

II-39

河川水温の感度解析と非線形解析

北見工業大学工学部 フェロー会員 佐渡 公明
北見工業大学大学院 ○学生員 杉山 一郎

1. まえがき

河川水温は河川の自然環境を示す一つの指標であり、水棲生物分布に及ぼす影響が大きく、水質調査の中では基本的な測定項目である。河川水温は水理・気象要素に支配されるが、これらの感度が感度解析により十分解明されているとは言えない¹⁾。さらに、水面熱収支量は水温の非線形関数になるが²⁾、水温計算上のこの取り扱いには未解決の問題である。

本論文では、最初に著者らが提案した、一般化した1次元熱収支方程式³⁾に、水中物質の(生)化学的反応熱を取り入れ、水理・気象要素の河川水温に対する感度算定式を導き、北見の月平均気象要素が標準偏差分だけ変化したときの感度計算を行う。次に、一般化した1次元熱収支方程式の非線形解を導き、常呂川上流11km区間における計算を行い、線形解との比較を行う。

2. 平衡温度と熱交換係数による河川水温計算

(1) 気象・水理要素に対する感度算定式

著者は、文献3)において、河川水が十分に混合して横断面内の水温分布が近似的に一定と仮定できるとき、水面熱収支量、河床伝熱量、粘性逸散、移流熱を考慮して一般化した1次元熱収支方程式を提案している。この式に水中物質の(生)化学的反応熱を考慮すると、一般化した1次元熱収支方程式は次のとおりとなる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (AD_i \frac{\partial \theta}{\partial x}) + \frac{H_T(\theta)}{c_w \rho_w h} \quad (1)$$

$$H_T(\theta) = H_S(\theta) + H_b(\theta) + c_w \rho_w r(\theta, -\theta) + \overline{C_k} \mu_k h + \frac{c_w \rho_w q_r}{B} (\theta_r - \theta) + \frac{\rho_w g}{J} i_r q \quad (2)$$

$$H_S(\theta) = (1 - \alpha) I + \epsilon (0.51 + 0.066 \sqrt{e_a}) \sigma T_a^4 - \epsilon \sigma T_w^4 + \alpha_H(\theta) (\theta_a - \theta) + \alpha_E(\theta) \{e_a - e_s(\theta)\} \quad (3)$$

$$\alpha_E(\theta_a) = \frac{\rho_w L}{24 \times 3600} \{0.112 V + 0.094 (\Delta \theta_v)^{1/3}\} \quad (4)$$

$$\alpha_H(\theta_a) = \frac{c_a p}{622 L} \alpha_E(\theta_a) \quad (5)$$

ここで、 θ ：水温、 T_w ：水温の絶対温度、 U ：断面平均流速、 A ：横断面積、 h ：断面平均水深、 B ：水面幅、 D_i ：乱流拡散係数、 c_w ：水の比熱、 ρ_w ：水の密度、 H_T ：全熱収支量、 H_S ：水面熱収支量、 H_b ：河床伝熱量、 i_r ：摩擦勾配、 q ：単位幅当りの流量、 J ：熱の仕事当量、 q_r ：本川単位長さ当りの横流入量、 θ_a ：横流入水の温度、 r ：雨量、 θ_r ：雨水の温度、 $\overline{C_k}$ ：水中にある物質 k の断面平均濃度、 μ_k ：水中物質 k による単位質量・単位時間当りの(生)化学的反応熱量、 α ：アルベド、 I ：全天日射量、 ϵ ：射出率、 σ ：ステファン・ボルツマン定数、 α_H ：顕熱伝達率、 α_E ：潜熱伝達率、 θ_a ：気温、 T_a ：気温の絶対温度、 e_a ：空気の水蒸気圧、 e_s ：水面上の空気の飽和水蒸気圧、 L ：蒸発の潜熱、 V ：ある高さの相対風速、 $\Delta \theta_v$ ：水面上とある高さの湿潤空気の仮温度差、 c_a ：空気の定圧比熱、 p ：気圧である。

