies wavelet

Daubechies のスケール関数とマザーウェーブレットは  $N=2, 3, \dots$  によって関連付けられる一連の関数である。Daubechie は有限個の0でない  $p_k$  から、一連の連続かつコンパクトサポートのスケール関数が構成できることを示した。ここでは最小の単位である  $N=2$  の Daubechies 関数を構成してみる。前に書いたようにスケール関数はトウスケール数列  $p_k$  によって決まる。同様にウェーブレットはトウスケール数列  $q_k$  によって決まる。このうち、最小の単位である  $N=2$  のトウスケール数列は4つの0でない  $p_0, p_1, p_2, p_3$  および  $q_0, q_1, q_2, q_3$  から成る。これらの  $p_k$  および  $q_k$  はトウスケール関係 ((1)式、および(2)式)、スケール関数とウェーブレットの直交関係を満たす。

$$\begin{aligned} \langle \phi(\cdot - l) | \phi(\cdot - m) \rangle &= \delta_{l,m} \\ \langle \psi(\cdot - l) | \psi(\cdot - m) \rangle &= \delta_{l,m} \\ \langle \psi(\cdot - l) | \phi(\cdot - m) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

これより  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$  を満たすことが分かる。また、ウェーブレットは  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$  を満たす。これは、ウェーブレットが正負に変動すること、言い

換えると振動的な性質を持つことを意味する。連続ウェーブレットにおけるアドミッシブル条件のかわりであると考えてよい。

これだけでは必ずしも連続関数とはならないので、ウェーブレットのモーメントが0になる条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x)dx = 0 \quad (4)$$

を加味すると、スケーリング関数およびウェーブレットのトウスケール数列が求まる。

$$p_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, p_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

$$q_{-2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}, q_{-1} = -\frac{3-\sqrt{3}}{4}, q_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, q_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

このように、トウスケール数列の要素が求まると、規格化の条件式およびマルチスケール関係(補間画像表示アルゴリズム)の条件式より、スケーリング関数およびウェーブレットの詳細なグラフを得ることができる。図3-1, 2にN=2の場合のDaubechiesのスケーリング関数およびウェーブレットのグラフを示す。

図3-1 Daubechies scaling関数

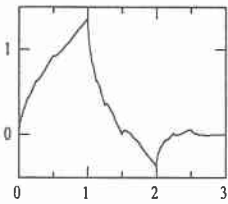
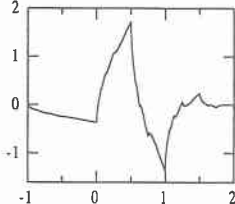


図3-2 Daubechies wavelet



ここでは、N=2のDaubechies関数を構成したが、今回の解析では、 $p_k, q_k$ それぞれ8つのトウスケール数列から構成される、より複雑なDaubechies関数を用いる。

### 3. 定山溪ダムの水位変動解析

ここでは定山溪ダム貯水池の水位変動をDaubechiesウェーブレットで解析した結果をHarrウェーブレットで解析した結果とあわせて、比較



図4 定山溪ダム平面図

図4は解析の対象とした定山溪ダムの平面図である。水位データとしては、図4に示すNo.1、No.2、No.6の3点で観測した3種類のデータを用

いた。水位の観測は1997年10月22日午前0時から24時まで行われたが、離散ウェーブレット変換においては扱うデータ数は2のべき乗でなければならないので、今回は後半の $2^{12}$ (4096)個のデータを用いて解析を行う。時間に直すと、午前3時31分30秒から24時までのデータを用いたことになる。なお、対象データの元系列は図5に示しておりである。いずれの成分も傾向成分を持っており直線式を仮定し、傾向成分からの偏差をウェーブレット解析の対象とした。そのデータは図6に示すとおりである。

