

II-50

不均質帯水層における地下水パラメータの推定に関する研究

室蘭工業大学 ○学生員 和田 麻衣子
室蘭工業大学 正会員 藤間 聡

1 はじめに

現在、人為的・自然的要因により地下水汚染、地下水位低下及び塩水化、水資源枯渇等の障害が各地で多発し、生態系や自然環境への影響が懸念される。このような現状において地下水問題を解明するためには、数値解析により地下水応答を合理的かつ的確に予測することが重要である。しかし、地下水流動モデルは広範な有効利用の段階には至っていない。この原因はモデルの構造および精度と整合性のある観測データを収集することが困難であることと、地下水位の変動を面的に観測することが難しく、限られた地点観測情報から経験的に推定しなければならないことに起因する。このため、地下水流動方程式のパラメータである透水係数、透水量係数等を高精度に推定する手法の確立が必要となる。

本研究は、事前情報が少ない地下水流動を解析対象とし、領域内に点在している地点観測データを用いて、誤差処理にカルマンフィルタ理論、非観測地点の地下水位の推定に統計的手法であるバリオグラムとAICを用いて決定したトレンド多項式を適用し、有限要素法の逆問題を用いて、地下水流動解析の主要パラメータを推定する。

2 解析対象領域

解析対象領域は図-1に示す北海道西南部胆振地方に位置する北東1.6km、南東1.4kmの不均質帯水層である。この地域の地質は最下層がシルト質土で構成され、その上にいずれも高い透水性を有する支笏降下軽石層、支笏火砕流堆積物層、恵庭・樽前降下軽石層が広範囲に分布している。本領域には、21か所の自記水位計が不規則に設置され、1時間毎に定時観測を行っている。

本研究では地表面凍結により涵養量を無視できる1996年1月1日から3月1日までの冬期間61日間の地下水観測データを用いる。

3 非観測地点における地下水位の推定

3.1 観測地下水位の誤差処理

地下水位観測値から透水量係数を求める逆問題において、観測値に誤差が含まれていると同定すべきパラメータは最適値に収束せず、ときには物理的に許容できない値を得る場合がある。従って、本研究ではカルマンフィルタ理論の固定区間スムージングを適用して誤差を分離し、観測地下水位の平滑推定値を求め、以後の解析において観測値として用いることにした。

3.2 平均地下水位の推定

地下水位 h は観測値に基づき観測期間における平均 m と変動成分 z との和で表されるものとし次式で表す。

$$h(x, y, t) = m(x, y) + z(x, y, t) \quad (1)$$

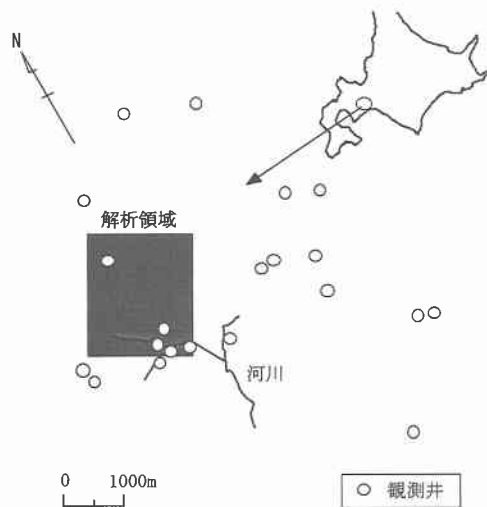


図-1 対象領域および観測地点

A Study on Estimation of Hydraulic Conductivity in Grandwater field.

by Maiko WADA, Satoshi TOHMA.

