

II-41

北海道における損失項を含む総合化貯留関数法

開発土木研究所 ○正会員 佐々木靖博
 北海道河川防災研究センター フェロー 星 清
 開発土木研究所 正会員 井出 康郎
 ㈱リブテック 正会員 松木 賢治

1. まえがき

洪水流出解析を行う際に、貯留関数法が次の理由により広く用いられている。

(a)集中定数系モデルであり、流出現象の非線形性を比較的単純な構造式で表現できる。

(b)洪水逐次予測(Operational Forecast)に要求される計算の簡便さと迅速さを兼ね備えている。

しかしながら、貯留関数法による多くの洪水流出解析では、流出率などによって算定された有効雨量を用いている。一般的に、流出率を洪水期間中、リアルタイムに求めることは非常に困難である。したがって、逐次予測という観点から、洪水流出解析を行う際には、観測雨量と観測流量を直接取り込むことができるモデルがあれば、より実用的であると考えられる。

最近、「損失」という考えを取り入れ、観測雨量を直接入力する流出計算モデルが数多く発表されている^{1),2)}。本報告においても、損失項を含む貯留関数モデルを北海道内の既往洪水資料に適用して、モデル定数の最適化を行い、貯留関数法の総合化を図った。

2. 貯留関数モデル

本報告では、図-1 に示すタンクを考え、次式の貯留関数法を採用する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= r - q - b + q_0 \\ s &= k_1 q^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt} (q^{p_2}) \\ b &= \alpha q \\ q_0 &= q_B \exp(-\lambda t) \end{aligned} \right\} (1)$$

ここに、 s : 貯留高(mm)、 r : 観測雨量(mm/h)、 q : 観測流出高(mm/h)、 b : 損失高(mm/h)、 q_0 : 基底流出高(mm/h)、

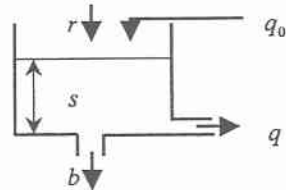


図-1 流出モデル

q_B : 初期流出高(mm/h)、 k_1, k_2 : 貯留係数、 α : 損失係数、 p_1, p_2 : 貯留指数、 λ : 減水係数

本報告で採用した式(1)の貯留関数法の特徴を以下に要約して述べる。

(a)式(1)に含まれる貯留方程式は Kinematic wave 法を貯留関数法に理論的に集中化したモデルを基本としている³⁾。

(b)降雨流出過程における不確定なすべての損失(蒸発散・浸透・初期損失など)を損失項 b でパラメタライズする。

(c)流域内の初期貯留量を考慮するため、基底流出高 q_0 を導入している。基底流出高 q_0 の導入は、解析期間内の総流出量 Σq が総降雨量 Σr を上回る際に計算不可能となることへの対応策⁴⁾であり、強制入力として与えることによって連続性が保たれている。なお、 λ はハイドログラフ減水部の標準減減曲線から得られる流域に固有な値であるが、北海道内の河川における嵯峨ら⁴⁾の解析結果を基に、本報告では、 $\lambda=0.019$ に固定した。

(d)モデル定数 p_1 と p_2 に関しては、表面流が卓越する比較的大きな出水を解析対象とする場合、マニング則を想定すると、 $p_1=0.6, p_2=0.4648$ に近似できることが知られている³⁾。したがって、本報告においても上記の値に固定した。

(e)モデル定数 k_1 と k_2 については、既往研究成果³⁾から次の関数形を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= c_1 A^{0.24} \\ k_2 &= c_2 k_1^2 (\bar{r})^{-0.2648} \end{aligned} \right\} (2)$$

A Synthetic Storage Routing Model with Loss Mechanisms in Hokkaido by Yasuhiro SASAKI, Kiyoshi HOSHI, Yasuro IDE and Kenji MATSUKI

ここに、 A :流域面積(km²)、 \bar{r} :平均雨量強度(mm/h)、 c_1, c_2 :未知定数

その結果、本報告での未知パラメータは、 c_1, c_2, α の3個となり、その最適値を同定して、採用モデルの検証を行い、貯留関数モデルの総合化を図る。

3. 非線形方程式の数値解法⁵⁾

式(1)の貯留関数モデルの解法にあたって、次の変数変換を行う。

$$y_1 = q^{p_2}, \quad y_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad (3)$$