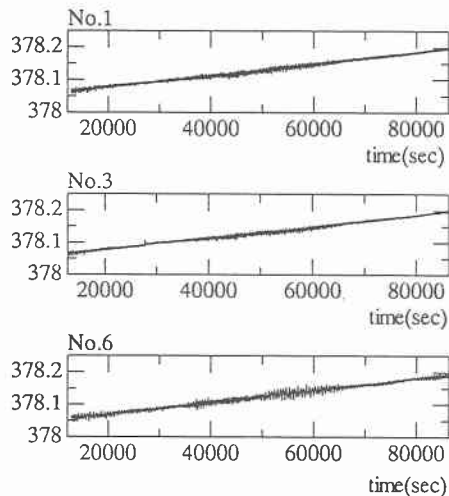


図5 3点における水位観測値(m)

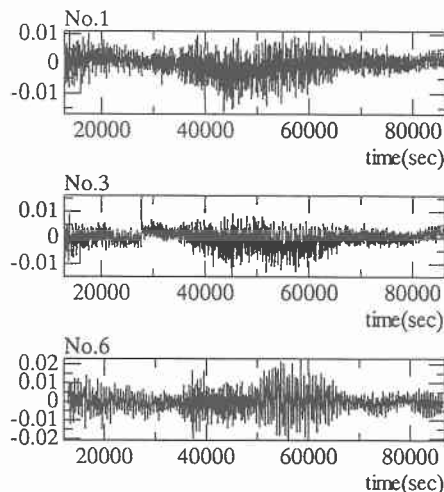
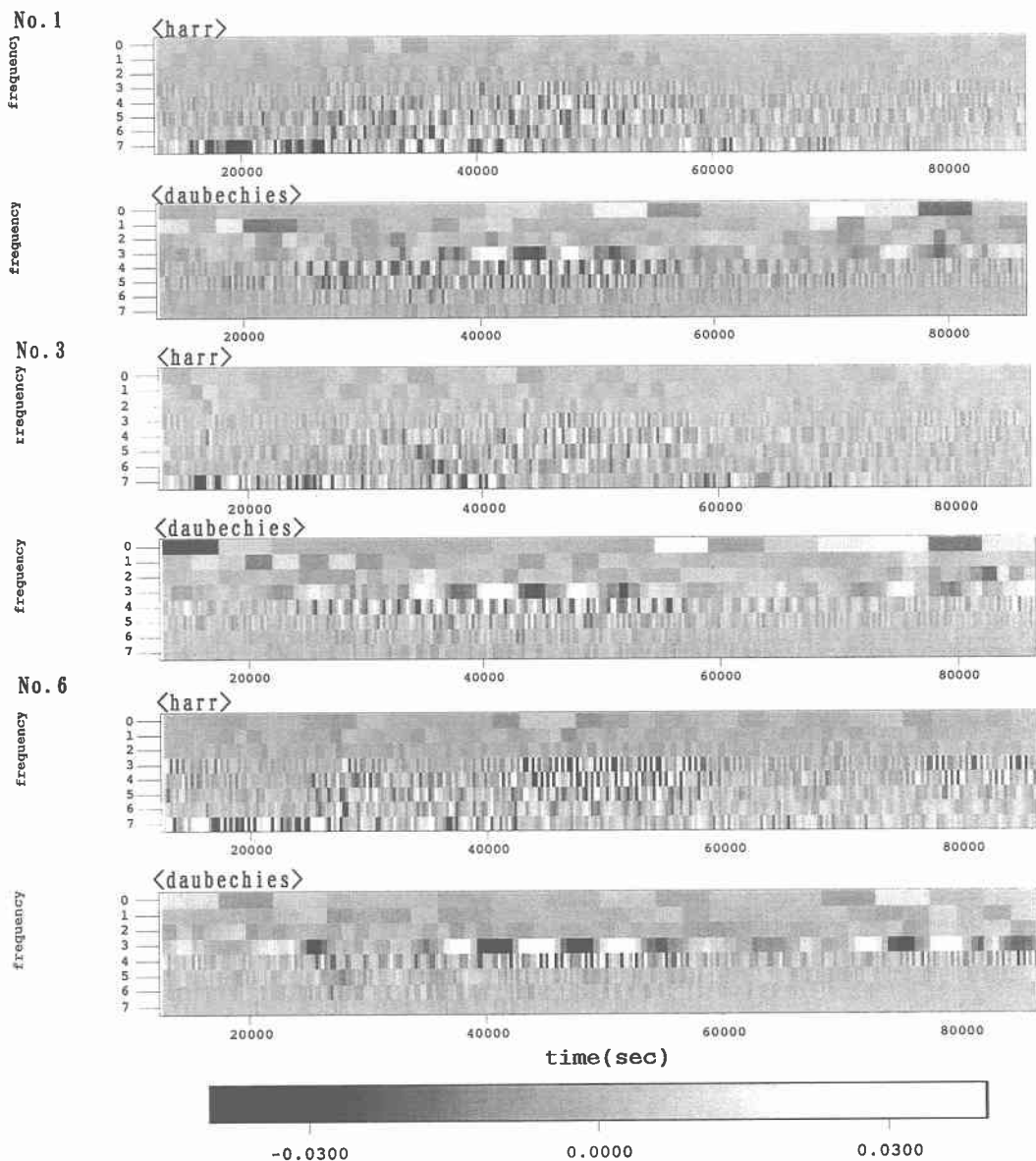