全熱収支量 H_T は元来水温 θ の非線形関数である。式(2)の $H_T(\theta)$ を気温 θ_a を用いて Taylor 級数に展開し、1次の項までとると次式ようになる。

$$H_T(\theta) = K(\theta_a) \{\theta^*(\theta_a) - \theta\} \quad (6)$$

$$K(\theta_a) = K_S(\theta_a) + 2 \sqrt{\frac{c_g \rho_g \lambda_g}{\pi \Delta t}} + \frac{c_w \rho_w q_r}{B} + c_w \rho_w r \quad (7)$$

$$\theta^*(\theta_a) = \theta_a + \frac{H_T(\theta_a)}{K(\theta_a)} \quad (8)$$

ここで、 $K(\theta_a)$ と $\theta^*(\theta_a)$ はそれぞれ水体に作用する全熱収支量を考慮したときの熱交換係数と平衡温度で、 K_S は水面熱収支量に対する熱交換係数である。また、 c_g 、 ρ_g 、 λ_g はそれぞれ河床地盤の比熱、密度、

表-1 水温敏感度算定式

気象要素	敏感度式		
全天日射量	$\frac{\partial \theta}{\partial I} = \frac{(1-\alpha)}{K} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*}$		
アルベド	$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{-I}{K} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*}$		
気温	$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_a} = \frac{1}{K} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} \left\{ K + 0.033 \epsilon \alpha e_s' T_a^4 \sqrt{\frac{rh}{e_s}} + 4 \epsilon \sigma (0.066 \sqrt{e_a} - 0.49) T_a^3 - c_w \rho_w r \right.$ $\left. - (e_s - e_a) \left(\frac{\alpha_E e_s'}{e_s} + \frac{\partial \alpha_E}{\partial \theta_a} \right) - 2 \sqrt{\frac{c_g \rho_g \lambda_g}{\pi \Delta t}} - \frac{c_w \rho_w q_{lr}}{B} - \frac{H_T}{K} \frac{\partial K}{\partial \theta_a} \right\} + \frac{\partial \theta}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \theta_a}$ $\frac{\partial K}{\partial \theta_a} = 12 \epsilon \sigma T_a^2 + \frac{\partial \alpha_H}{\partial \theta_a} + e_s' \frac{\partial \alpha_E}{\partial \theta_a} + \alpha_E e_s'' + (e_s - e_a) \frac{\partial \alpha_{ED}}{\partial \theta_a} + (1 - rh) e_s' \alpha_{ED}$		
湿度	$\frac{\partial \theta}{\partial Rh} = \frac{1}{K} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} \left\{ 0.0033 \epsilon \alpha T_a^4 \sqrt{\frac{e_s}{Rh}} + \frac{\partial \alpha_E}{\partial Rh} (e_a - e_s) + \alpha_E \frac{e_s}{100} - \frac{H_T}{K} \frac{\partial K}{\partial Rh} \right\} + \frac{\partial \theta}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial Rh}$ $\frac{\partial K}{\partial Rh} = \frac{\partial \alpha_H}{\partial Rh} + \frac{\partial \alpha_E}{\partial Rh} e_s' - \frac{\partial \alpha_{ED}}{\partial Rh} (e_a - e_s) - \alpha_{ED} \frac{e_s}{100}$		
気圧	$\frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{1}{K} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} \left\{ \frac{\partial \alpha_E}{\partial p} (e_a - e_s) - \frac{H_T}{K} \frac{\partial K}{\partial p} \right\} + \frac{\partial \theta}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial p}$ $\frac{\partial K}{\partial p} = \frac{\partial \alpha_H}{\partial p} + \frac{\partial \alpha_E}{\partial p} e_s' - \frac{\partial \alpha_{ED}}{\partial p} (e_a - e_s)$		
風速	$\frac{\partial \theta}{\partial V} = \frac{1}{K} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} \left\{ \frac{\partial \alpha_E}{\partial V} (e_a - e_s) - \frac{H_T}{K} \frac{\partial K}{\partial V} \right\} + \frac{\partial \theta}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial V}$ $\frac{\partial K}{\partial V} = \frac{\partial \alpha_H}{\partial V} + \frac{\partial \alpha_E}{\partial V} e_s' - \frac{\partial \alpha_{ED}}{\partial V} (e_a - e_s)$		
雨量	$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{c_w \rho_w}{K} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} \left(\theta_r - \theta_a - \frac{H_T}{K} \right) + c_w \rho_w \frac{\partial \theta}{\partial K}$		
水理要素	敏感度式		
横流入量	$\frac{\partial \theta}{\partial q_{lr}} = \frac{c_w \rho_w}{KB} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} \left(\theta_{lr} - \theta_a - \frac{H_T}{K} \right) + K \frac{\partial \theta}{\partial K} \right\}$		
単位幅当りの流量	$\frac{\partial \theta}{\partial q} = \frac{\rho_w g i_f}{JK} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} - \frac{K}{q} \frac{\partial \theta}{\partial K}$	水深	$\frac{\partial \theta}{\partial h} = \frac{\partial \theta}{\partial q} U$
流速	$\frac{\partial \theta}{\partial U} = \frac{\partial \theta}{\partial q} h$	摩擦勾配	$\frac{\partial \theta}{\partial i_f} = \frac{\rho_w g q}{JK} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*}$
共通項	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} = 1 - \exp\left\{-\frac{K(x-x_0)}{c_w \rho_w q}\right\}$ • $\frac{\partial \theta}{\partial K} = \frac{(\theta^* - \theta_0)(x-x_0)}{c_w \rho_w q} \exp\left\{-\frac{K(x-x_0)}{c_w \rho_w q}\right\}$ • $e_s = \exp\left\{2.3026\left(\frac{7.50}{\theta_0 + 237.3} + 0.7858\right)\right\}$ • $\alpha_{ED} = \left. \frac{\partial \alpha_E(\theta)}{\partial \theta} \right _{\theta=\theta_a}$ • $rh = \frac{Rh}{100}$ 		