式(1)と(3)より、非線形連立常微分方程式(4)を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{k_1 p_1}{k_2 p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{\beta}{k_2} y_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_2} (r + q_0) \end{aligned} \right\} (4)$$

ここに、

$$\beta = 1 + \alpha \quad (5)$$

式(4)はさらに式(6)のようにベクトル表示できる。

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \quad (6)$$

ここに、

$$Y = [y_1 \quad y_2]^T \quad (7)$$

$$F(Y) = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$f_1(y_1, y_2) = y_2 \quad (9)$$

$$f_2(y_1, y_2) = -\frac{k_1 p_1}{k_2 p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{\beta}{k_2} y_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_2} (r + q_0) \quad (10)$$

2階非線形方程式(6)を近似線形化する。1ステップ前における Y の値を Y^* とし、 $F(Y)$ を1次の項までTaylor級数展開した式(11)を用いると、式(6)は式(12)に変換される。

$$F(Y) = F(Y^*) + A(Y^*)(Y - Y^*) \quad (11)$$

$$\frac{dY}{dt} = A(Y^*)Y + B(Y^*) \quad (12)$$

ここに、

$$A(Y^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \\ &= -\frac{k_1 p_1}{k_2 p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{p_1/p_2-2} (y_2^*) - \frac{\beta}{k_2 p_2} (y_1^*)^{1/p_2-1} \end{aligned} \quad (14)$$

$$a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -\frac{k_1 p_1}{k_2 p_2} (y_1^*)^{p_1/p_2-1} \quad (15)$$

$$B(Y^*) = F(Y^*) - A(Y^*)Y^* = [0 \quad b_2]^T \quad (16)$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{k_1 p_1}{k_2 p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{p_1/p_2-1} (y_2^*) \\ &\quad + \frac{\beta}{k_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{1/p_2} + \frac{1}{k_2} (r + q_0) \end{aligned} \quad (17)$$

式(12)を数値計算の便宜上、離散化方程式に変換する。 $A(Y^*)$ と $B(Y^*)$ が定係数行列の時、 k を任意のタイムステップとして、式(12)は差分方程式(18)に変換できる。

$$Y_{k+1} = \Phi Y_k + \Gamma B_k \quad (18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} Y_k &= [y_1 \quad y_2]^T_k, \quad B_k = [0 \quad b_2]^T_k \\ \Phi &= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (19)$$

係数行列 Φ と Γ の要素の算定については、文献5)及び6)を参照されたい。

所要流出高 q は、漸化式(18)により任意のタイムステップ k における $y_1 = q^{p_2}$ と $y_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2})$ の値が逐次計算されるので、式(3)を用いて次のように求められる。

$$q = y_1^{1/p_2} \quad (20)$$

4. モデル定数の最適化手法⁷⁾

非線形方程式の数値解析手法に多用されている最適化手法は多岐にわたるが、もともと単純な手法にニュートン法(Newton-Raphson Method)があり、通常、関数の一次微係数を必要とする。したがって、ニュートン法によるモデル定数最適化同定の成否は、この一次微係数をいかに効率よく算定するかにかかってくる。

4-1. 感度係数方程式…感度係数の算定

今、モデル定数が時間的に変化しないと仮定し、式(4)における変数 y_1 と y_2 に関する微分方程式をモデル定数 k_1, k_2, β で微分すると式(21)が得られる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A_1 U + D \quad (21)$$

ここに、

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial k_1} & \frac{\partial y_1}{\partial k_2} & \frac{\partial y_1}{\partial \beta} & \frac{\partial y_2}{\partial k_1} & \frac{\partial y_2}{\partial k_2} & \frac{\partial y_2}{\partial \beta} \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$D = [0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ d_2 \ d_3]^T \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= -\frac{1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 \\ d_2 &= \frac{1}{k_2^2} \left\{ k_1 \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 + \beta y_1^{1/p_2} - (r + q_0) \right\} \\ d_3 &= -\frac{1}{k_2} y_1^{1/p_2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(21)はシステム方程式(12)と同一形式であり、しかも式(23)と式(13)が同じ要素で構成されている。

式(22)のベクトル U は、モデル定数 (k_1, k_2, β) の変化の変数 (y_1, y_2) の変化に及ぼす影響と解釈されるので、しばしば「感度係数」といわれ、感度係数に関する方程式(21)は「感度方程式」といわれる。