図6 傾向成分除去成分(m)

以下に各観測点における水位変動のウェーブレット変換の結果を示す。なお、harrのマザーウェーブレットを使った結果を上、Daubechiesのマザーウェーブレットを使った結果を下にあわせて示す。それぞれ、横軸が時間(秒)、縦軸が周波数の対数をしめしており(以下octaveとする)、ウェーブレットで表した信号の表示の値はそれぞ

れの時間による振動の強さ(振幅の強度)を示している。なお、縦軸の0~7は周期に換算すると0octaveで約4608~9216秒、1octaveで約2304~4608秒、2octaveで約1152~2304秒、3octaveで約576~1152秒、4octaveで約288~576秒、5octaveで約144~288秒、6octaveで約72~144秒、7octaveで約36~72秒である。

図7 各観測点におけるウェーブレット変換の結果



前回の報告では、harr 基底を用いて 30000 ~ 60000 秒 (8:30 ~ 16:40 頃) の時刻において、周期 80 ~ 160 秒、160 ~ 320 秒、320 ~ 640 秒の波を検出し、石田ら<sup>(4)</sup>が観測したセイシュとの周期の一致を確認し、さらにこれらの波とほぼ同時刻にガムの長軸方向に向けて吹いていた強風との相関性を確認した。今回の解析において、これらの周期の波は縦軸で 3octave (576 ~ 1152 秒)、4octave (288 ~ 576 秒)、5octave (144 ~ 288 秒) に相当するが、harr 基底・daubechies 基底いずれの場合においても前回同様、波の存在を確認することができる。

harr 基底を用いた結果と daubechies 基底を用いた結果を比較すると、後者の方がよりはっきりとセイシュをとらえているのが分かる。(3, 4octave) これは、harr 基底よりも、daubechies 基底のほうが分解能が優れているため、より高精度にセイシュをとらえたものと考えられる。(後ほど参照。) 6, 7oc-

tave の波が harr 基底の特に前半 (約 50000 秒付近まで) で大きな値をとっているがこれは分解能が daubechies 基底よりも劣るためにノイズとして入ってきたものと考えられる。

次に、図 8 に No. 1, No. 3, No. 6 の各観測点における Daubechies 基底による Wavelet 変換の結果を図 7 とは異なる表示方法で示す。なお、これらグラフの各周波数帯で正負の値が大きいところに、それぞれの周波数帯の振動が存在していることを示す。時刻 30000 ~ 60000 秒において、特に 3, 4octave の信号の値が強いのが分かる。これらの周波数帯の波のウェーブレット信号の値を比較するために図 9 に 2, 3, 4octave の周波数帯の No. 1 の結果を実線で、No. 3 の結果を破線で描いた。また、図 10 には同様に No. 1 の結果を実線で、No. 3 の結果を破線で描いた。