熱伝導率である。なお、水面熱収支のみを考慮すると、熱交換係数 $K_S(\theta_a)$ 及び平衡温度 $\theta_s^*(\theta_a)$ は次式となる。

$$K_S(\theta_a) = 4\epsilon\sigma T_a^3 + \alpha_H(\theta_a) + \alpha_E(\theta_a)e'_s(\theta_a) - \alpha'_E(\theta_a)\{e_a - e_s(\theta_a)\} \quad (9)$$

$$\theta_s^*(\theta_a) = \theta_a + \frac{H_S(\theta_a)}{K_S(\theta_a)} \quad (10)$$

次に、式(6)を式(1)に代入し、乱流拡散項を無視すると押し出し流れとなり、水温計算式は式(11)となる。

$$\frac{dx}{dt} = U \quad \text{上で} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{K(\theta^* - \theta)}{c_w \rho_w h} \quad (11)$$

式(12)を水塊の出発点 $x=x_0$ 、 $t=t_0$ で $\theta = \theta_0$ のもとに解き、 U 、 h 、 K 、 θ^* を一定とすると水温は次のように表される。

$$x = x_0 + U(t - t_0) \quad (12)$$

$$\theta = \theta^* + (\theta_0 - \theta^*) \exp\left\{-\frac{K}{c_w \rho_w h}(t - t_0)\right\} \quad (13)$$

$$= \theta^* + (\theta_0 - \theta^*) \exp\left\{-\frac{K}{c_w \rho_w q}(x - x_0)\right\} \quad (14)$$