感度方程式の重要な性質として、システム方程式と同一形式になることが揚げられる。システム方程式(12)と同様に、式(21)は式(26)に変換される。

$$U_{k+1} = \Phi_1 U_k + \Gamma_1 D_k \quad (26)$$

ここに、 Φ_1 および Γ_1 は (6×6) の正方行列であり、式(18)と同じ要素で構成されることが知られている^{5),6)}。

感度方程式のその他の特徴を以下に示す。

- (a) 感度方程式の次数はシステム方程式の次数に等しい。
- (b) システム方程式が線形、非線形であるかに関わらず、感度方程式は常に線形となる。
- (c) システム方程式が線形であれば、感度方程式とシステム方程式は構造上同一となる。
- (d) システム方程式の初期条件がモデル定数と独立ならば、感度方程式の初期条件はゼロとなる。

4-2. 流出高 q に関する感度係数

流出高 q に関する感度係数は、式(20)を用いて次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial k_1} &= \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_1} \\ \frac{\partial q}{\partial k_2} &= \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_2} \\ \frac{\partial q}{\partial \beta} &= \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial \beta} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式(27)の右辺に示される感度係数は、式(22)のベクトル U の3要素から求められる。

さらに、 c_1 と c_2 の最適値を求めるためには、 c_1 と c_2 に関する感度係数が必要となるが、これらは式(2)と(27)を用いて、式(28)で計算される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial c_1} &= \frac{\partial q}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial c_1} = (A^{0.24}) \frac{\partial q}{\partial k_1} \\ \frac{\partial q}{\partial c_2} &= \frac{\partial q}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial c_2} = (k_1^2 r^{-0.2648}) \frac{\partial q}{\partial k_2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

4-3. Newton法による最適化手法の適用

モデル定数の最適化は、観測流量 q_i^* と計算流量 $q(c_1, c_2, \beta)$ の誤差 $e_i(c_1, c_2, \beta)$ ができるだけ小さくなるように定数を同定することを目的としている。よって本報告では、誤差の2乗和を最小とする目的関数(評価関数) $J(c_1, c_2, \beta)$ を、カイ2乗基準を用いて式(29)のように表す。

$$\text{Min}_{c_1, c_2, \beta} J(c_1, c_2, \beta) = \sum_{i=1}^N e_i^2(c_1, c_2, \beta) \quad (29)$$

ここに、 $J(c_1, c_2, \beta)$: 目的関数、 $e_i(c_1, c_2, \beta)$: 誤差項、 N : 標本数

また、誤差項は式(30)で与えられる。

$$e_i(c_1, c_2, \beta) = \left\{ q_i^* - q_i(c_1, c_2, \beta) \right\} \sqrt{\sqrt{q_i^*}} \quad (30)$$

ここに、 q_i^* : 観測流量、 $q_i(c_1, c_2, \beta)$: 計算流量

今、新たにモデル定数ベクトル K を定義する。

$$K = [c_1 \ c_2 \ \beta]^T \quad (31)$$

ニュートン法による最適化では、式(29)を満足するように最適ベクトル値 K を繰返し法によって探索する。すなわち、 $(m+1)$ ステップにおける K の値を K^{m+1} 、 m ステップにおける値を K^m としたとき、次式(32)が成立するとして補正ベクトル ΔK をいかに客観的かつ迅速に算出するかが主要課題となる。

$$K^{m+1} = K^m + \Delta K \quad (32)$$

$$\Delta K = [\Delta c_1 \ \Delta c_2 \ \Delta \beta]^T \quad (33)$$

4-5. 目的関数の評価基準と最小化条件

$(m+1)$ ステップでの誤差項 $e_i(K^{m+1})$ を、 K^m のまわりで1次の項まで Taylor 級数展開する次のようになる。

$$e_i(K^{m+1}) = e_i(K^m) + \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_1}(c_1^{m+1} - c_1^m) + \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_2}(c_2^{m+1} - c_2^m) + \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial \beta}(\beta^{m+1} - \beta^m) \quad (34)$$

式(34)の誤差項に関する感度係数は、式(27)、(28)及び式(30)を用いて、式(35)で計算される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_1} &= \frac{1}{\sqrt{q_i}} \frac{\partial q_i(K^m)}{\partial c_1} = -w_{i1} \\ \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_2} &= \frac{1}{\sqrt{q_i}} \frac{\partial q_i(K^m)}{\partial c_2} = -w_{i2} \\ \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{q_i}} \frac{\partial q_i(K^m)}{\partial \beta} = -w_{i3} \end{aligned} \right\} (35)$$