平均値 $m(x, y)$ は観測地点毎に異なるため、領域内では空間的トレンドを有する。この空間トレンドは次式で示される座標値 x, y の多項式で表す。

$$m(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \dots + a_k - ix^n + ay^n \quad (2)$$

ここに、 x, y は位置座標、 k はトレンド項数、 n は多項式の次数を示す。多項式の次数については必要以上に大きくなると、真の構造ではなく、誤差を忠実に再現するだけになってしまうため、AIC (赤池情報量規準) を用いて最適次数を決定する。最小二乗近似の場合、誤差は平均値が 0 で分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定すると、AIC は次式となる。

$$AIC = N \log Q + (n+1)(n+2) + N \log(2\pi e / N) \quad (3)$$

ここに、 N は観測点総数、 Q は残差平方和を示す。これより決定した多項式を用いて、任意地点の地下水位の空間トレンドを推定する。

3. 3 非観測地点の地下水位の推定

地下水位の変動成分を確率場における実現値と考え、観測値に基づき統計的手法を用いて非観測地点の地下水位の変動成分を推定する。本解析では、地下水位の変動成分の分散を一定とする代わりに、弱定常過程の成立条件を緩和するとともに変動成分の統計的空間分布をより正確に表現できると考えられるバリオグラムを導入する。バリオグラムは、二点間の状態変数の差の分散を定義するもので、不特定の場所でも一定距離 d 離れた二点の地下水位の差の分散が移動に際し不変とするものであり、次式によって与えられる¹⁾。

$$\gamma(d) = \frac{1}{2N(d)} \sum_{i=1}^N [Z(X_i + d) - Z(X_i)]^2 \quad (4)$$

ここに、 $\gamma(d)$ はバリオグラム、 $Z(X_i)$ は観測地点 X_i における地下水位、 d は二点間の距離、 $N(d)$ は、観測点数を示す。

任意の非観測地点における地下水位は次式で示される線形回帰式により推定を行う。

$$Z^*(X_0) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^0 Z(X_j) \quad (5)$$

ここに、 $Z^*(X_0)$ は非観測地点 X_0 における地下水位推定値、 $Z(X_j)$ は観測地点 X_j における地下水位観測値、 λ_j^0 は $Z(X_j)$ の重み係数を示す。(5) 式が最良不偏推定式となるために、推定誤差の平均が零の不偏性を有すること、推定誤差の分散が最小となることの二つの条件を満足しなければならない。

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^0 \gamma(X_i - X_j) + \mu = \gamma(X_i - X_0) \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^0 = 1 \quad (j = 1, \dots, N)$$

上記(6)式を解くことにより最良近似式の係数 λ_j^0 が決定される。一方、この最良近似式による推定誤差の分散は次式で与えられる。

$$Var[(Z_0^* - Z_0)] = \sum_{j=1}^N \lambda_j^0 \gamma(X_i - X_0) + \mu \quad (7)$$

ここに、 μ は未定係数を示す。以上の方法で定式化した最良近似式が正しく任意地点の地下水位を推定するには、推定値に偏りがなく誤差の分散が最小でなくてはならない。これを検証するには、各観測地点の地下水位を当該点を除き他の観測地点の値を用いて推定する。この近似式が適切に選定されているならば、誤差の平均は 0 となり、観測値との分散と(7)式の分散の相対比は 1 となる。

$$BI = E[(Z' - Z_0)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(Z'(X_i) - Z(X_i))] = 0 \quad (8)$$

$$RV = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(Z'(X_i) - Z(X_i)) / \sigma]^2 = 1 \quad (9)$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[(Z_0' - Z_0)] \quad (10)$$

ここに、 N は観測点総数を示す。上記二条件が(5)式の妥当性を判定する。

4 透水量係数の空間分布の推定

本解析では、次式で示される平面二次元定常地下水流動方程式に関して非線形最小二乗による最適化手法を用いて、3章で得られた地下水位から透水量係数の空間分布を推定する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (11)$$

ここに、 h は地下水位、 T は透水量係数、 Q は涵養量又は揚水量、 x, y は平面座標を示す。観測地点における透水量係数の最適値は観測地下水位に対するモデルによる計算地下水位の残差平方和を最小にするものと考え、最適解を探索するための評価基準として次式を採用する。

$$I(T) = \sum_{i=1}^N W_i [h_i - \bar{h}_i(T)]^2 \quad (12)$$

式中の I は評価基準、 h_i は観測地下水位、 $\bar{h}_i(T)$ は計算地下水位、 W_i は重みでここでは $W_i = 1$ とする。(12)式を透水量係数 T に関して最小化を行うと次式を得る。

$$\frac{\partial I(T)}{\partial T_m} = \sum_{i=1}^N J_{r^T} \{h_i - \bar{h}_i(T)\} = 0 \quad (m=1, \dots, M) \quad (13)$$