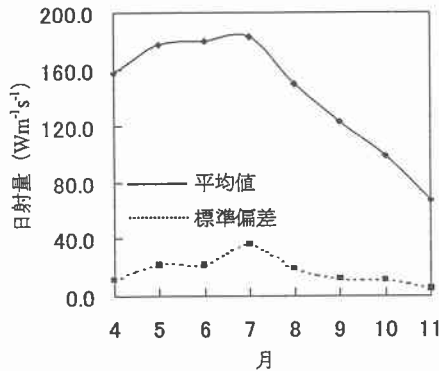


図-1 日射量の各月平均値と標準偏差

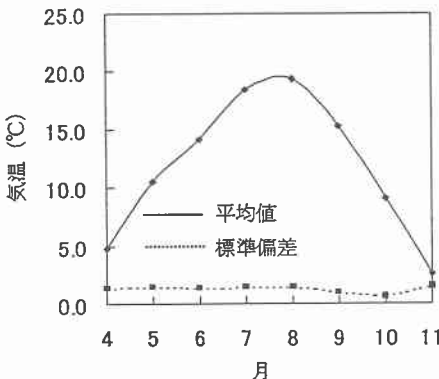


図-2 気温の各月平均値と標準偏差

式(14)を気象要素 I 、 α 、 θ_a 、 Rh 、 p 、 V 、 r 及び、水理要素 q_w 、 q 、 h 、 U 、 i_f で微分することにより、各気象・水理要素が独立に変化した場合の水温に対する敏感度を表わす式が得られる。この結果を表-1に示す。

(2) 北見の各月気象要素に対する敏感度計算

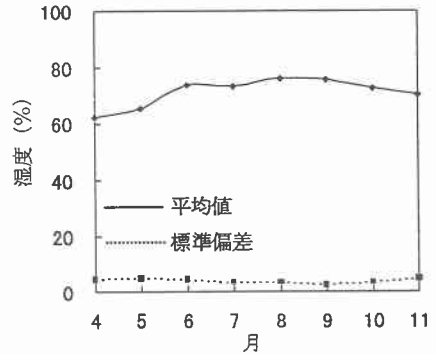


図-3 温度の各月平均値と標準偏差

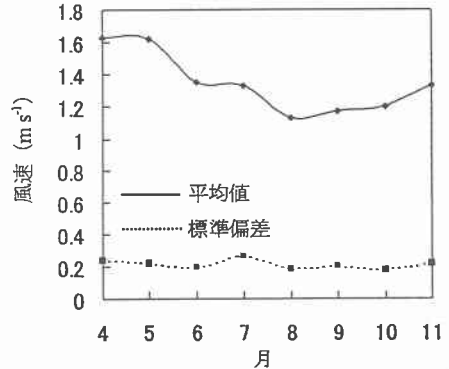


図-4 風速の各月平均値と標準偏差

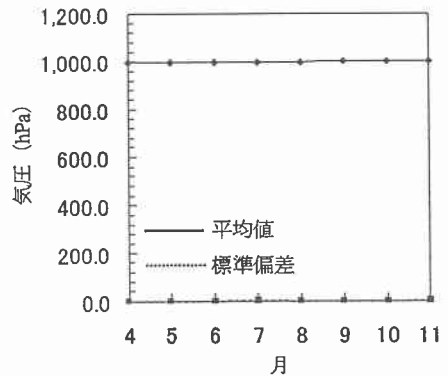


図-5 気圧の各月平均値と標準偏差

表-2 各月気象要素が標準偏差分変化したときの水温に与える影響度合いと変化量

	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月
気温 (%)	62.648	52.172	51.299	48.055	59.337	60.805	50.707	70.726
日射量 (%)	25.510	34.958	35.206	42.444	27.784	29.214	37.327	15.582
湿度 (%)	12.718	13.255	13.649	9.891	12.307	12.332	15.557	12.119
風速 (%)	-6.594	-5.405	-4.673	-5.998	-5.075	-7.364	-6.993	-4.557
気圧 (%)	0.011	0.007	0.009	0.013	0.009	0.016	0.013	0.014
合計 (%)	94.292	94.986	95.491	94.406	94.362	95.002	96.611	93.885
水温変化量(°C)	0.018	0.027	0.027	0.037	0.030	0.017	0.012	0.016