式(35)の関係式を用いると、式(34)は以下のように書き換えることができる。

$$\left. \begin{aligned} e_i(K^{m+1}) &= e_i(K^m) - w_{i1}\Delta c_1 - w_{i2}\Delta c_2 - w_{i3}\Delta \beta \\ &= E - W\Delta K \end{aligned} \right\} (36)$$

($i = 1, 2, \dots, N$)

ここに、

$$\left. \begin{aligned} E &= [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_i \ \dots \ e_N]^T \\ W &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{i1} & w_{i2} & w_{i3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & w_{N3} \end{bmatrix} \\ \Delta K &= \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^{m+1} - c_1^m \\ c_2^{m+1} - c_2^m \\ \beta^{m+1} - \beta^m \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (37)$$

すなわち、 E は観測流量と計算流量の差からなる ($N \times 1$) 行列、 W は感度係数からなる ($N \times 3$) 行列、 ΔK はモデル定数の補正項からなる (3×1) 行列である。

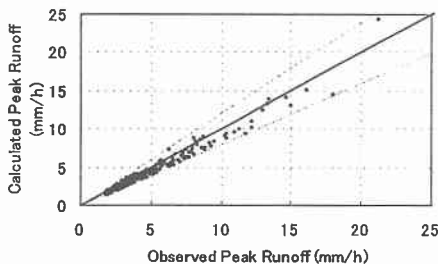


図-1 計算・実績ピーク流出高の比較(全データ)

式(29)の目的関数のもとに K^{m+1} の値を算出することになるが、 K^m は既知であるので、目的関数の評価基準は次のように変換される。

$$\left. \begin{aligned} & \text{Min}_{\Delta K} J(K) \\ &= \sum \{e_i(K^m) - w_{i1}\Delta c_1 - w_{i2}\Delta c_2 - w_{i3}\Delta \beta\}^2 \\ &= (E - W\Delta K)^T (E - W\Delta K) \\ &= [E^T E] - 2(\Delta K)^T [W^T E] + (\Delta K)^T [W^T W] (\Delta K) \end{aligned} \right\} (38)$$

式(38)の最小化条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial J(K)}{\partial (\Delta K)} = -2[W^T E] + 2[W^T W] \Delta K = 0 \quad (39)$$

式(39)から補正ベクトル ΔK は次式で計算される。

$$\Delta K = [W^T W]^{-1} [W^T E] \quad (40)$$

式(40)を解くにあたり、最適値すなわち $|\Delta K|$ の値が十分に小さい値に収束するか、 $|\Delta K/K^m|$ が許容限界値(通常は 0.001~0.01 程度)におさまるまで繰り返される。このため、効率よく ΔK を計算する必要がある。

本報告では、 W の列ベクトルを互いに直交化させる Cholesky 法を用いて、 ΔK を効率よく算定することができる成分回帰手法⁸⁾を併用した。なお、収束条件として、 ΔK の許容限界値を 0.001 に設定した。

5. 実測データへの適用

道内一級河川13水系において、昭和 36 年から平成 10 年までに観測された洪水資料のうち、比流量が 0.5 ($\text{m}^3/\text{sec}/\text{km}^2$) 以上の 562 個の洪水資料について計算を行った。さらにその中から、本報告では、総合化モデルとしての各パラメータの特性を知る目的で、計算ピーク流出高と実績ピーク値との相対誤差が 25%以内に収まる 362 例を解析対象として選定した。

ピーク流出高の計算値と実績値の比較を図-1 及び図-2 に示す。なお、図-2 は図-1 のうち、ピーク流出高が5 (mm/h)以下の範囲を拡大した図である。

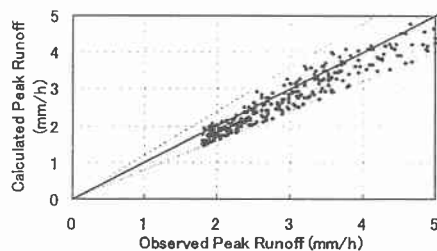


図-2 計算・実績ピーク流出高の比較(5mm/h以下)