図 8 No. 1, No. 3, No. 6 における Wavelet 変換の結果 (Daubechies 基底)

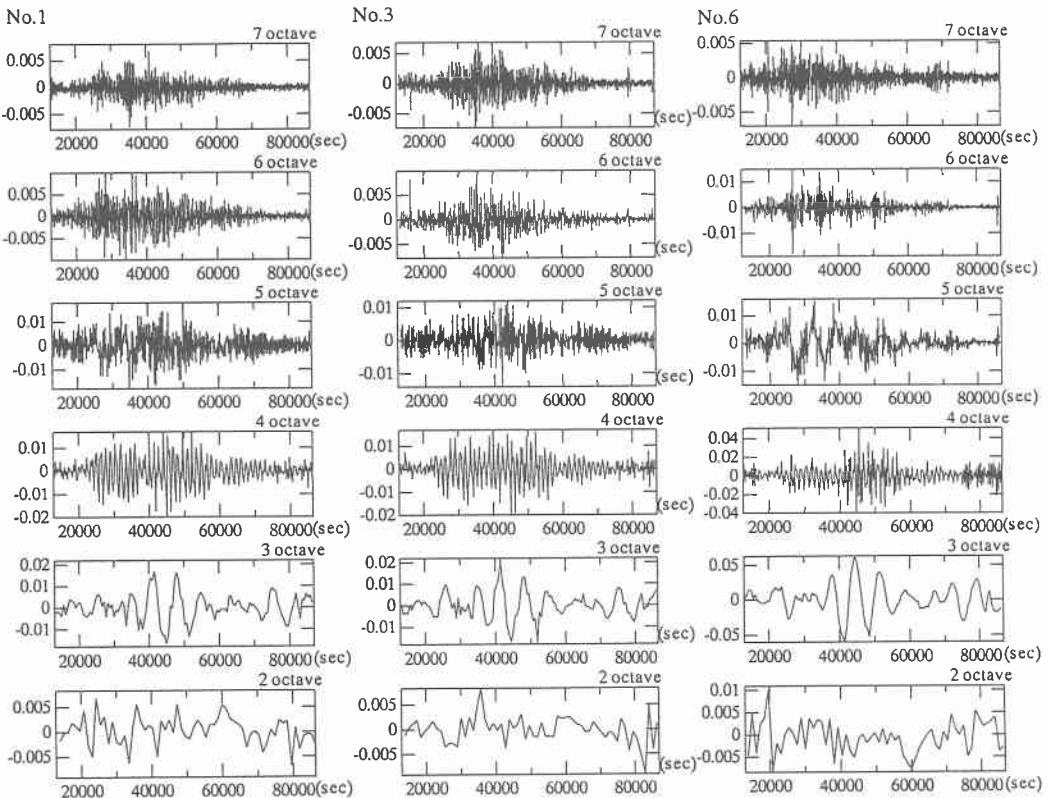


図9 No. 1, No. 3 の 2, 3, 4 octave の比較

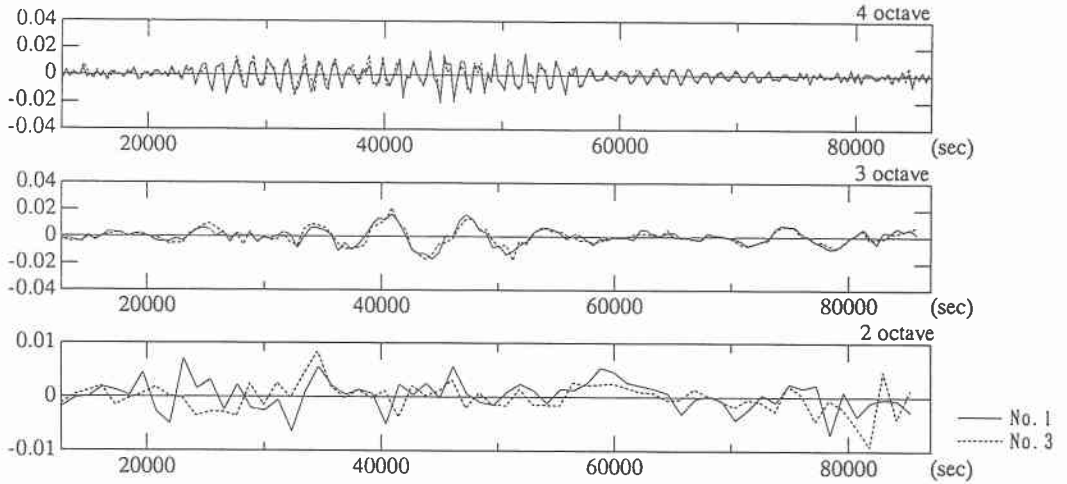


図10 No. 1, No. 6 の 2, 3, 4 octave の比較

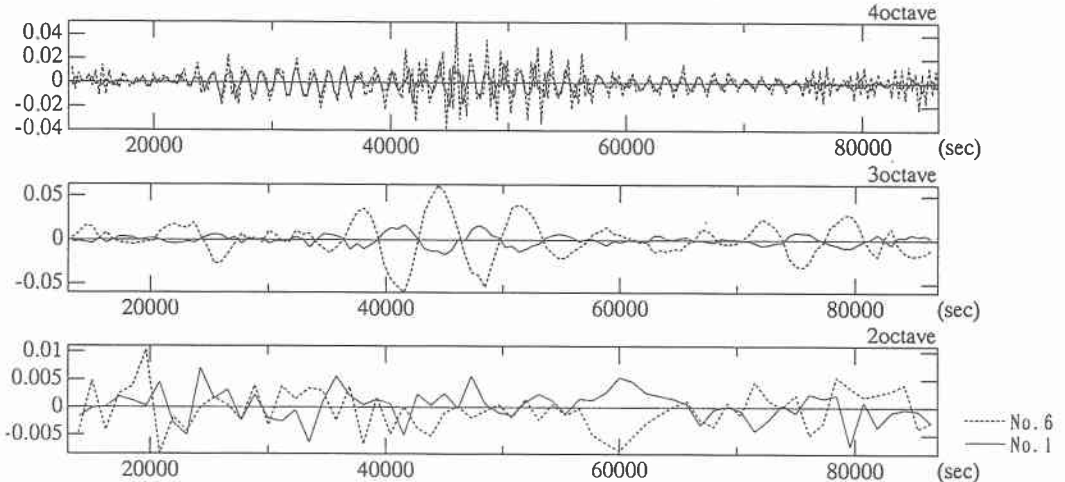


図9・10のそれぞれの周波数帯に対応する周期は、2octaveで約1152～2304秒、3octaveで約576～1152秒、4octaveで約288～576秒である。この中で特に3octave、4octaveでセイシュの存在が確認されている。まず、No. 1の自己相関と、No. 1とNo. 3の相互相関を比較して確認する。図11にNo. 1の自己相関を、図12にNo. 1とNo. 3の相互相関を示す。図11と図12を比較すると、よく似た相関関係を持つことが分かる。グラフのピーク点の間隔から、No. 1, No. 3共に約200～250秒の周期成分を含んでいることが予想できる。しかし、time lag以外の時間情報が含まれていないため、相関性と、時間の関係がはっきりしない点も否めない。