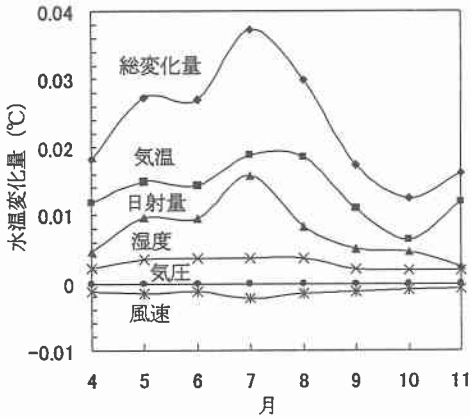


図-6 月平均値+月標準偏差と月平均値の気象要素に対する1km流下後の水温変化量
($U=0.5(\text{ms}^{-1})$, $h=1.0(\text{m})$)

北見工業大学寒地気象観測露場で観測された 87 年 9 月～98 年 12 月までの観測データを用いて、日射量、気温、湿度、気圧、風速の各月の平均値と標準偏差を求めた。その変化を図-1～5 に示す。

河川水温感度を求めるために、水力条件を $U=0.5\text{ms}^{-1}$, $h=1.0\text{m}$ として、まず、気象要素が上記各月平均値の場合に対する 1km 流下後の水温を計算した。次に、表-1 の感度算定式を用い、各気象要素が、月平均値より標準偏差分変化したときの 1km 流下後の水温を求めた。図-6 は、各気象要素が、月平均値+月標準偏差の場合と月平均値の場合の 1km 流下後における水温の違いを表している。気象要素が明示されている曲線は、その気象要素のみが単独に月標準偏差分変化したときの変化量を表しており、総変化量は、全気象要素が標準偏差分変化したときの変化量を表わしている。これより、水温に与える

影響が大きいのは、気温と日射量であり、風速は水温の上昇を抑える役割を担っているといえる。また、気圧は水温変化に対する影響力は非常に少ないことがわかる。

表-2 は、図-6 の総変化量を 100% としたときに、Taylor 展開を利用して各気象要素が水温に与える影響割合を示したものである。この表からも気温は日射量の多い 7 月以外 50% を超えており、水温の上昇に大きな影響を与えることがわかる。ところで、合計が 100% に満たないのは、Taylor 級数に展開したときに 2 次以上の項を無視したためによる計算誤差である。

3. 河川水温の非線形解析

(1) 閾値のある Bernoulli の微分方程式

式(3)の $H_S(\theta)$ を $\theta = \theta_a$ を用いて Taylor 級数に展開し、2 次の項までとると、

$$H_S(\theta) = \frac{H_S''(\theta_a)}{2} \theta^2 + \{H_S'(\theta_a) - H_S''(\theta_a) \times \theta_a\} \theta + H_S(\theta_a) - H_S'(\theta_a) \times \theta_a + \frac{H_S''(\theta_a)}{2} \times \theta_a^2 \quad (15)$$

となる。2 次、1 次の係数、および定数項をそれぞれ a , b , c とおき、 H_T として H_S のみを考えて式(15)を式(11)に代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{a\theta^2 + b\theta + c}{c_w \rho_w h} \quad (16)$$

$\theta = \psi$ (定数) を式(16)に代入して、特殊解 ψ は

$$\psi = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (D = b^2 - 4ac > 0) \quad (17)$$

となる。これに $\alpha(t)$ を未知関数として、求める $\theta(t)$ を $\theta = z + \psi$ とおき、式(16)に代入すると、 $a\psi^2 + b\psi$