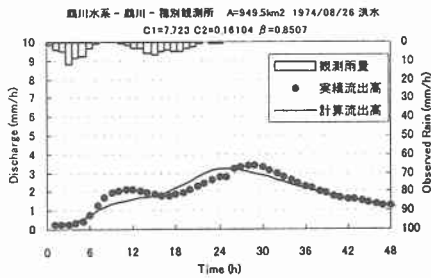


図-3 解析事例

(鶴川流域、鶴川、穂別観測所、S49.08.26、A=949.5km²)

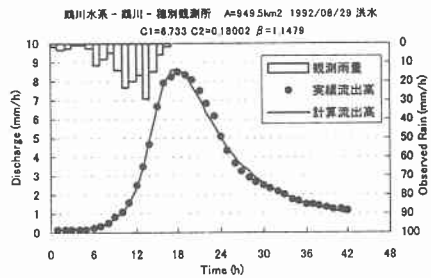


図-4 解析事例

(鶴川流域、鶴川、穂別観測所、H4.08.09、A=949.5km²)

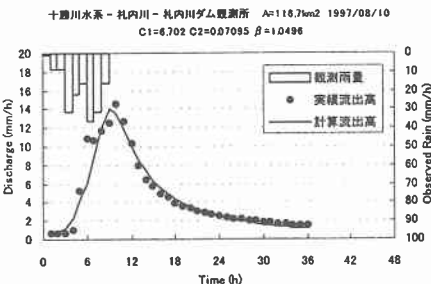


図-5 解析事例

(十勝川流域、札内川、札内川ダム観測所、H4.08.10、A=116.7km²)

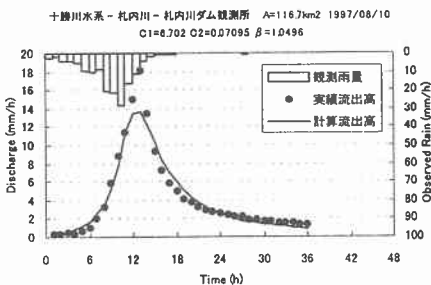


図-6 解析事例

(十勝川流域、札内川、札内川ダム観測所、H9.08.10、A=116.7km²)

採用モデルを既往洪水に適用した結果の代表的例を図-3~6に示す。流域の大小に関わらず、ハイドログラフの立ち上がり部及び減衰部の適合度は、とくに良好であった。ピーク近傍におけるハイドログラフの適合度については、観測データの精度等の問題もあり、計算値が実測値を下回る例が多い。

馬場²⁾は、損失係数と水文諸量との関係を定量化するため、次式を提案している。

$$\frac{1}{\beta} = \phi_0 \frac{Q}{R} + E \quad (41)$$

ここに、 $\beta(=1+\alpha)$ 、 α : 損失係数、 ϕ_0 : 重み係数、 Q : 総流出量、 R : 総降雨量、 E : 流域の地被区分に関する補正項

図-7は、式(41)の関係を最適値にあてはめた結果である。図中には回帰式も示されている。式(41)の適合度は良好であり、損失係数の推定が観測水文資料によって可能になることが確認された。

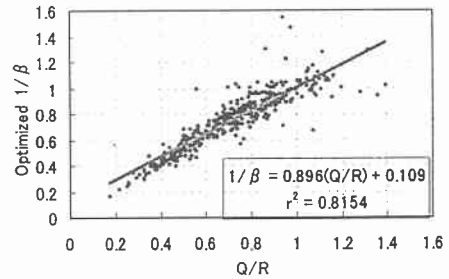


図-7 1/βとQ/Rの関係

本報告では、新たな未知パラメータとして c_1 、 c_2 及び $\beta(=1+\alpha)$ の3個を設定し、モデルの総合化に取り組んできた。総合化モデルとしての各パラメータの特性について述べる。図-8~10は、各パラメータ同定値の度数分布グラフであり、表-1はその基礎統計表である。各パラメータについての特徴は以下の通りである。

表-1 パラメータ統計表

パラメータ	c_1	c_2	β
標本数	362	362	362
平均	11.051	0.169	1.499
標準偏差	4.409	0.118	0.620
最小値	2.694	0.005	0.647
中央値	10.086	0.147	1.309
最大値	41.056	0.925	5.908
歪度	2.157	2.171	2.469
変動係数	0.399	0.698	0.414