図11 No. 1 自己相関

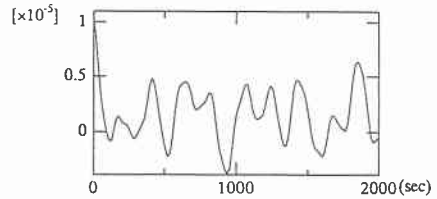


図12 No. 1-No. 3 相互相関

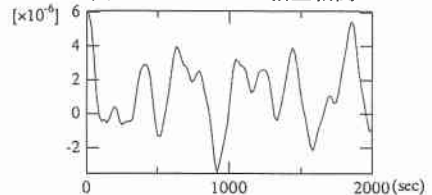


図9を見ると、No. 3、No. 6でウェーブレット信号の波形と値の大きさは3, 4octaveで似ている。その反面、2octaveでは時間によって、若干のずれが生じているのが分かる。これらのずれは、自己相関と相互相関の関係からは読み取ることはできず、ここにウェーブレット変換のメリットがあると言える。

No. 1、No. 6に関しても、相互相関を図13に示す。グラフのピーク点の間隔から、両者ともに約700秒の周期成分を含んでいることが予想される。

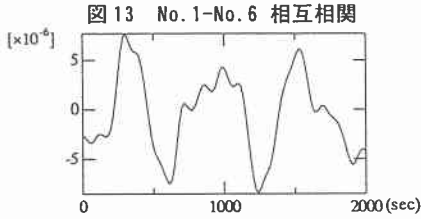


図10を見ると、それぞれ、値の大きさこそ違いますが、2, 3octaveにおいては、No. 1、No. 6それぞれの値が正負で逆になっているのに対し、4octaveの値は、ほぼ似たような値をとっている。図4でNo. 1とNo. 6の観測点の位置に注目するとNo. 1はダム貯水池の堤体側(南東側)に位置し、No. 6はダム貯水池の堤体と反対側(北西側)に位置している。ダム貯水池内ではセイシュの存在が確認されているが、前述のようにこれらの信号はセイシュの存在を確認したものと考えられる。一般にウェーブレット信号は元系列のとなる波の位相が180度入れ替わると正負の値が入れかわることが知られている。このことから、No. 1とNo. 6における3octaveの波の位相は180度ずれていることが分かる。つまり、このウェーブレット信号は、ダム貯水池内における南東-北西方向のセイシュを検出したものと考えられる。なお、このセイシュを周期に換算するとおよそ576秒~1152秒である。

反対に4octaveの波に関しては正負が入れ替わっていないことから、No. 1とNo. 6の観測点での位相が一致しているものと考えられる。このセイシュの周期は288~576秒である。

以上のように、Daubechies基底を用いることによりダム水位の時系列を、前回の報告で使用したHarr基底よりも、はるかに高精度で解析することができた。

#### 4 まとめ

今回、ウェーブレット変換に用いるマザー

ウェーブレットにN=8のDaubechiesウェーブレットを用いることにより、前回の報告で使用したHarrウェーブレットよりもはるかに高精度なウェーブレット解析を行うことができた。具体的には、①高周波数領域でも、高度な分解をすることが可能であるため、Harrウェーブレットではできなかった、変換の際に高周波数に混入してくるノイズ成分の除去に成功した。②その結果、水位変動成分の中に含まれているセイシュ成分のウェーブレット信号をより明確にとらえることができた。③セイシュ成分のウェーブレット信号から、セイシュの発生を時間軸と共にとらえる事ができ、さらに各観測点の相関関係を、時間軸と共にとらえることができた。

#### <参考文献>

- (1)石田亨平、長谷川和義、鈴木洋之：多点同時水位計測による貯水池の水面変動解析：水工学論文集第41巻 pp1017-1022 1997 pp1017-1022 1997
- (2)斎藤兆古：Mathematicaによるウェーブレット変換：朝倉書店
- (3)斎藤兆古：ウェーブレット変換の基礎と応用：朝倉書店
- (4)榊原進：ウェーブレットビギナーズガイド：東京電機大学出版局
- (5)芦野隆一、山本鎮男：ウェーブレット解析“誕生・発展・応用”：共立出版
- (6) K.-M.Lau and Hengyi Weng: climate signal detection using wavelet transform-How to make a time series sing-: Bulletin of American meteorological society Vol. 76, No. 12, December 1995