+c=0 であるから次式を得る。

$$\frac{dz}{dt} \pm \frac{\sqrt{D}}{c_w \rho_w h} z = \frac{a}{c_w \rho_w h} z^2 \quad (18)$$

これは z についての Bernoulli の微分方程式であり、初期条件 t=0 のとき z=z_0 のもとで解くと

$$z(t) = \frac{\mp \sqrt{D}}{a - (a \pm \frac{\sqrt{D}}{z_0}) \exp(\mp \sqrt{D} \frac{t}{c_w \rho_w h})} \quad (19)$$

である。式(17), (18), (19)は複合同順である。D=0 の場合は z(t) が不定形となり、解 θ は得られない。式(19)に特殊解 ψ を加えると、最終的に解 θ は次式にまとめられる。

$$\alpha = \frac{b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \beta = \frac{b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{において}$$

$$\theta = \frac{-\alpha + \beta \left(\frac{\theta_0 + \alpha}{\theta_0 + \beta} \right) \exp\left(-\frac{\sqrt{D}(t-t_0)}{c_w \rho_w h}\right)}{1 - \left(\frac{\theta_0 + \alpha}{\theta_0 + \beta} \right) \exp\left(-\frac{\sqrt{D}(t-t_0)}{c_w \rho_w h}\right)} \quad (20)$$

式(19)より a - √D/z_0 ≥ 0 で場合分けした解の挙動は図-7 のようになる。

(i) ψ = $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ の場合

θ_0 > $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ のとき、

$$t = t_c = \frac{c_w \rho_w h}{\sqrt{D}} \log \left(\frac{a}{a - \sqrt{D}/(\theta_0 - \psi)} \right)$$

で解は爆発。…①

θ_0 = $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ のとき、解は一定。…②

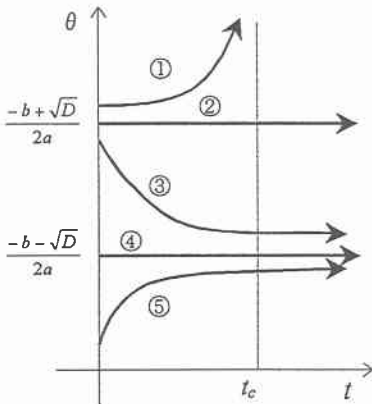


図-7 Bernoulli の微分方程式による解の挙動

θ_0 < $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ のとき、t → ∞ で解は単調減少。…③

また、式(19)より a + √D/z_0 ≥ 0 で場合分けした解の挙動も図-7 に示す。

(ii) ψ = $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ の場合

θ_0 > $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき、t → ∞ で解は単調減少。…③

θ_0 = $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき、解は一定。…④

θ_0 < $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき、t → ∞ で解は単調増加。…⑤

図-7 は、水温初期値 θ_0 が閾値 (-b + √D)/(2a) より小さいときは (-b - √D)/(2a) に収束し、θ_0 が閾値より大きいとき、解は爆発することを示している。

(2) 変数分離法

変数分離法により式(16)は、初期条件 t=t_0 で θ = θ_0 のもとに解くと、

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{c_w \rho_w h} = \int_{t_0}^t \frac{a \theta^2 + b \theta + c}{\theta^2} dt \quad (21)$$

となり、水温 θ は次のように求まる。

(i) D > 0 の場合、解は式(20)に一致する。

また、そのときの平衡温度は、t → ∞ において θ* = -α である。

(ii) D = 0 の場合

$$\theta = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{\frac{1}{\theta_0 + b/2a} - a \frac{(t-t_0)}{c_w \rho_w h}} \quad (22)$$

また、そのときの平衡温度は、θ* = -b/2a である。

(iii) D < 0 の場合

γ = √(4ac - b^2) とおくと

$$\theta = \frac{\theta_0 + \left\{ \frac{\gamma}{2a} + \frac{b}{\gamma} \left(\theta_0 + \frac{b}{2a} \right) \right\} \tan \left\{ \frac{\gamma(t-t_0)}{2c_w \rho_w h} \right\}}{1 - \frac{(2a\theta_0 + b)}{\gamma} \tan \left\{ \frac{\gamma(t-t_0)}{2c_w \rho_w h} \right\}} \quad (23)$$