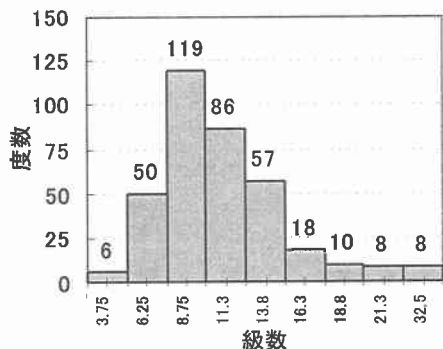


図-8 C₁の度数分布

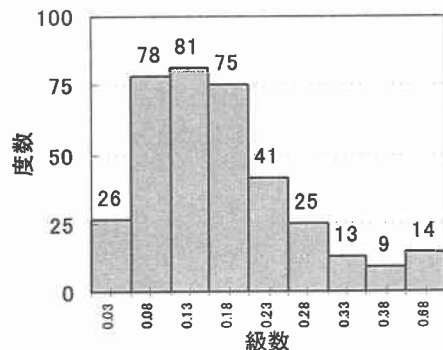


図-9 C₂の度数分布

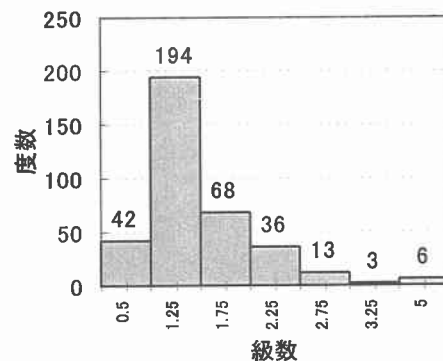


図-10 betaの度数分布

表-2 パラメータの集中度合い

パラメータ	C1	C2	beta
(平均値±標準偏差)の範囲に含まれる標本数	298	292	302
全データに占める割合	0.823	0.807	0.834

c_1 は 2.694~41.056 と幅広く分布しているが、大半が 10 前後に集中している。 c_2 の範囲は 0.005~0.925 で、多くの値が 0.15 前後に集中している。また、 β も 0.647~5.908 と幅広く分布しているが、1.3 前後に同定値の多くが集中している。その結果、各定数は平均値近傍のごく狭い範囲に集中していることが解った。

そこで、「平均値±標準偏差」を一つの指標とし、この範囲内に含まれている割合を調べることで、モデル定数のバラツキ度合いを測ることとした。表-2 にその結果を示す。全てのパラメータについて、ほぼ同じ割合で8割以上のデータが上記の範囲に含まれており、パラメータが狭い範囲に集中していることが確認された。

7. おわりに

本報告では、損失項を含む貯留関数モデルを道内一級河川に適用し、その総合化と普遍化を試みた。ピーク付近におけるハイドログラフの適合度に課題を残したが、流域の大小に関わらず、立ち上がり部及び減衰部でのハイドログラフの再現性はとくに良好であった。

モデルパラメータ c_1 、 c_2 、 β の集中度合いについての検討を行った結果、その 8 割以上が「平均値±標準偏差」の狭い範囲に収まっており、平均値のまわりのバラツキが非常に小さいことが確認された。したがって、表-1 に示される平均値を式(2)に代入することにより、貯留係数の総合化が図られる。今後は、より多くの洪水事例を解析し、総合化パラメータの推定精度の向上を図る必要がある。

参 考 文 献

- 1) 田中敦・藤田睦博・清水康行：損失機構を含む貯留関数法に関する研究，土木学会北海道支部論文報告集，第 53 号(B)，pp.54-59，1997
- 2) 馬場仁志・星 清：損失機構を組み合わせた貯留関数モデルの総合化，水工学論文集，第 43 巻，pp.1085-1090，1999
- 3) 星 清・山岡勲：雨水流法と貯留関数法との相互関係，第 26 回水理講演会論文集，pp.273-278，1982
- 4) 佐藤力信・嵯峨 浩・馬場仁志・星 清：損失機構を含む貯留関数法を応用したタンクモデルの提案，土木学会北海道支部論文報告集，第 55 号(B)，pp.32-33，1999
- 5) 星 清：やさしい微分方程式の数値解法，土木試験所月報，No.395，pp.29-38，1986
- 6) 北海道開発局開発土木研究所・若手水文学研究会：現場のための水文学，p.98，1994
- 7) 星 清：やさしい数学的最適化手法，土木試験所月報，No.398，pp.26-35，1986
- 8) 星 清：成分回帰分析手法，土木試験所月報，No.397，pp.20-26，1986