ここに、 J_{r^T} はヤコビアン行列と呼称される地下水位 h の透水量係数 T に関する偏微分係数で、また上付添字 T は転置を示す。 N は観測点総数、 M は同定すべき透水量係数の総数である。

地下水位は透水量係数の関数形であるため、(13)式は非線形となり直接解を求めることができない。そこで、テイラー展開を行い、一次項のみを考慮した線形近似式を考え、次式で示す反復改良法により残差平方和を最小にする透水量係数を求めることにする。

$$T(n+1) = T(n) + (J_{r^T} J_r)^{-1} J_{r^T} \{h_i - \bar{h}_i(T)\} \quad (14)$$

ここに、 n は反復回数を示す。上記の同定過程において、透水量係数 T が修正されるごとに評価基準 I の計算を行い、それが極小値になるときの T の値を最適同定値とした。

5 透水係数の推定

4章で得られた透水量係数より透水係数の空間分布を推定する。透水係数は、下式で示されるように透水量係数を地下水の水深で除したものである。

$$k = T/H = T/(h - B) \quad (15)$$

ここに、 k は透水係数、 T は透水量係数、 H は地下水の水深、 h は地下水位、 B は地盤標高を示す。水深 H は地下水位 h から地盤標高を差し引いたものであるため、地盤標高 B を推定しなければならない。 B は平均地下水位を推定するのと同様に(2)式で示す座標値 x, y の多項式で推定する。

6 解析結果および考察

6.1 非観測地点における地下水位の推定

非観測地点の地下水位は、(2)式の多項式で求めた平均地下水位と、(5)式の変動量との和とする。

平均地下水位に関しては、AICの最小値が4次の多項式で最適同定されたため、トレンド多項式の次数を4次と決定した。

地下水位変動量に関しては、観測バリオグラムを求めるため観測点間の距離を650m刻みで階級分けを行った。刻み650mは各階級に入る度数がほぼ等しくなるように決定した。推定には、2月9日の地下水位データを用い、得られたバリオグラムの結果を図-2に示す。同図から距離約3600mまで線形を有していることが認められる。従って、(5)式を用いて非観測地点の地下水位の変動量を推定する際、すべての観測値を用いる必要はなく、推定する地点から半径1800mの円内に内在する観測点の値のみ(5)式に適用すると良いことになる。この方法により(6)式の項数が減少し、計算時間の短縮が図れ、同時に不確実性が低減される。図-2から回帰式を求めると、地下水位変動量の理論バリオグラムは次式で与えられる。

$$\gamma(d) = 1.69 \times 10^{-7} d \quad (d \leq 1800m) \quad (16)$$

上式が正しく変動量を推定し得るかを検証するため、各観測点の地下水位を当該点を除いて推定する。この結果、(8)式の偏差は0.0048、(9)式の相対分散比は0.9037となる。従って、(16)式で表される本理論バリオグラムは、許容し得る誤差内で変動量を推定できることが認められる。ここで、推定地下水位空間分布を図-3に示す。地下水位は、領域上部から下部の湖、河川に向かい19mから10mまで、また、湖から河川へ向かい10mから6mまで順次低下していることが認められる。

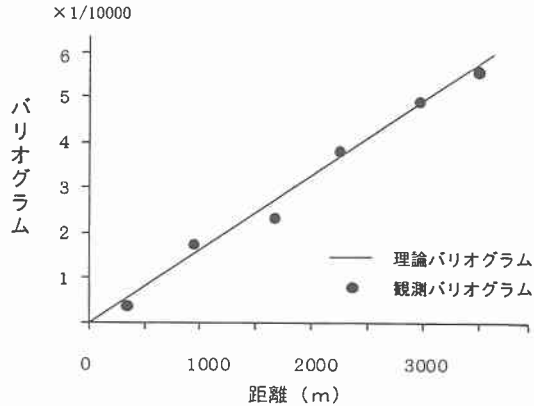


図-2 地下水位変動のバリオグラム

6.2 透水量係数の空間分布の推定

解析領域を2107節点、2016要素の小矩形要素に分割する。透水量係数の推定は領域の境界節点に推定地下水位を与えて内部節点における地下水位を計算し、誤差が許容し得る範囲に入るまで計算を繰り返す。ここでは、許容誤差は各節点あたり20mm以内とする。