また、このときの平衡温度は虚根となり、求めることはできない。

変数分離法のみでは、解の爆発現象を判別することは不可能である。以上より、水温非線形解析におい

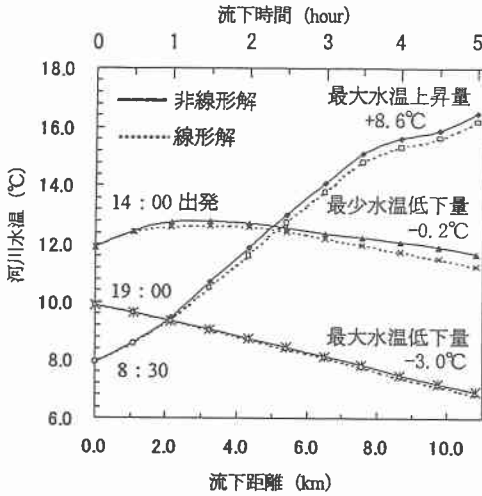


図-8 常呂川上流 11km 区間における非線形解と線形解による水温変化 ($U=0.601\text{ms}^{-1}$, $h=0.233\text{m}$, $B=12.3\text{m}$)

ては、 D の正、0、負に対応して解をそれぞれ式(20)、(22)、(23)から求めればよい。ただし、式(20)において解が爆発する場合は、線形解(13)を適用する。

(3) 常呂川上流 11km 区間における計算例

1980年10月8日(晴れ)に、常呂川上流で観測された各気象・水理要素のデータを用いて、常呂川上流 11km 区間(旭橋～勝山橋)における非線形解、線形解の水温計算例を図-8に示す。10月8日に30分毎に出発した上流端(旭橋)を出発する河川水の温度が、下流端(勝山橋)において、最大水温上昇量、最少水温変化量、最大水温低下量を示すケースを表している。8時30分に旭橋を出発し、5時間かけて10.818km 流下し勝山橋に到着した河川水は、およそ 8.6°C 上昇している。これは太陽が南中するまで日射量が常に増加し、気温もそれに伴い増加し続けていることが影響していると考えられる。一方、19時を過ぎると日射量の影響は無くなり、気温も低下するため、水温は減少してゆくと説明できる。

非線形解、線形解共に同様の水温の挙動を示している。しかし、若干のずれが生じており、線形解の方が常に低くなっている。その差は最大で約 0.9°C ある。どちらの計算結果が、実際の河川水温に近いのかについて、今後実測値と比較検討を行う。

4. 結論

本論文で得られた結果をまとめると以下のようになる。

(1) 各気象要素の月平均値+月標準偏差の場合と月平均値の場合による敏感度計算により、水温へ与える影響が大きいのは気温と日射量であることがわかった。

(2) 閾値のある Bernoulli の方程式及び変数分離法を用いて、河川水温の非線形解析を行う方法を示した。

(3) 線形解と非線形解による水温計算において、水温変化の挙動は同様だが、非線形解の方が常に高い計算結果となった。

今後の課題は、本論文で示した河川水温に及ぼす気象・水理要素の影響に関する諸計算式を実河川を対象に実証することである。また、これによる非線形解析の必要性を明らかにすることが重要である。

参考文献

- 1) Sinokrot, B. A. and Stefan, H. G.: Stream water-temperature sensitivity to weather and bed parameters, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.120, No.6 pp.722-736, 1994.
- 2) 佐渡公明: 河川水温の熱収支に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, No. 330, pp.69-79, 1983.
- 3) 佐渡公明: 平衡温度による河川水温の1次元解析, 土木学会論文報告集, No. 333, pp.119-127, 1983.