(11)式における涵養量 Q は使用データが冬期間であり、上層面凍結が生じるため、地表からの流入・流出は無いものとした。透水量係数の初期条件は近隣領域で行われた解析結果²⁾を参考とし、 $2700 \sim 3300 m^2/day$ とした。

本解析では、透水量係数は $1490.25 m^2/day$ から $5906.96 m^2/day$ の範囲の値を示し、透水量係数の分布は、領域内で地盤標高が高く地下水位が低い右下部、河川のあたりで大きな値を有する。ここで、推定透水量係数空間分布図を図-4に示す。

6.3 透水係数および流速・流向の推定

6章2節で推定した透水量係数と地下水深に基づき算出した係数を図-6に示す。透水係数は、 $70.2868 m/day$ から $463.26 m/day$ の範囲にあり、これは火山灰の透水係数に相当し、高い透水性を有する。さらに、ダルシー則を適用して、流速・流向を推定した結果を図-7、図-8に示す。流速は、地盤標高の変化と地下水位の分布を反映して、領域右側から左側に向かい減速し、領域左下部のあたりでは、ほぼ0に近い状態を有する。最大流速は $2.47 m/day$ に達する。また、最小流速は $1.71 \times 10^{-2} m/day$ で、この

部分は湖にあたり、水位差がほとんど存在しないことに起因する。流向は、領域右上部および右下部から河川へ向かい、また、領域左上部から左下部へ向かうことが認められる。

7 まとめ

本研究においては、不均質帯水層における地下水パラメータの推定を目的とし、観測値の誤差処理、観測期間における平均地下水位および変動量の推定、有限要素法による透水係数の推定、流速・流向の推定を行い、下記の結論を得た。

1) 地下水位の観測誤差の影響を最小限にするため、カルマンフィルタ理論を用いて地下水位データの誤差処理を行うことにより、有限要素法で地下水位から透水量係数を求める計算過程において解の安定性が図れた。

2) 地下水位を観測期間の平均地下水位と変動量との和と仮定し、平均地下水位の空間トレンド多項式で算出し、変動成分をバリオグラムを導入して求めた。その結果、観測点が少ない領域においても信頼性のある地下水パラメータの推定が可能となった。

3) 地下水位の変動量のバリオグラムが、一定距離内で有意な関係を有するため、この距離を直径とする領域内の観測点のみ使用することにより推定に伴う不確実性の減少が図れた。

4) 解析対象領域を微小要素に分割し、有限要素法を使用して領域内における透水係数を推定した。ここで、有限要素法を使用する際に必要となる境界条件の水位に推定値を入力することにより十分な精度で透水量係数を推定することができた。

5) 不透水層面までの地盤標高をトレンド多項式で推定することにより高精度の地盤標高を推定することができ、十分な精度で透水係数を推定することができた。

上記の帯水層パラメータを推定することにより地下水の流動を把握することができた。今回、領域内に河川・湖がある場合の解析を行った。この領域は、左下に湖があるので推定が困難であると思われたが、おおむね良好な結果が得られた。

参考文献

- 1) Ghislain de Marsily: Quantitative Hydrogeology, ACADEMIC PRESS, pp. 284-337, 1986
- 2) 日下裕貴, 藤間聡: 広域帯水層における透水係数の空間分布推定, 土木学会北海道支部論文報告集, Vol. 55, pp. 96-99, 1999

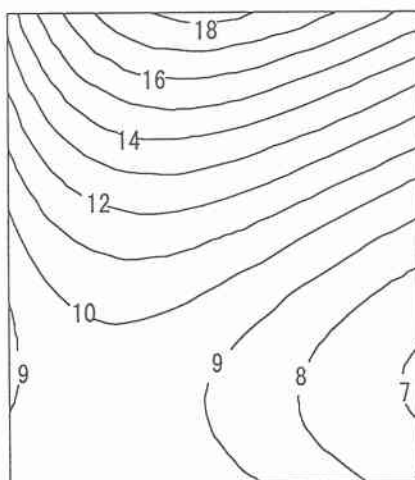


図-3 推定地下水位空間分布図(単位m)

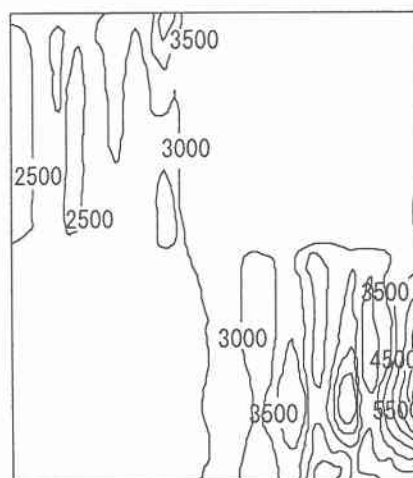


図-4 推定透水量係数空間分布図(単位 m^2/day)

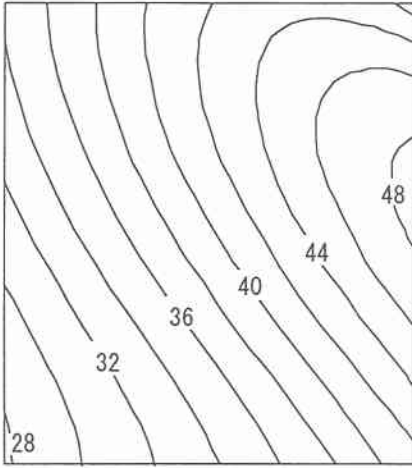


图-5 推定地盤標高分布图 (单位m)

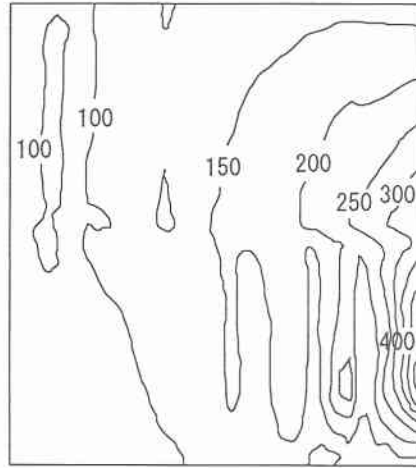


图-6 推定透水係数空間分布图 (单位 m/day)

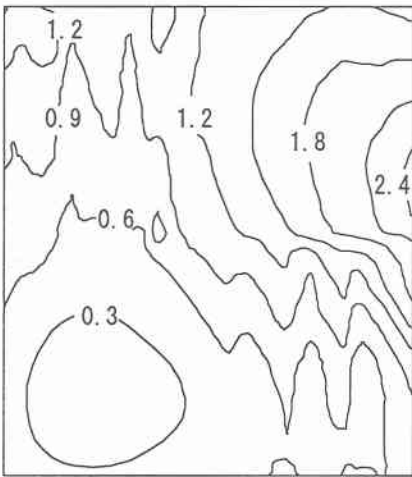


图-7 推定流速图 (单位 m/day)

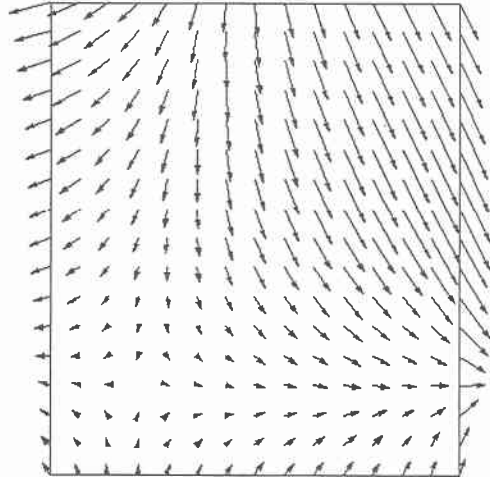


图-8 推定流向图